BA3 EN SCIENCES MATHEMATIQUES
MATH-F-319 MATHEMATIQUE COMBINATOIRE
EXAMEN DU 19 AOUT 2010 (PARTIE AVEC DOCUMENTS)

20	30	30	20	100

NOM : **Prénom :**

VEILLEZ À SOIGNEUSEMENT JUSTIFIER VOS RÉPONSES !

---

1. **(20 points)** Soit A et B deux convexes quelconques de $\mathbb{R}^d$. Prouver

$$\operatorname{conv}(A \cup B) = \{\lambda p + \mu q \mid p \in A, q \in B, \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}, \lambda \geqslant 0, \mu \geqslant 0, \lambda + \mu = 1\} \ .$$

2. **(30 points)** Etant donnés deux polytopes P et Q de $\mathbb{R}^n$, considérons leur intersection $P \cap Q$ (qui est encore un polytope). Déterminez quelles affirmations parmi les suivantes sont vraies, en supposant $P \cap Q \neq \varnothing$.

a) Toute inégalité valide pour P est aussi valide pour $P \cap Q$.

b) Toute IDF de P est aussi IDF de $P \cap Q$.

c) Toute inégalité valide pour $P \cap Q$ est aussi valide pour P.

d) Toute IDF de $P \cap Q$ est aussi IDF de P.

e) Toute IDF de $P \cap Q$ est valide pour P ou pour Q.

f) Parmi les réponses aux sous-questions précédentes, lesquelles sont modifiées si l'on suppose que $P \cap Q$ engendre affinement $\mathbb{R}^n$?

3. **(30 points)** Soit $P \subseteq \mathbb{R}^4$ le polytope défini par

$$P := \operatorname{conv}\{(0,0,0,0),(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1),(1,1,1,1)\}\ .$$

a) Quelle est la dimension de P ?

b) Donner un système d'inégalités linéaires dans $\mathbb{R}^4$ dont l'ensemble des solutions est P.

c) Quels sont les sommets de P ?

d) Quelles sont les facettes de P ? (Donner des IDF correspondantes.)

4. (20 points) Soit $\mathcal{S} = \{X \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \forall c \in \mathbb{R}^2 : c^t X\, c \geqslant 0\}$ le cône des matrices réelles 2×2 semi-définies positives.

a) Expliquez comment chaque c de $\mathbb{R}^2$ livre une inégalité linéaire valide pour $\mathcal{S}$.

b) Considérons la matrice

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Déterminez un hyperplan de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ séparant strictement Y de $\mathcal{S}$.