40	30	30	100

BA3 EN SCIENCES MATHEMATIQUES
MATH-F-319 MATHEMATIQUE COMBINATOIRE
EXAMEN DU 23 JUIN 2010 (PARTIE AVEC DOCUMENTS)

NOM : **Prénom :**

VEILLEZ À SOIGNEUSEMENT JUSTIFIER VOS RÉPONSES !

---

1. (40 points) Soit $P \subseteq \mathbb{R}^4$ le polytope défini par

$$P := \text{conv}\{(0,0,0,0),(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1),(1,1,-1,-1)\}\ .$$

a) Quelle est la dimension de P ?

b) Donner un système d'inégalités linéaires <u>dans $\mathbb{R}^4$</u> dont l'ensemble des solutions est P.

c) Quels sont les sommets de P ?

d) Quelles sont les facettes de P ? (Donner des IDF correspondantes.)

2. **(30 points)** Soit P un polytope de $\mathbb{R}^d$, de dimension pleine. Montrer que toute face de P de dimension $i \in \{-1, \ldots, d-1\}$ peut être obtenue comme l'intersection d'exactement $d-i$ facettes.

3. **(30 points)** Pour $n \geqslant 1$, considérons le permutoèdre

$$P_n := \operatorname{conv}\{(\sigma(1), \ldots, \sigma(n)) \in \mathbb{R}^n \mid \sigma \in \operatorname{Sym}(n)\} \; .$$

a) Tout point de la forme $(\sigma(1), \ldots, \sigma(n))$ où $\sigma \in \operatorname{Sym}(n)$ est un sommet de P_n. Montrer ceci en donnant une inégalité valide définissant la face correspondante.

b) Supposons $n \geqslant 2$. Montrer que toute facette de P_n est affinement isomorphe au produit $P_{n_1} \times P_{n_2}$ pour certains $n_1, n_2 \in \mathbb{N}_0$ tels que $n_1 + n_2 = n$.

c) Montrer comment ceci se généralise à toute face non vide de P_n. En particulier, donner une caractérisation des faces de dimension 2 de P_n pour $n \geqslant 3$.