| 9 | 6 | 12 | 12 | 12 | 10 | 9 | 30 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | |

**BA2 EN SCIENCES MATHEMATIQUES**
**MATH-F-206 MATHEMATIQUE COMBINATOIRE**
**INTERRO 'BIDON' EN DECEMBRE 2005** (PARTIE SANS DOCUMENT)
**NOM :** **Prénom :**

1. Dans $\mathbb{R}^3$, décrivez analytiquement (c.-à-d. en donnant une CNS pour l'appartenance d'un point $(x, y, z)$) l'enveloppe convexe de
   a) la paire de points $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$

   $\begin{cases} z = 0 \\ x + y = 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$

   b) la réunion des deux segments $[(0, 0, 0), (0, 0, 1)]$ et $[(0, 1, 0), (1, 1, 0)]$

   $\begin{cases} z \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y - x \geq 0 \\ -y - z \geq -1 \end{cases}$

   c) la réunion des deux droites $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

   $0 < y < 1$

   ou

   $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

   ou

   $\begin{cases} y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

2. Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre $t$ le point $(1, 2, t)$ est-il dans l'enveloppe affine des trois points $(3, 3, 0)$, $(-5, 0, 0)$ et $(4, 0, 4)$ ?

   $t = \frac{8}{27}$

   Et dans l'enveloppe convexe de ces mêmes trois points ?

   $t = \frac{8}{27}$

3. Donnez l'équation d'un hyperplan séparant (c.-à-d. séparant faiblement) les deux ensembles $A$ et $B$ indiqués, ou bien écrivez "n'existe pas" :
   a) Dans $\mathbb{R}^2$, soit $A = (\mathbb{R}^+)^2$ et $B = (\mathbb{R}^-)^2$ :

   (Par exemple :) $x + y = 0$

   b) Dans $\mathbb{R}^2$, soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ et } y \geq \frac{1}{x}\}$ et $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ et } y \leq -\frac{1}{x}\}$

   $y = 0$ (unique solution !)

   c) Dans $\mathbb{R}^3$, soit $A = \text{aff}\{(1, 0, 0), (1, 1, 1)\}$ et $B = \text{aff}\{(0, 1, -1), (0, 1, 1)\}$

   $x = 1$ par exemple
   (en général : $x = k$ avec $0 \leq k \leq 1$)

**d)** Dans $\mathbb{R}^3$, soit $A$ la boule de centre $o$ et de rayon 1 et $B$ la droite $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

$x = 1$ (unique solution)

4. L'ensemble des points $(x, y)$ du plan satisfaisant

$$\begin{cases} x + y \geq -2 \\ x + 2y \geq -1 \\ y \geq 0 \\ -x + 2y \geq -1 \\ -x + y \geq -2 \end{cases}$$

est-il

- un ensemble polyédrique ? (OUI ou NON) oui
- un polytope ? (OUI ou NON) non

Quels sont ses points exposés ?

$(-3,1)$, $(-1,0)$, $(1,0)$, $(3,1)$

et ses faces ?

a) $\begin{cases} x + y = -2 \\ x \leq -3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = 0 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} -x + 2y = 1 \\ 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ -3 \leq x \leq -1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} -x + y = -2 \\ x \geq 3 \end{cases}$

Quel est son cône caractéristique ?

$\mathrm{pos}(\{(-1,1), (1,1)\})$

(ou) $\begin{cases} -x + y \geq 0 \\ x + y \geq 0 \end{cases}$

5. Donnez deux définitions bien distinctes d'un polytope convexe.

Enveloppe convexe d'un ensemble fini de points d'un espace affin réel

Ensemble des points de $\mathbb{R}^d$ satisfaisant un système d'inégalités linéaires, cet ensemble étant de plus borné

(ou) Intersection bornée d'un nombre fini de demi-espaces fermés

6. Combien de facettes possède le polytope cyclique $C_d(d+1)$ ? $\boxed{d+1}$

7. Donnez un exemple de polytope tridimensionnel ayant

- plus de sommets que de facettes $\boxed{\text{un cube}}$

- plus de facettes que de sommets $\boxed{\text{un octaèdre}}$

8. Voici un espace $(E, \mathcal{B})$ de blocs (ou hypergraphe) :

$$\begin{aligned} E &= \{a, b, c, d\} \\ \mathcal{B} &= \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\}. \end{aligned}$$

Désignons par $P$ le polytope défini à partir de $(E, \mathcal{B})$, c'est-à-dire : $P$ est l'enveloppe convexe dans $\mathbb{R}^E$ des vecteurs caractéristiques des éléments de $\mathcal{B}$. Veillez à justifier vos réponses aux questions suivantes !

a) Quelle est la dimension de $P$ ?
b) Quels sont les sommets de $P$ ?
c) L'inégalité $x_a \geq 0$ définit-elle une facette de $P$ ?
d) Même question pour l'inégalité $x_a \leq 1$.
e) Quelles sont toutes les facettes de $P$ ?

Par définition, $P$ est l'enveloppe convexe des vecteurs caractéristiques des éléments de $\mathcal{B}$, c'est-à-dire des 6 vecteurs

$$(1,1,0,0), \quad (1,0,1,0), \quad (1,0,0,1), \quad (0,1,1,0), \quad (0,1,0,1), \quad (0,0,1,1).$$

pris dans l'espace $\mathbb{R}^E$ (nous écrivons les coordonnées dans l'ordre naturel $x_a, x_b, x_c, x_d$). Les 6 vecteurs sont dans l'hyperplan d'équation $x_a + x_b + x_c + x_d = 2$, donc dans un espace tridimensionnel. Translations les vecteurs (et le polytope donc) en ajoutant $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Les 6 vecteurs résultant

$$(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}), \ (\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}), \ \text{etc.}$$

sont deux à deux opposés. Notons-les $\pm b_1, \pm b_2, \pm b_3$. Il est facile de voir que $b_1, b_2, b_3$ sont linéairement indépendants. Ainsi $P$ est un octaèdre et les réponses sont évidentes :

a) 3
b) les 6 vecteurs $(1,1,0,0), \dots (0,0,1,1)$
c) oui, elle est valide en chacun des sommets et satisfaite avec égalité par 3 sommets affinement indépendants

d) Même argument, donc oui
e) L'octaèdre a 8 facettes, qui sont donc ici
$x_a \geq 0, \quad x_b \geq 0, \quad x_c \geq 0, \quad x_d \geq 0$
$x_a \leq 1, \quad x_b \leq 1, \quad x_c \leq 1, \quad x_d \leq 1.$