

## Plan du Chapitre

1. Modèles unicritères et multicritères.
2. Concepts de base de la modélisation multicritère.
3. Utilité multi-attribut (agrégation).
4. Méthodes de surclassement.
5. PROMETHEE & GAIA.
6. Logiciel Decision Lab.
7. Méthodes interactives.

6 AD 2015

1

## Quelques Problèmes de Décision et d'Evaluation

- Choisir le site d'implantation d'une nouvelle usine, d'un magasin, ...
- Engager du personnel, GRH.
- Acheter du matériel.
- Evaluer la qualité des fournisseurs.
- Evaluer des projets.
- Choisir une stratégie d'investissement.

6 AD 2015

2

# Modèle Multicritère vs Unicritère

- Modèle unicritère :

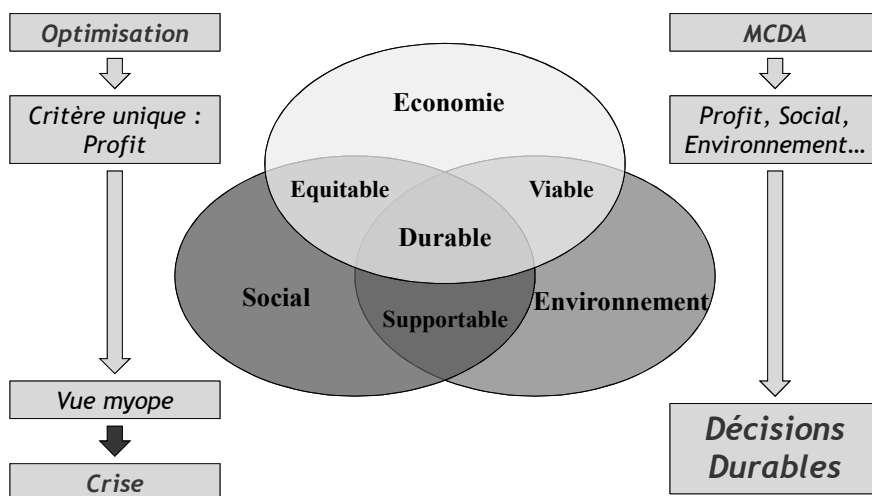
$$\text{Optimiser } \{g(a) | a \in A\}$$

- Mathématiquement bien posé :
  - Notion de solution optimale,
  - Classement complet des actions.
- Economiquement mal posé :
  - Un seul critère ? Peu réaliste.
  - Notion de critère : seuils de perception, ...

6 AD 2015

3

# MCDAs vs Optimisation



6 AD 2015

4

## Modèle Multicritère vs Unicritère

- Modèle multicritère :

Optimiser  $\{g_1(a), g_2(a), \dots, g_k(a) \mid a \in A\}$

- Mathématiquement mal posé :
  - Pas de solution optimale,
  - Pas de sens mathématique.
- Economiquement bien posé :
  - Plus proche du problème de décision réel,
  - Recherche d'une solution de compromis.

6 AD 2015

5

## Développement de l'aide à la décision multicritère

- 1968 : méthode ELECTRE I (B. ROY)
- 1972 : conférence internationale aux U.S.A.
- 1973 : premier mémoire multicritère à l'U.L.B.
- 1975 : groupe de travail européen
- 1977 : Charnes & Cooper :

The main impetus for the burst of new applications seems to be associated with the evolution of public management science and its very natural orientation towards multiobjective formulation.

- 1980-85 :  $\pm 12\%$  des communications dans les congrès européens.
- 1992 : journal international JMCD

6 AD 2015

6

## Tableau Multicritère

- Actions :
  - décisions possibles,
  - items à évaluer.
- Critères :
  - quantitatifs,
  - qualitatifs.

6 AD 2015

7

## Tableau Multicritère

Action 1	
Action 2	
Action 3	
Action 4	
Action 5	
...	

6 AD 2015

8

## Tableau Multicritère

	Crit. 1 (unité)	Crit. 2 (unité)	Crit. 3 (unité)	Crit. 4 (unité)	...
Action 1					
Action 2					
Action 3					
Action 4					
Action 5					
...					

6 AD 2015

9

## Tableau Multicritère

	Crit. 1 (/20)	Crit. 2 (cote)	Crit. 3 (appréc.)	Crit. 4 (O/N)	...
Action 1	18	135	B	Oui	...
Action 2	9	147	M	Oui	...
Action 3	15	129	TB	Non	...
Action 4	12	146	TM	?	...
Action 5	7	121	B	Oui	...
...	...	...	...	...	...

6 AD 2015

10

## Localisation d'une Usine

	Investissement (BEF)	Coûts (BEF)	Environn. (estimation)	...
Site 1	18	135	B	...
Site 2	9	147	M	...
Site 3	15	129	TB	...
Site 4	12	146	TM	...
Site 5	7	121	B	...
...	...	...	...	...

6 AD 2015

11

## Possibilité d'Achats

	Prix (BEF)	Fiabilité (jours)	Maintenance (estimation)	...
Produit A	18	135	B	...
Produit B	9	147	M	...
Produit C	15	129	TB	...
Produit D	12	146	TM	...
Produit E	7	121	B	...
...	...	...	...	...

6 AD 2015

12

# Un Exemple

## Achat d'une automobile

### Objectifs :

- Economie à l'achat (prix),
- Economie à l'usage (consommation),
- Performances (puissance),
- Confort,
- Habitabilité.

6 AD 2015

13

## Tableau Multicritère

Marque	Prix	Puissance	Consomm.	Habitabilité	Confort
Moyenne A	360000	75	8,0	3	3
Sport	390000	110	9,0	1	2
Moyenne B	355000	85	7,0	4	3
Luxe 1	480000	90	8,5	4	5
Economic	250000	50	7,5	2	1
Luxe 2	450000	85	9,0	5	4

- Quel est le meilleur achat ?

6 AD 2015

14

## Tableau Multicritère

Marque	Prix	Puissance	Consomm.	Habitabilité	Confort
Moyenne A	360000	75	8,0	3	3
Sport	390000	110	9,0	1	2
Moyenne B	355000	85	7,0	4	3
Luxe 1	480000	90	8,5	4	5
Economic	<b>250000</b>	50	7,5	2	1
Luxe 2	450000	85	9,0	5	4

- Quel est le meilleur achat ?

6 AD 2015

15

## Tableau Multicritère

Marque	Prix	Puissance	Consomm.	Habitabilité	Confort
Moyenne A	360000	75	8,0	3	3
Sport	390000	110	9,0	1	2
Moyenne B	355000	85	7,0	4	3
Luxe 1	480000	90	8,5	4	5
Economic	<b>250000</b>	50	7,5	2	1
Luxe 2	450000	85	9,0	5	4

- Quel est le meilleur achat ?
- Quel est le meilleur compromis ?

6 AD 2015

16



## Tableau Multicritère

Marque	Prix	Puissance	Consomm.	Habitabilité	Confort
Moyenne A	360000	75	8,0	3	3
Sport	390000	110	9,0	1	2
Moyenne B	355000	85	7,0	4	3
Luxe 1	480000	90	8,5	4	5
Economic	250000	50	7,5	2	1
Luxe 2	450000	85	9,0	5	4

- Quel est le meilleur achat ?
- Quel est le meilleur compromis ?
- Quelles sont les priorités de l'acheteur ?



6 AD 2015

17

## Définition des actions

- Définition : Soit A l'ensemble des actions, qui peut être :
  - défini **en extension** :  
par énumération de ses éléments.  
→ petit nombre d'actions.
  - défini **en compréhension** :  
par des contraintes.  
(Cf. programmation linéaire)  
→ grand nombre ou infinité d'actions.

6 AD 2015

18

## Propriétés de l'ensemble des actions

A peut être :

- **stable** : défini a priori, n'évolue pas.
- **évolutif** : peut être modifié au cours de la procédure.
- **globalisé** : éléments exclusifs l'un par rapport à l'autre.
- **fragmenté** : on considère des combinaisons d'actions.

6 AD 2015

19

## Modélisation des préférences

- Problème :  
Comment comparer deux actions  
 $a$  et  $b$  entre elles ?
- Premier modèle : 3 résultats  
possibles :
  1. Préférence :  $aPb$  ou  $bPa$
  2. Indifférence :  $aIb$
  3. Incomparabilité :  $aRb$

6 AD 2015

20

## Structure de préférences

- Propriétés (logiques):

$aPb \Rightarrow \text{non } bPa$	$P$ est asymétrique
$aIa$	$I$ est réflexive
$aIb \Rightarrow bIa$	$I$ est symétrique
Non $aRa$	$R$ est irréflexive
$aRb \Rightarrow bRa$	$R$ est symétrique

- Ces trois relations de préférence forment une structure de préférence (s.p.), si pour tous  $a, b$  de  $A$  on a toujours l'une des quatre situations suivantes :

$$aPb \text{ ou } bPa \text{ ou } aIb \text{ ou } aRb$$

6 AD 2015

21

## Structure de préférence traditionnelle (unicritère)

- Optimisation d'une fonction  $g$  définie sur  $A$

$$\forall a, b \in A: \begin{cases} aPb & \Leftrightarrow g(a) > g(b) \\ aIb & \Leftrightarrow g(a) = g(b) \end{cases}$$

- Conséquences :

$R$ est vide
$P$ est transitive
$I$ est transitive

- Préordre total.

6 AD 2015

22

## Notion de seuil d'indifférence

- Problème : Intransitivité de l'indifférence.  
Cf. Paradoxe de la tasse de café (Luce, 1956)
- Introduction d'un seuil d'indifférence :

$$\forall a, b \in A: \begin{cases} aPb & \Leftrightarrow g(a) > g(b) + q \\ aIb & \Leftrightarrow |g(a) - g(b)| \leq q \end{cases}$$

- Quasi-ordre :  $P$  est transitive, mais pas  $I$ .

6 AD 2015

23

## Autres structures de préférences

- Seuil d'indifférence variable  
⇒ Notion d'ordre d'intervalle.
- Seuil de préférence + seuil d'indifférence  
⇒ Notion de pseudo-ordre.
- Modèles incluant l'incomparabilité  
⇒ Notion d'ordre partiel.
- Structures valuées de préférences

6 AD 2015

24

## **Théorie du choix social**

- **Problème :**
  - Un groupe de personnes doivent choisir un candidat parmi plusieurs (élection).
  - Chaque personne (électeur) classe les candidats par ordre de préférence.
  - Quel candidat doit être élu ?
- **Quelle est la « meilleure » procédure de vote ?**
- **Analogie avec les modèles multicritères :**
  - Candidats  $\leftrightarrow$  actions,
  - Electeurs  $\leftrightarrow$  critères.

6 AD 2015

25

## **5 procédures... ... parmi d'autres...**

1. Majorité relative.
2. Condorcet.
3. Scrutin à 2 tours (présidentielle).
4. Borda.
5. Eliminations successives.

6 AD 2015

26

## Procédure 1 : Majorité relative

3 candidats: Albert, Bruno, Claire  
30 votants:

11 votants	10 votants	9 votants
A	B	C
B	C	B
C	A	A

A	11
B	10
C	9

Albert est élu  
27

6 AD 2015

## Procédure 1 : Majorité relative

3 candidats: Albert, Bruno, Claire  
30 votants:

11 votants	10 votants	9 votants
A	B	C
B	C	B
C	A	A

A	11
B	10
C	9

Problème : B et C préférés à A  
par une majorité de votants !

Albert est élu  
28

6 AD 2015

**Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat  
Marquis de Condorcet  
1743 - 1794**



6 AD 2015

## Procédure 2 : Condorcet

3 candidats: Albert, Bruno, Claire  
30 votants:

11 votants	10 votants	9 votants
A	B	C
B	C	B
C	A	A

<b>B</b> meilleur que A	19 votes
<b>B</b> meilleur que C	21 votes
C meilleur que A	19 votes

**Bruno est élu**

6 AD 2015

30

## Procédure 2 : Paradoxe de Condorcet

3 candidats: Albert, Bruno, Claire

9 votants:

4 votants	3 votants	2 votants
A	B	C
B	C	A
C	A	B

A meilleur que B	6 votes
B meilleur que C	7 votes
C meilleur que A	5 votes



**pas d'élus !**

31

6 AD 2015

## Procédure 3 : Scrutin à 2 tours (élection présidentielle française)

4 candidats: Albert, Bruno, Claire, Diane

63 votants:

22 votants	21 votants	20 votants
B	C	D
A	A	A
C	D	C
D	B	B

**1<sup>er</sup> tour:** B et C

**2<sup>ème</sup> tour:** C bat B  
(41 contre 22)

**Claire est élue**

6 AD 2015

32



## Procédure 3 : Scrutin à 2 tours (élection présidentielle française)

4 candidats: Albert, Bruno, Claire, Diane

63 votants:

22 votants	21 votants	20 votants
B	C	D
A	A	A
C	D	C
D	B	B

Claire est élue !!!

...alors que

A meilleur que C	42 votes
A meilleur que B	41 votes
A meilleur que D	43 votes

6 AD 2015

33

## Procédure 3 : scrutin à 2 tours (élection présidentielle française)

3 candidats: Albert, Bruno, Claire

17 votants:

5 votants	6 votants	4 votants	2 votants
C	A	B	B
A	B	C	A
B	C	A	C

1 <sup>er</sup> tour:	A et B
2 <sup>ème</sup> tour:	A bat B (11 contre 6)

Albert est élu

6 AD 2015

34

## Procédure 3 : scrutin à 2 tours (élection présidentielle française)

3 candidats: Albert, Bruno, Claire  
17 votants:

5 votants	6 votants	4 votants	2 votants
C	A	B	<del>A</del> <del>B</del>
A	B	C	<del>B</del> <del>A</del>
B	C	A	C

Albert était élu

1<sup>er</sup> tour: A et C

2<sup>ème</sup> tour: C bat A  
(9 contre 8)

↙  
Claire est élue !

6 AD 2015

Problème : non-monotonicité !

35

## Jean Charles de Borda 1733 - 1799



6 AD 2015

36

## Procédure 4 : Borda

3 candidats: Albert, Bruno, Claire  
81 votants:

30 votants	29 votants	10 votants	10 votants	1 votant	1 votant
A	C	C	B	A	B
C	A	B	A	B	C
B	B	A	C	C	A

Points	Scores	
2	A	101
1	B	33
0	C	109

$$31 \times 2 + 39 \times 1$$

$$11 \times 2 + 11 \times 1$$

**Claire est élue !**

$$39 \times 2 + 31 \times 1$$

6 AD 2015

37

## Procédure 4 : Borda

3 candidats: Albert, Bruno, Claire  
81 votants:

30 votants	29 votants	10 votants	10 votants	1 votant	1 votant
A	C	C	B	A	B
C	A	B	A	B	C
B	B	A	C	C	A

Points	Scores	
2	A	101
1	B	33
0	C	109

**A meilleur que C : 41 sur 81**

6 AD 2015

38

## Procédure 4 : Borda

4 candidats: Albert, Bruno, Claire, Diane

7 votants:

3 votants	2 votants	2 votants	Points
C	B	A	3
B	A	D	2
A	D	C	1
D	C	B	0

Scores		Classement
A	13	A
B	12	B
C	11	C
D	6	D

6 AD 2015

Albert est élu

39

## Procédure 4 : Borda

4 candidats: Albert, Bruno, Claire, ~~Diane~~

7 votants:

3 votants	2 votants	2 votants	Points
C	B	A	2
B	A	C	1
A	C	B	0

Scores		Classement
A	6	C
B	7	B
C	8	A

6 AD 2015

Claire est élue

40

## Borda (manipulation)

3 candidats: Albert, Bruno, Claire

34 votants:

12 <small>votants</small>	12 <small>votants</small>	10 <small>votants</small>	Points
A	B	C	3
B	A	A	2
C	C	B	1
x	x	x	0

Les partisans de Bruno suscitent la candidature du candidat x (« candidat bidon »)

Scores		Classement
A	46	<b>A</b>
B	36	B
C	20	C

**Albert est élu**

6 AD 2015

41

## Borda (manipulation)

4 candidats: Albert, Bruno, Claire, x

34 votants:

12 <small>votants</small>	12 <small>votants</small>	10 <small>votants</small>	Points
A	B	C	3
B	x	A	2
C	A	B	1
x	C	x	0

Scores		Classement
A	68	<b>B</b>
B	70	A
C	42	C
x	24	x

**Bruno est élu!**

6 AD 2015

42

## Borda (manipulation)

4 candidats: Albert, Bruno, Claire, x  
34 votants:

12 votants	12 votants	10 votants	Points
A	B	C	3
x	x	x	2
B	A	A	1
C	C	B	0

Scores		Classement
A	58	<del>X</del>
B	48	A
C	30	B
x	68	C

6 AD 2015 **Le candidat « bidon » est élu!** ←

43

## Procédure 5 : Eliminations successives

- Procédure par tours.
- Principe :  
Eliminer à chaque tour le moins bon candidat, jusqu'à ce qu'il n'en reste plus qu'un.

6 AD 2015

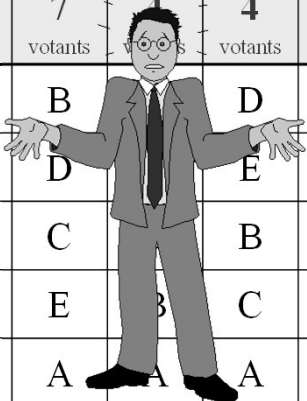
44

## En conclusion ?

5 candidats: Albert, Bruno, Claire, Diane, Eric

25 votants:

8 votants	7 votants	4 votants	2 votants
A	B	D	C
C	D	E	E
D	C	B	D
B	E	C	B
E	A	A	A



6 AD 2015

45

Majorité relative:

↳ **Albert** est élu

Procédure française:

↳ **Bruno** est élu

Procédure de Condorcet:

↳ **Claire** est élue

Procédure de Borda:

↳ **Diane** est élue

Eliminations successives:

↳ **Eric** est élu

## Kenneth Arrow (Nobel d'économie, 1972)

### • Théorème d'impossibilité (1952) :

Avec au moins 2 votants et 3 candidats, il est **impossible** de construire une procédure de vote satisfaisant simultanément les 5 propriétés suivantes :

- Non-dictature.
- Universalité.
- Indépendance vis-à-vis des tiers.
- Monotonicité.
- Non-imposition.

6 AD 2015

46

## Définition des critères

- Définition :  
fonction  $g$  définie sur  $A$ , à valeurs dans un ensemble totalement ordonné, représentant un objectif du décideur.
- Famille cohérente de critères :
  - représenter tous les aspects du problème, tous les objectifs du décideur,
  - éviter les redondances.

6 AD 2015

47

## Problématiques

	$g_1$	$g_2$	$g_3$	...
$a$	$g_1(a)$	$g_2(a)$	$g_3(a)$	...
$b$	$g_1(b)$	$g_2(b)$	$g_3(b)$	...
$c$	...			
...	...			

### Evaluations

- $n$  actions
- $k$  critères

- $\alpha$  - choix : déterminer un sous-ensemble d'actions (les « meilleures »).
- $\beta$  - tri : trier les actions dans des catégories pré-déterminées.
- $\gamma$  - classement : de la meilleure à la moins bonne action.
- $\delta$  - description : décrire les actions et leurs conséquences.

6 AD 2015

48



## Relation de Dominance et Efficacité

- « Objectif ».
- Principe d'unanimité :
 

$a \text{ domine } b \Leftrightarrow g_h(a) \geq g_h(b) \text{ pour tout } h$
- Efficacité :  $a$  est efficace si elle n'est dominée par aucune autre action.
- Problèmes :
  - Relation très pauvre (peu de dominances),
  - Beaucoup d'actions efficaces.

6 AD 2015

49

## Objections à la Dominance

I	$g_1$	$g_2$
$a$	100	100
$b$	20	30

II	$g_1$	$g_2$
$a$	100	30
$b$	20	100

III	$g_1$	$g_2$
$a$	100	99
$b$	20	100

- |   |  |  |
|---|--|--|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>a</math> efficace</li> <li>• <math>a</math> préférée à <math>b</math></li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>a</math> et <math>b</math> efficaces</li> <li>• <math>a</math> et <math>b</math> incompar.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>a</math> et <math>b</math> efficaces</li> <li>• <math>a</math> préférée à <math>b</math></li> </ul> |
|---|--|--|

IV	$g_1$	$g_2$
$a$	100	99
$b$	99	100

V	$g_1$	$g_2$
$a$	100	100
$b$	99	99

- |  |   |
|--|---|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>a</math> et <math>b</math> efficaces</li> <li>• <math>a</math> et <math>b</math> indiffér.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>a</math> efficace</li> <li>• <math>a</math> et <math>b</math> indiffér.</li> </ul> |
|--|---|

6 AD 2015

50

## Caractéristiques Souhaitées pour une bonne méthode multicritère

- Prendre en compte l'amplitude des écarts entre évaluations.
- Tenir compte des effets d'échelle.
- Construire un classement partiel ( $P, I, R$ ) ou complet ( $P, I$ ) des actions.
- Rester suffisamment simple :
  - pas de boîte noire,
  - pas de paramètres techniques.

6 AD 2015

51

## Une Approche Courante : La Somme Pondérée

Critères

	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$\dots$	
Actions ou Décisions	$a$	$g_1(a)$	$g_2(a)$	$g_3(a)$	$\dots$
	$b$	$g_1(b)$	$g_2(b)$	$g_3(b)$	$\dots$
	$c$	$\dots$			
	$\dots$	$\dots$			
Poids des critères		$w_1$	$w_2$	$w_3$	$\dots$

6 AD 2015

52

## Une Approche Courante : La Somme Pondérée

- Valeur globale de  $a$  :

$$V(a) = w_1 g_1(a) + w_2 g_2(a) + \dots$$

- $a$  est meilleure que  $b$  si :

$$V(a) > V(b)$$

(en supposant que tous les critères soient à maximiser)

6 AD 2015

53

## Somme Pondérée : Exemple 1

	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$	$g_5$
$a$	100	100	100	100	55
$b$	85	85	85	85	100
	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5

- $V(a) = 91$        $V(b) = 88$
- Compensation totale des points faibles par les points forts.

6 AD 2015

54

## Somme Pondérée : Exemple 2

	$g_1$	$g_2$
$a$	100	0
$b$	0	100
$c$	50	50
$d$	50	50
	1/2	1/2

- $V(a) = V(b) = V(c) = V(d) = 50$
- Elimination des conflits.

6 AD 2015

55

## Somme Pondérée : Exemple 3

*"Le bénéfice est environ 2 fois plus important  
que le gain de temps;  
0.7 pour le bénéfice et 0.3 pour le gain de temps.*

	$g_1$ (BF)	$g_2$ (min)
$a$	60	60
$b$	48	70
	0.7	0.3

$$V(a) = 60$$

$$V(b) = 54.6$$

$a$  est première.

6 AD 2015

56

## Somme Pondérée : Exemple 3

*"Le bénéfice est environ 2 fois plus important  
que le gain de temps;  
0.7 pour le bénéfice et 0.3 pour le gain de temps.*

	$g_1$ (FF)	$g_2$ (min)
<i>a</i>	10	60
<i>b</i>	8	70
	0.7	0.3

$$V(a) = 25$$

$$V(b) = 26.6$$

*b* est première.

6 AD 2015

57

## Somme Pondérée : Exemple 3

	$g_1$ (BF)	$g_2$ (min)
<i>a</i>	60	60
<i>b</i>	48	70
	0.7	0.3

$$V(a) = 60$$

$$V(b) = 54.6$$

*a* est première.

	$g_1$ (FF)	$g_2$ (min)
<i>a</i>	10	60
<i>b</i>	8	70
	0.7	0.3

$$V(a) = 25$$

$$V(b) = 26.6$$

*b* est première.

6 AD 2015

→ Signification des "poids" ! ←

58

## Aide à la Décision de Type Multicritère

- Théorie de l'utilité multiattribut.
- Méthodes de surclassement.
- Méthodes interactives.
- Programmation multiobjectif.
- ...

Depuis 1970, nombreux développements:  
conférences, articles, livres,  
applications, logiciels...

6 AD 2015

59

## Utilité Multi-attribut (MAUT)

- Critère unique de synthèse.

$$U(a) = U(g_1(a), g_2(a), \dots, g_k(a))$$

- Existence ?
- Construction ?
- Forme ?

→ additive ? 
$$U(a) = \sum_{j=1}^k U_j(g_j(a))$$

6 AD 2015

60

## Utilité Multi-attribut (MAUT)

- Mode de construction :
  - direct,
  - indirect.
- Exigeant vis-à-vis du décideur (quantité d'information vs fiabilité ?).
- Peu flexible (analyses de sensibilité).
- Très éloigné de la structure du problème de décision :  
multicritère → unicitère

6 AD 2015

61

## Méthodes de Surclassement

- Principe de majorité (vs unanimité pour la dominance)
- Comparaisons par paires des actions.
- Plus proche du problème de décision.
- Méthodes ELECTRE
- Méthodes PROMETHEE & GAIA

6 AD 2015

62

## Différentes Approches

Surclassement

	<u>Approche Unicritère</u>	<u>Somme pondérée</u>	<u>Comparaisons par paires</u>
<u>Bien-fondé</u>	Mathématique	Economique	Economique
<u>Compensation entre critères</u>	-	Totale	Partielle
<u>Echelles</u>	-	Liées aux poids des critères	Prises en compte
<u>Détection des conflits</u>	-	Non	Oui

6 AD 2015

63

## Méthodes d'Aide à la Décision

- Information supplémentaire :  
Perception des échelles  
Pondération des critères
- Procédure d'analyse :  
Approche prescriptive : **PROMETHEE**  
Approche descriptive : **GAIA**

6 AD 2015





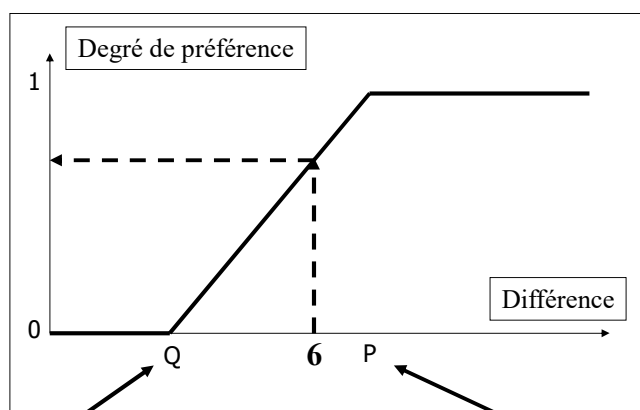
## Comparaison de 2 Actions

	Crit. 1 (/20)	Crit. 2 (cote)	Crit. 3 (appréc.)	Crit. 4 (O/N)	...
Action 1	18	135	B	Oui	...
Action 2	9	147	Différence = 6		...
Action 3	15	129	TB	Non	...
Action 4	12	146	TM	?	...
Action 5	7	121	B	Oui	...
...	...	...	...	...	...

6 AD 2015

65

## Fonctions de Préférence



Seuil d'indifférence

Linéaire

Seuil de préférence

6 AD 2015

66

# PROMETHEE

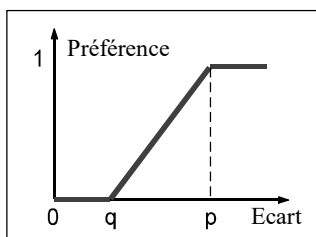
	Economic		Luxe 1	
<u>-230000</u>	250000	Prix	480000	
	50	Puissance	90	<u>+40</u>
<u>-1,0</u>	7,5	Consomm.	8,5	
	2	Habitabilité	4	<u>+2</u>
	1	Confort	5	<u>+4</u>

6 AD 2015



# PROMETHEE

	Economic		Luxe 1		
1,0	<u>-230000</u>	250000	Prix	480000	
		50	Puissance	90	<u>+40</u>
0,5	<u>-1,0</u>	7,5	Consomm.	8,5	
		2	Habitabilité	4	<u>+2</u>
		1	Confort	5	<u>+4</u>
					1,0
					0,5
					1,0

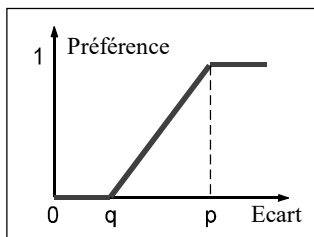


6 AD 2015

68

# PROMETHEE

Préf (Eco.,Lux.)		Economic		Luxe 1	Préf (Lux.,Eco.)	
1,0	-230000	250000	Prix	480000		0,0
0,0		50	Puissance	90	+40	1,0
0,5	-1,0	7,5	Consomm.	8,5		0,0
0,0		2	Habitabilité	4	+2	0,5
0,0		1	Confort	5	+4	1,0

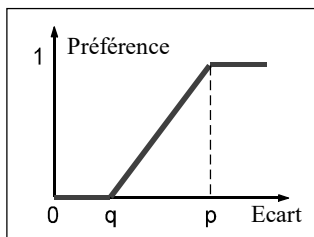


6 AD 2015

69

# PROMETHEE

Préf (Eco.,Lux.)		Economic		Luxe 1		Préf (Lux.,Eco.)	
1,0	-230000	250000	Prix	480000		0,0	1
0,0		50	Puissance	90	+40	1,0	1
0,5	-1,0	7,5	Consomm.	8,5		0,0	1
0,0		2	Habitabilité	4	+2	0,5	1
0,0		1	Confort	5	+4	1,0	1



$$\square \text{Préf (Eco.,Lux.)} = 0,3$$

$$= (1 + 0 + 0,5 + 0 + 0) / 5$$

$$\square \text{Préf (Lux.,Eco.)} = 0,5$$

$$= (0 + 1 + 0 + 0,5 + 1) / 5$$

6 AD 2015

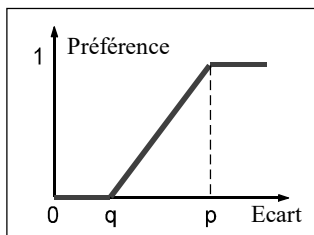
70

# PROMETHEE

Préf (Eco.,Lux.)

Préf (Lux.,Eco.)

		Economic		Luxe 1		Poids
1,0	-230000	250000	Prix	480000	0,0	2
0,0		50	Puissance	90	+40	1
0,5	-1,0	7,5	Consomm.	8,5		2
0,0		2	Habitabilité	4	+2	1
0,0		1	Confort	5	+4	1



$$\square \text{Préf (Eco.,Lux.)} = 0,43$$

$$= (2 \times 1 + 0 + 2 \times 0,5 + 0 + 0) / 7$$

$$\square \text{Préf (Lux.,Eco.)} = 0,36$$

$$= (0 + 1 + 0 + 0,5 + 1) / 7$$

6 AD 2015

71

## Comparaisons par Paires

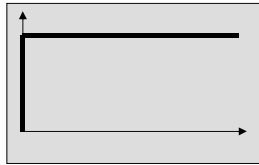
- Pour chaque critère  $g_j$  :
  - Fonction de préférence  $P_j$
  - Poids  $w_j$
- Degré de préférence multicritère de  $a$  sur  $b$  :

$$\pi(a,b) = \sum_{j=1}^k w_j P_j(a,b)$$

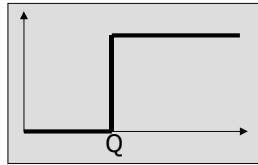
6 AD 2015

72

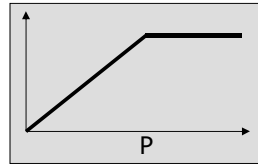
# Fonctions de Préférence



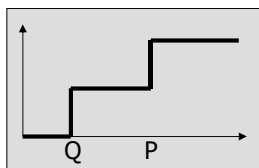
Critère usuel



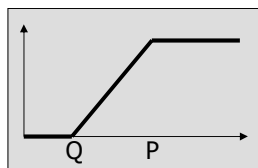
Critère en « U »



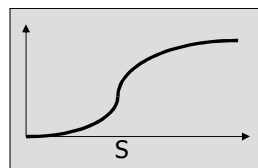
Critère en « V »



Critère à palier



Critère linéaire



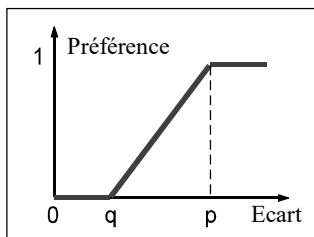
Critère Gaussien

6 AD 2015

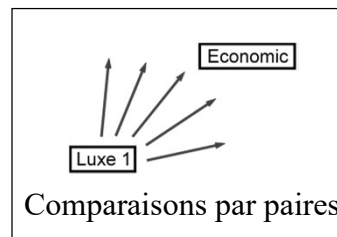
73

# PROMETHEE

Préf (Eco.,Lux.)	Economic		Luxe 1	Préf (Lux.,Eco.)	
1,0	-230000	250000	Prix	480000	0,0
0,0		50	Puissance	90	+40
0,5	-1,0	7,5	Consomm.	8,5	0,0
0,0		2	Habitabilité	4	+2
0,0		1	Confort	5	+4



6 AD 2015



74

## Matrice des $\pi(a,b)$

$\pi(a,b)$	<i>Moy.A</i>	<i>Sport</i>	<i>Moy.B</i>	<i>Lux.1</i>	<i>Econ.</i>	<i>Lux.2</i>	$\phi^-(a)$
<i>Moy.A</i>	0,00						
<i>Sport</i>		0,00					
<i>Moy.B</i>			0,00				
<i>Lux.1</i>				0,00	0,50		
<i>Econ.</i>				0,30	0,00		
<i>Lux.2</i>						0,00	
$\phi^-(a)$							
$\phi(a)$							

6 AD 2015

75

## Matrice des $\pi(a,b)$

$\pi(a,b)$	<i>Moy.A</i>	<i>Sport</i>	<i>Moy.B</i>	<i>Lux.1</i>	<i>Econ.</i>	<i>Lux.2</i>	$\phi^-(a)$
<i>Moy.A</i>	0,00	0,34	0,00	0,21	0,26	0,22	
<i>Sport</i>	0,20	0,00	0,16	0,24	0,30	0,24	
<i>Moy.B</i>	0,15	0,55	0,00	0,32	0,45	0,33	
<i>Lux.1</i>	0,18	0,45	0,10	0,00	0,50	0,15	
<i>Econ.</i>	0,20	0,34	0,14	0,30	0,00	0,35	
<i>Lux.2</i>	0,24	0,30	0,10	0,04	0,60	0,00	
$\phi^-(a)$							
$\phi(a)$							

6 AD 2015

76

## Calcul de $\phi^+(a)$

$\pi(a,b)$	<i>Moy.A</i>	<i>Sport</i>	<i>Moy.B</i>	<i>Lux.1</i>	<i>Econ.</i>	<i>Lux.2</i>	$\phi^+(a)$
<i>Moy.A</i>	0,00	0,34	0,00	0,21	0,26	0,22	0,21
<i>Sport</i>	0,20	0,00	0,16	0,24	0,30	0,24	0,23
<i>Moy.B</i>	0,15	0,55	0,00	0,32	0,45	0,33	0,36
<i>Lux.1</i>	0,18	0,45	0,10	0,00	0,50	0,15	0,28
<i>Econ.</i>	0,20	0,34	0,14	0,30	0,00	0,35	0,27
<i>Lux.2</i>	0,24	0,30	0,10	0,04	0,60	0,00	0,26
$\phi^-(a)$							
$\phi(a)$							

6 AD 2015

77

## Calcul de $\phi^+(a)$

$\pi(a,b)$	<i>Moy.A</i>	<i>Sport</i>	<i>Moy.B</i>	<i>Lux.1</i>	<i>Econ.</i>	<i>Lux.2</i>	$\phi^+(a)$
<i>Moy.A</i>	0,00	0,34	0,00	0,21	0,26	0,22	0,21
<i>Sport</i>	0,20	0,00	0,16	0,24	0,30	0,24	0,23
<i>Moy.B</i>	0,15	0,55	0,00	0,32	0,45	0,33	0,36
<i>Lux.1</i>	0,18	0,45	0,10	0,00	0,50	0,15	0,28
<i>Econ.</i>	0,20	0,34	0,14	0,30	0,00	0,35	0,27
<i>Lux.2</i>	0,24	0,30	0,10	0,04	0,60	0,00	0,26
$\phi^-(a)$							
$\phi(a)$							

6 AD 2015

78

## Calcul de $\phi^-(a)$

$\pi(a,b)$	<i>Moy.A</i>	<i>Sport</i>	<i>Moy.B</i>	<i>Lux.1</i>	<i>Econ.</i>	<i>Lux.2</i>	$\phi^-(a)$
<i>Moy.A</i>	0,00	0,34	0,00	0,21	0,26	0,22	0,21
<i>Sport</i>	0,20	0,00	0,16	0,24	0,30	0,24	0,23
<i>Moy.B</i>	0,15	0,55	0,00	0,32	0,45	0,33	0,36
<i>Lux.1</i>	0,18	0,45	0,10	0,00	0,50	0,15	0,28
<i>Econ.</i>	0,20	0,34	0,14	0,30	0,00	0,35	0,27
<i>Lux.2</i>	0,24	0,30	0,10	0,04	0,60	0,00	0,26
$\phi^-(a)$	0,19	0,40	0,10	0,22	0,42	0,26	
$\phi(a)$							

6 AD 2015

79

## Calcul de $\phi^-(a)$

$\pi(a,b)$	<i>Moy.A</i>	<i>Sport</i>	<i>Moy.B</i>	<i>Lux.1</i>	<i>Econ.</i>	<i>Lux.2</i>	$\phi^-(a)$
<i>Moy.A</i>	0,00	0,34	0,00	0,21	0,26	0,22	0,21
<i>Sport</i>	0,20	0,00	0,16	0,24	0,30	0,24	0,23
<i>Moy.B</i>	0,15	0,55	0,00	0,32	0,45	0,33	0,36
<i>Lux.1</i>	0,18	0,45	0,10	0,00	0,50	0,15	0,28
<i>Econ.</i>	0,20	0,34	0,14	0,30	0,00	0,35	0,27
<i>Lux.2</i>	0,24	0,30	0,10	0,04	0,60	0,00	0,26
$\phi^-(a)$	0,19	0,40	0,10	0,22	0,42	0,26	
$\phi(a)$							

6 AD 2015

80



## Calcul de $\phi(a)$

$\pi(a,b)$	<i>Moy.A</i>	<i>Sport</i>	<i>Moy.B</i>	<i>Lux.1</i>	<i>Econ.</i>	<i>Lux.2</i>	$\phi^+(a)$
<i>Moy.A</i>	0,00	0,34	0,00	0,21	0,26	0,22	0,21
<i>Sport</i>	0,20	0,00	0,16	0,24	0,30	0,24	0,23
<i>Moy.B</i>	0,15	0,55	0,00	0,32	0,45	0,33	0,36
<i>Lux.1</i>	0,18	0,45	0,10	0,00	0,50	0,15	0,28
<i>Econ.</i>	0,20	0,34	0,14	0,30	0,00	0,35	0,27
<i>Lux.2</i>	0,24	0,30	0,10	0,04	0,60	0,00	0,26
$\phi^-(a)$	0,19	0,40	0,10	0,22	0,42	0,26	
$\phi(a)$	0,02	-0,17	0,26	0,06	-0,15	0,00	

6 AD 2015

81

## Calcul de $\phi(a)$

$\pi(a,b)$	<i>Moy.A</i>	<i>Sport</i>	<i>Moy.B</i>	<i>Lux.1</i>	<i>Econ.</i>	<i>Lux.2</i>	$\phi^+(a)$
<i>Moy.A</i>	0,00	0,34	0,00	0,21	0,26	0,22	0,21
<i>Sport</i>	0,20	0,00	0,16	0,24	0,30	0,24	0,23
<i>Moy.B</i>	0,15	0,55	0,00	0,32	0,45	0,33	0,36
<i>Lux.1</i>	0,18	0,45	0,10	0,00	0,50	0,15	0,28
<i>Econ.</i>	0,20	0,34	0,14	0,30	0,00	0,35	0,27
<i>Lux.2</i>	0,24	0,30	0,10	0,04	0,60	0,00	0,26
$\phi^-(a)$	0,19	0,40	0,10	0,22	0,42	0,26	
$\phi(a)$	0,02	-0,17	0,26	0,06	-0,15	0,00	

6 AD 2015

82

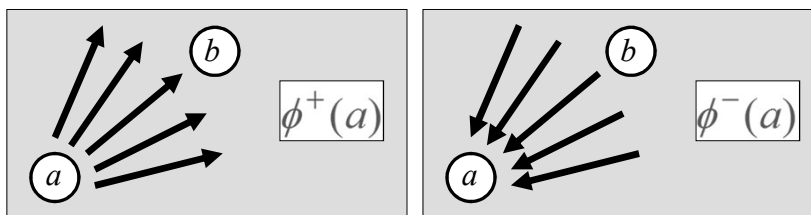
## Calcul des flux de préférence

$\pi(a,b)$	<i>Moy.A</i>	<i>Sport</i>	<i>Moy.B</i>	<i>Lux.1</i>	<i>Econ.</i>	<i>Lux.2</i>	$\phi^+(a)$
<i>Moy.A</i>	0,00	0,34	0,00	0,21	0,26	0,22	0,21
<i>Sport</i>	0,20	0,00	0,16	0,24	0,30	0,24	0,23
<i>Moy.B</i>	0,15	0,55	0,00	0,32	0,45	0,33	0,36
<i>Lux.1</i>	0,18	0,45	0,10	0,00	0,50	0,15	0,28
<i>Econ.</i>	0,20	0,34	0,14	0,30	0,00	0,35	0,27
<i>Lux.2</i>	0,24	0,30	0,10	0,04	0,60	0,00	0,26
$\phi^-(a)$	0,19	0,40	0,10	0,22	0,42	0,26	
$\phi(a)$	0,02	-0,17	0,26	0,06	-0,15	0,00	

6 AD 2015

83

## Flux de Préférence



- Flux sortant :  
(puissance)

$$\phi^+(a) = \frac{1}{n-1} \sum_{b \in A} \pi(a,b)$$

- Flux entrant :  
(faiblesse)

$$\phi^-(a) = \frac{1}{n-1} \sum_{b \in A} \pi(b,a)$$

- Flux net :

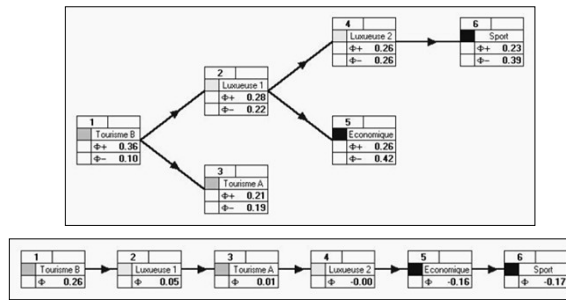
$$\phi(a) = \phi^+(a) - \phi^-(a)$$

6 AD 2015

84

# PROMETHEE

- Classer les décisions de la meilleure à la moins bonne
- Mettre en évidence les meilleurs compromis

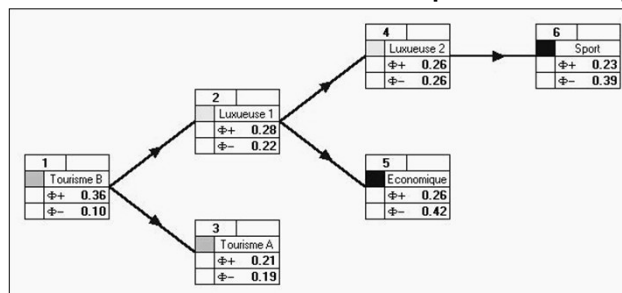


6 AD 2015

85

# PROMETHEE

- PROMETHEE I : classement partiel  $\phi^+, \phi^-$



- PROMETHEE II : classement complet  $\phi$

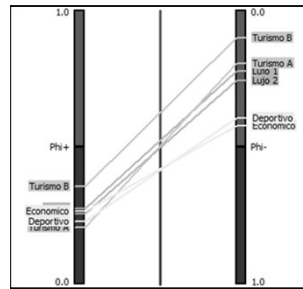
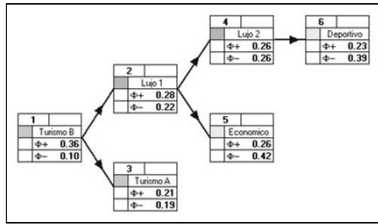


6 AD 2015

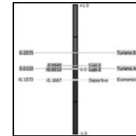
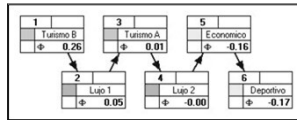
86

# PROMETHEE I & II

- PROMETHEE I : classement partiel -  $\phi^+$ ,  $\phi^-$



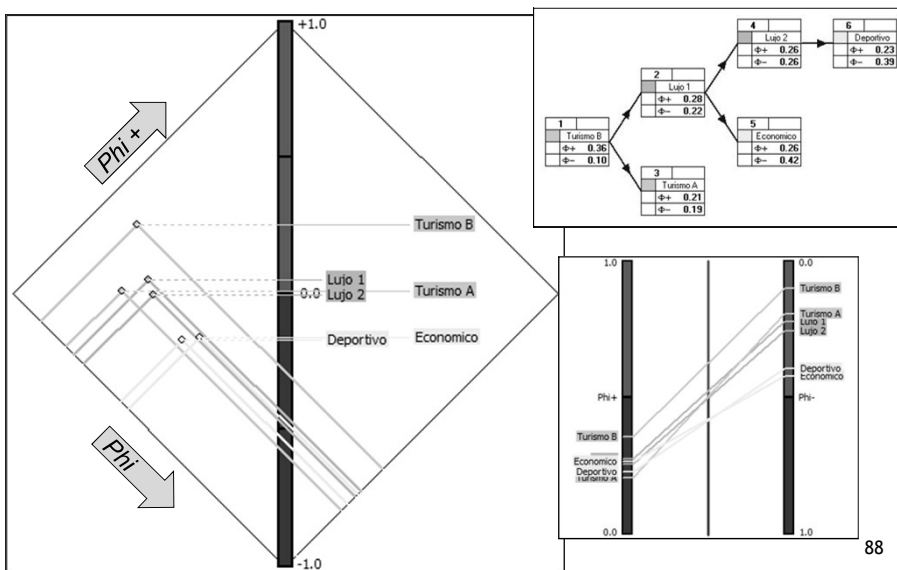
- PROMETHEE II : classement complet -  $\phi$



6 AD 2015

87

# Diamant PROMETHEE



88

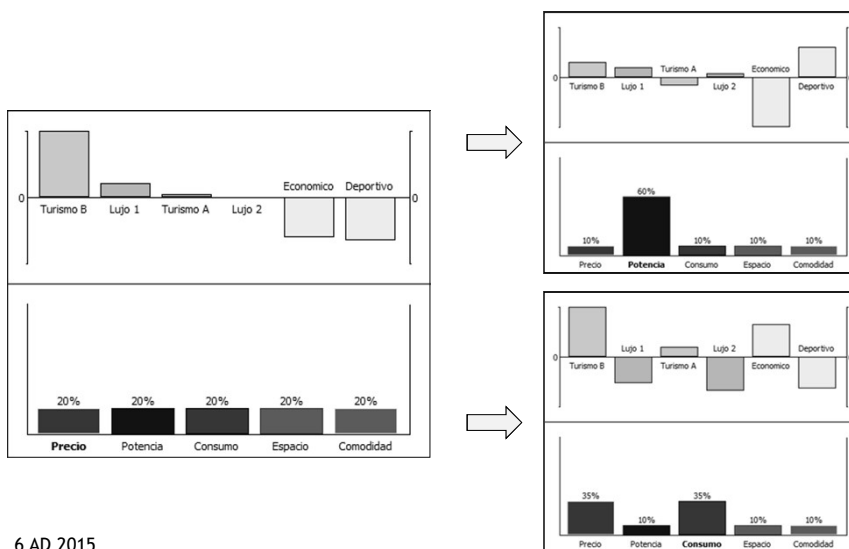
# Analyse de Sensibilité avec PROMETHEE

- Poids des critères  $\leftrightarrow$  classement PROMETHEE.
- Analyse de sensibilité interactive : « Walking Weights ».
- Robustesse par rapport aux poids ?
  - Intervalles de stabilité.
  - Intervalles de stabilité visuels.

6 AD 2015

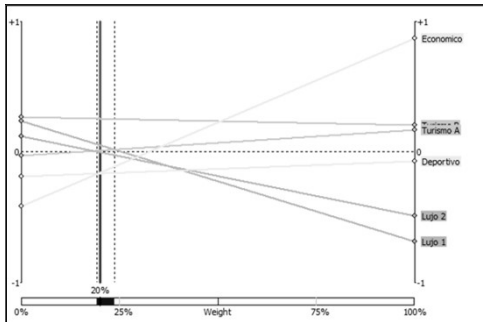
89

## Walking Weights



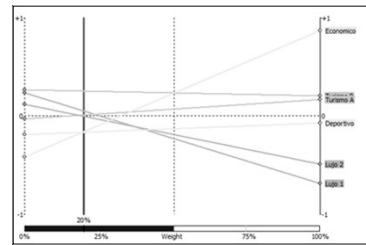
6 AD 2015

# Visual Stability Intervals

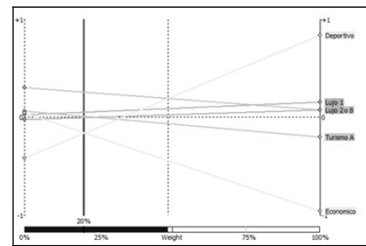


VSI pour « Prix » (niveau 6):  
[ 19.20% , 23.70% ]

6 AD 2015



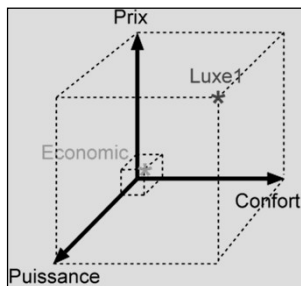
VSI pour « Prix » (niv. 1): [ 0.00% , 50.68% ]



VSI pour « Puissance » (niv. 1): [ 0.00% , 48.65% ]

91

# GAIA



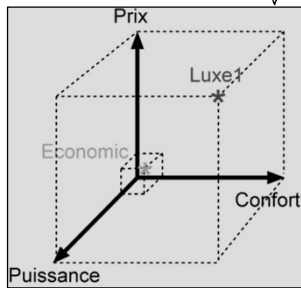
- Représentation graphique.
- 5 dimensions !

6 AD 2015

92

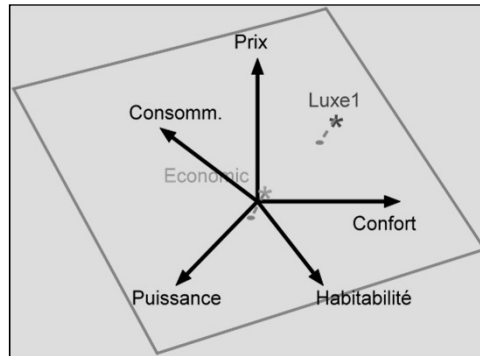
# GAIA

1. *Calcul des flux nets unicritères (normalisation)*
2. *Projection sur un plan :*



- Représentation graphique.
- 5 dimensions !

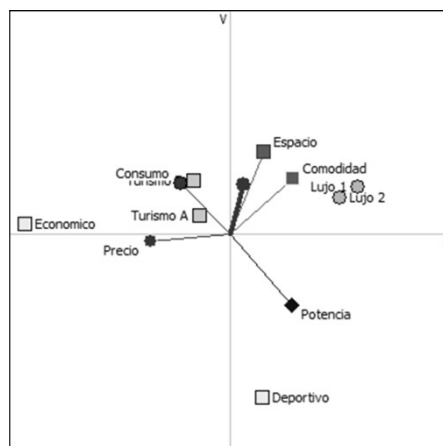
6 AD 2015



93

# GAIA

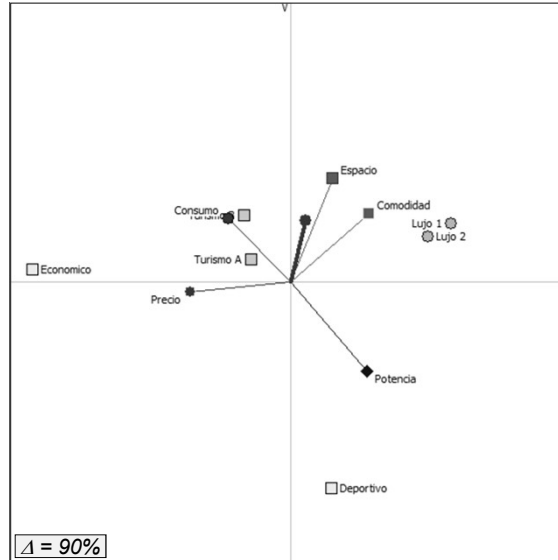
- Mettre en évidence les conflits entre critères.
- Identifier les compromis possibles.
- Aider à fixer les priorités.



6 AD 2015

94

# GAIA

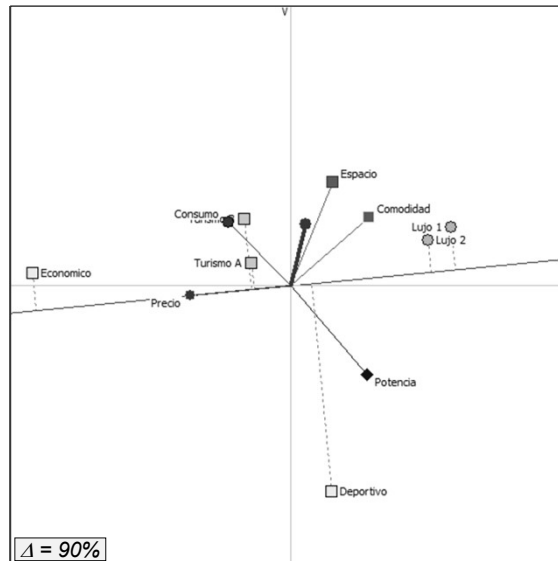


- *Actions :*  
*points*
- *Critères :*  
*axes*

6 AD 2015

95

# GAIA



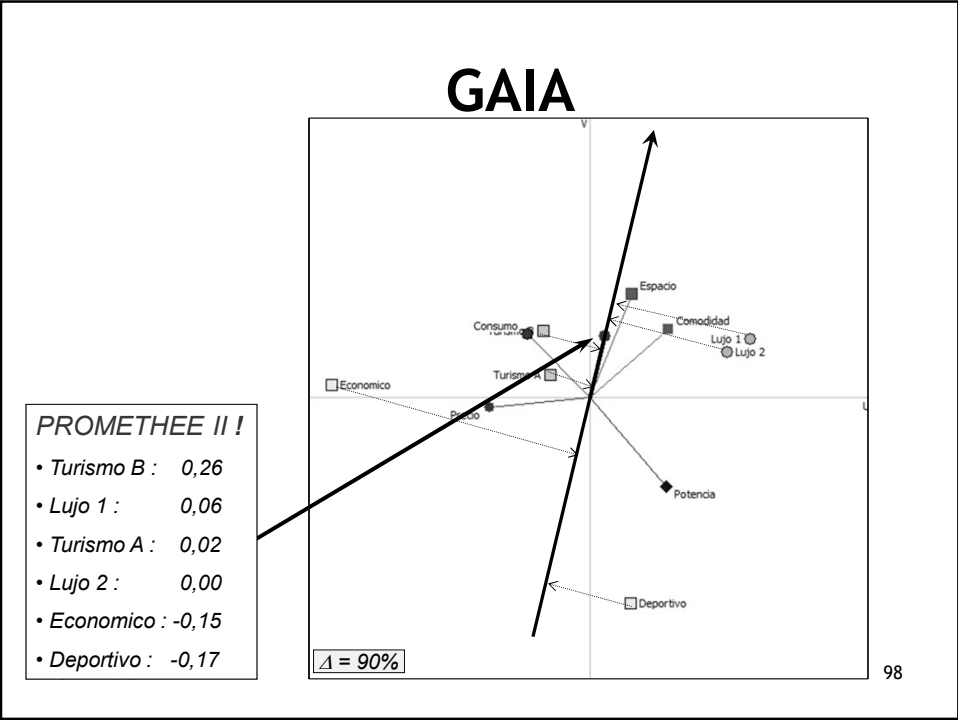
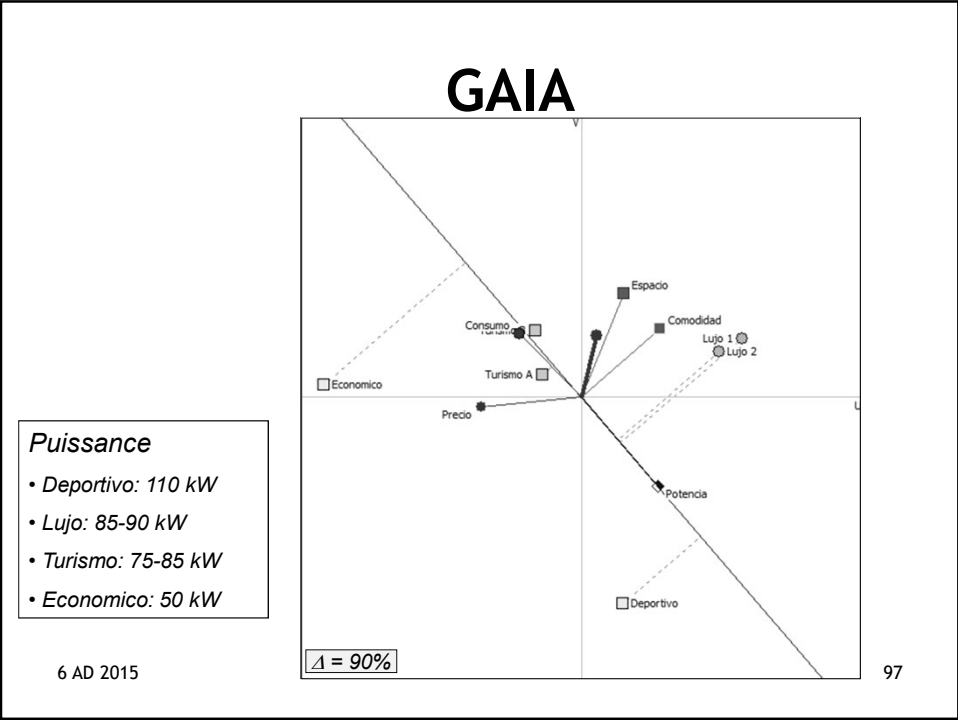
## Prix

- *Economico:* 15 k€
- *Turismo:* 25,5-26 k€
- *Deportivo:* 29 k€
- *Lujo:* 35-38 k€

6 AD 2015

96

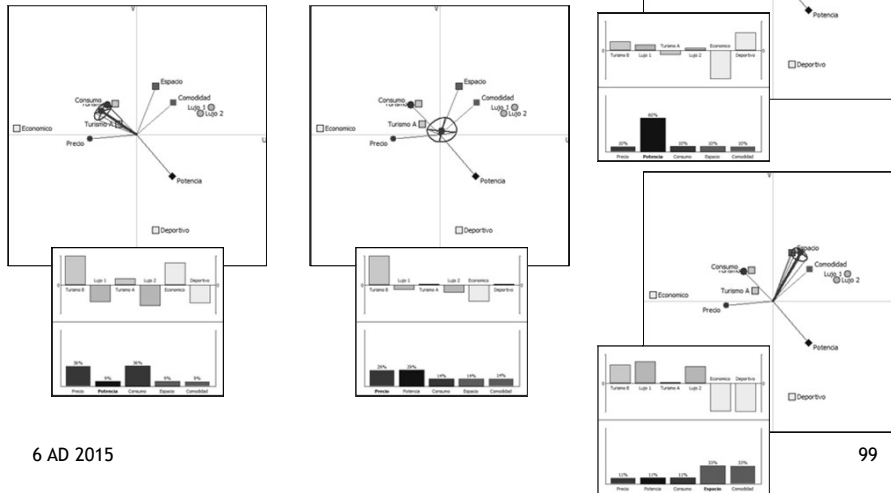




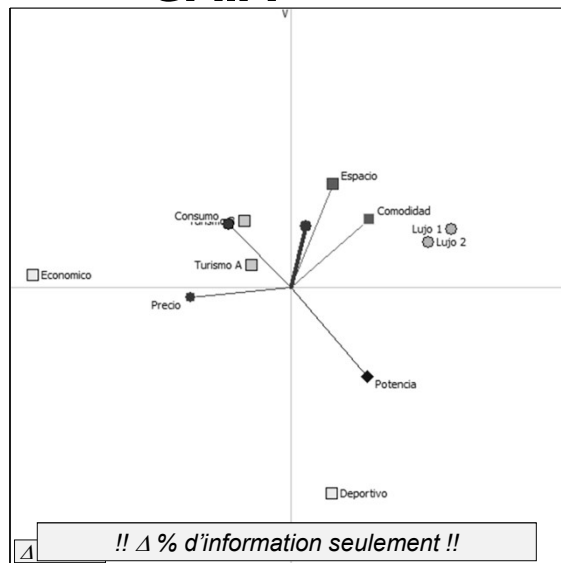
# GAIA-Brain

20 ans

35 ans



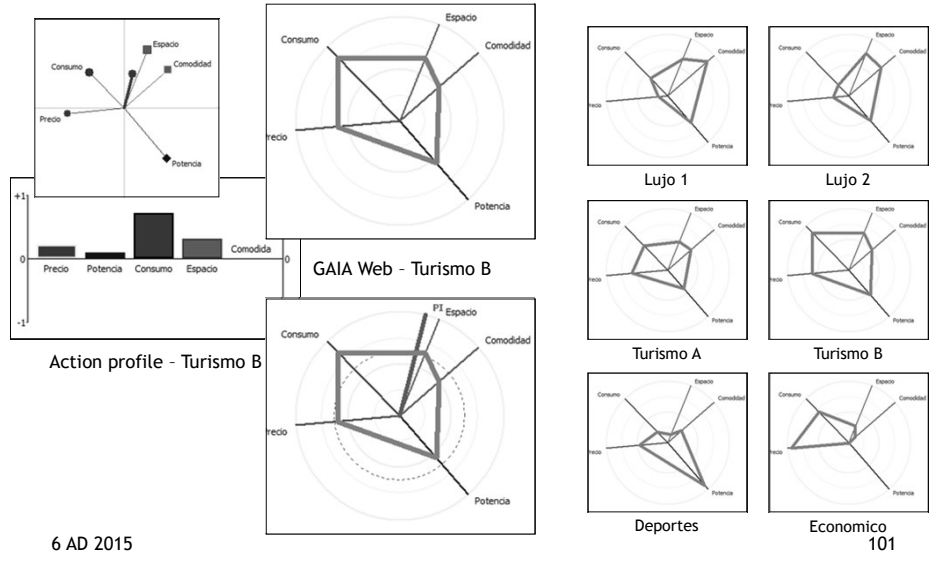
# GAIA



- *Actions :*  
*points*
- *Critères :*  
*axes*
- *Axe de décision*

6 AD 2015

# GAIA Webs



## Méthodes PROMETHEE & GAIA

- PROMETHEE : approche prescriptive
  - Classement partiel des actions
  - PROMETHEE I
  - Classement complet des actions
  - PROMETHEE II
- GAIA : approche descriptive
  - Identification des conflits entre critères.
  - Profils caractéristiques des actions.
  - Fixer les priorités, analyse de sensibilité.

## Exemple 2 : Localisation d'une usine

- Actions : 5 sites potentiels
- Critères :
  - $f_1$  : Coût (investissement)
  - $f_2$  : Coût (opérations)
  - $f_3$  : Emploi
  - $f_4$  : Transport
  - $f_5$  : Impact sur l'environnement
  - $f_6$  : Impact social

6 AD 2015

103

## Tableau d'Evaluation

	Investment	Operations	Employment	Transportation	Environment	Social
Min/Max	Minimize	Minimize	Minimize	Maximize	Minimize	Minimize
Weight	25.0000	15.0000	20.0000	20.0000	10.0000	10.0000
Preference Functi	Linear	Linear	Linear	Level	Level	Level
Indifference Thres	5.00 %	5.00 %	5.00 %	0.5000	0.5000	0.5000
Preference Thres	25.00 %	25.00 %	10.00 %	1.5000	1.5000	1.5000
Gaussian Thresh	-	-	-	-	-	-
Threshold Unit	Percent	Percent	Percent	Absolute	Absolute	Absolute
Unit	M\$	M\$	workers	5-point	Impact	Impact
Site 1	74.0000	12.0000	175.0000	Average	High	Low
Site 2	86.0000	9.0000	170.0000	Good	Low	Very Low
Site 3	89.0000	7.0000	145.0000	Very Good	Very Low	Moderate
Site 4	115.0000	8.0000	95.0000	Bad	Low	High
Site 5	128.0000	10.0000	110.0000	Good	Moderate	Very Low

- Critères à minimiser ou maximiser.
- Echelles différentes.
- Critères quantitatifs ou qualitatifs.

6 AD 2015

104

## Problèmes de Décision Mono- et Multidécideur

- Monodécideur :
  - Une seule partie prenante dans le processus.
  - Evaluations et structure de préférence uniques.
- Multidécideur :
  - Plusieurs parties prenantes.
  - Evaluations et structures de préférences multiples.
  - Recherche d'un consensus.

6 AD 2015

105

## Exemple

- Quatre parties prenantes (“décideurs”) :
  - Industriel,
  - Pouvoirs publics (région),
  - Associations de protection de l'environnement,
  - Syndicats.
- Quatre tableaux multicritères.

6 AD 2015

106

## Modèle Multi-scénarios

- Scénarios :
  - Points de vue,
  - Hypothèses de travail, ...
- Evaluations :
  - Critères 'objectifs' : évaluations communes.
  - Critères 'subjectifs' : évaluations particulières à chaque scénario.
- Structures de préférences différentes :
  - Poids, seuils de préférence.

6 AD 2015

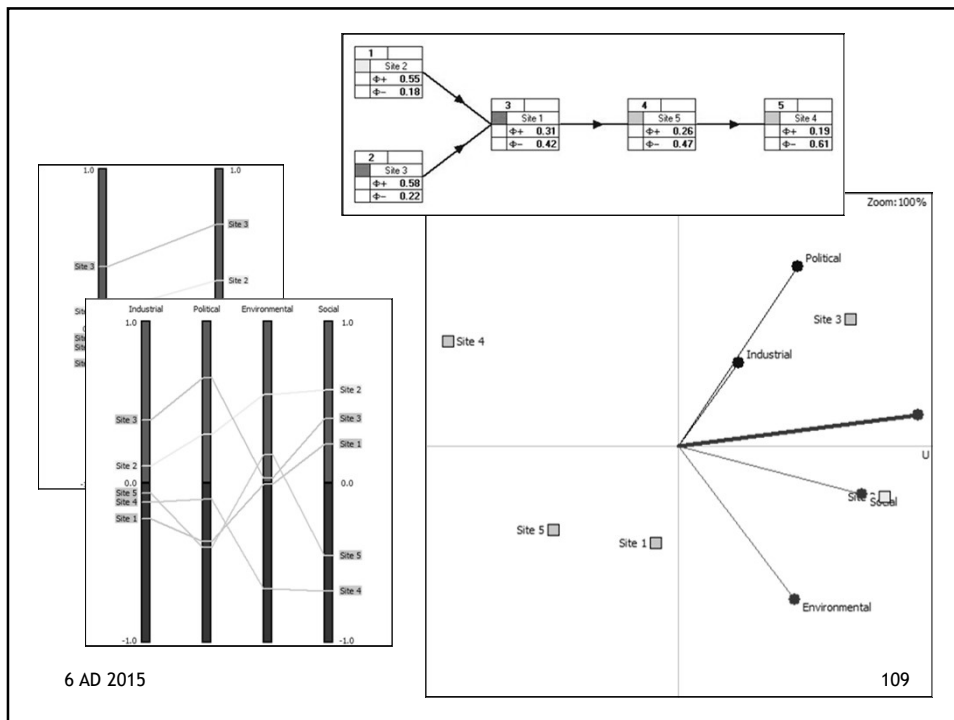
107

## Modèle Multi-scénarios

- Adaptation de PROMETHEE :
  - Classements individuels
  - Classements globaux (groupe) en tenant compte d'une pondération éventuelle des scénarios
- Adaptation de GAIA :
  - GAIA-Critères
  - GAIA-Scénarios
  - GAIA-Unicritère

6 AD 2015

108



## Visual PROMETHEE

[WWW.PROMETHEE-GAIA.NET](http://WWW.PROMETHEE-GAIA.NET)



- 3-level simple hierarchical criteria structure.
- New visual tools:
  - PROMETHEE rankings and Diamond,
  - Visual Weight Stability Intervals,
  - Decision-maker's Brain (PROMETHEE VI),
  - GAIA-3D,
  - GAIA-Webs and PROMap GIS integration,
  - Performance (input-output) analysis, ...

6 AD 2015

110

# PROMap

- *Intégration avec Google Maps :*



6 AD 2015



111

## Applications ULB

- Evaluation financière d'entreprises.
- Evaluation de la qualité des fournisseurs.
- Planification du parc de production d'Electrabel.
- Gestion de bassin versant.
- Evaluation de systèmes de traitement de déchets urbains.
- Applications environnementales.
- Aide au choix d'un antibiotique.
- ...

6 AD 2015

112



## Travail personnel

- Elaborer un problème de décision : min. 8 actions, 5 critères et 2 scénarios.
- Modéliser le problème avec PROMETHEE.
- Analyser le problème avec Visual PROMETHEE:
  - Classements PROMETHEE.
  - Analyse GAIA.
  - Analyse de sensibilité:
    - Poids des critères.
    - Différents scénarios.
  - Bonus: catégories, groupes, clusters, ...