25	25	25	25	100

BA2 EN SCIENCES MATHEMATIQUES
MATH-F-206 MATHEMATIQUE COMBINATOIRE
EXAMEN DU 23 JANVIER 2006 (PARTIE AVEC DOCUMENT)
NOM : **Prénom :**

Veillez à soigneusement justifier vos réponses !

---

1. Dans $\mathbb{R}^d$, un *semi-espace* en le point p est un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^d$ maximal pour la propriété d'éviter p.

Tout sous-ensemble convexe C de $\mathbb{R}^d$ est-il intersection de semi-espaces ?

2. Soit S l'ensemble des sommets d'un polytope P de $\mathbb{R}^d$. Un sous-ensemble T de S est dit *facial* si T est l'ensemble des sommets d'une face de P. Quelles implications parmi les suivantes sont toujours vraies ?

a) T facial $\Longrightarrow$ $\mathrm{conv}\,(T) \cap \mathrm{conv}(S \setminus T) = \varnothing$.

b) $\mathrm{conv}\,(T) \cap \mathrm{conv}(S \setminus T) = \varnothing$ $\Longrightarrow$ T facial.

c) T facial $\Longrightarrow$ $\mathrm{aff}\,(T) \cap \mathrm{conv}(S \setminus T) = \varnothing$.

d) $\mathrm{aff}\,(T) \cap \mathrm{conv}(S \setminus T) = \varnothing$ $\Longrightarrow$ T facial.

3.

a) L'image d'un polytope par une application linéaire est-elle toujours un polytope ?

b) L'image réciproque d'un polytope par une application linéaire est-elle toujours un polytope ?

c) Les réponses aux deux questions précédentes sont-elles modifiées si “application linéaire” est remplacé par “application affine” ?

4. Considérons le polytope cyclique $C_4(n)$ de dimension 4 à n sommets, en supposant $n \geq 6$.

Ce polytope admet-il une arête contenue dans exactement

a) 3 facettes ?

b) 4 facettes ?

c) $n - 2$ facettes ?

Correction (de la partie avec documents)

Convention de notation : $\subseteq$ inclusion large, $\subsetneq$ inclusion stricte.

1. **Idée de la réponse** : on va tout d'abord montrer que si p n'appartient pas à C, il existe un semi-espace $S(p)$ en p qui contient C. Etant donné que p n'appartient pas à $S(p)$ par la définition même de semi-espace, et que C est inclus à $S(p)$ par construction, l'intersection des ensembles $S(p)$ pour $p \in \mathbb{R}^d \setminus C$ doit être égale à C. Donc tout sous-ensemble convexe C est bien une intersection de semi-espaces.

Pour démontrer qu'il existe un semi-espace en p contenant C, on utilise le lemme de Zorn. Ce lemme garantit l'existence d'éléments maximaux dans certains ensembles partiellement ordonnés (le plus souvent infinis). L'ensemble partiellement ordonné à considérer dans ce cas-ci est la collection $\mathcal{S}$ des sous-ensembles convexes de $\mathbb{R}^d$ contenant C et évitant p, ordonnée par l'inclusion $\subseteq$. Notez que tout élément maximal de $\mathcal{S}$ est un semi-espace en p qui contient C.

Pour pouvoir recourir au lemme de Zorn, il faut vérifier la condition d'application de ce lemme. A savoir, il faut vérifier que toute chaîne de $\mathcal{S}$ possède un majorant. Pour rappel, une chaîne est une partie totalement ordonnée. Considérons donc une chaîne $\mathcal{A}$ de $\mathcal{S}$. Le truc est de considérer l'ensemble $X = \cup\{A \mid A \in \mathcal{A}\} = \cup\mathcal{A}$, la réunion de tous les éléments de la chaîne. Cet ensemble contient C et ne contient pas p car tous les éléments de $\mathcal{A}$ contiennent C et aucun ne contient p. En outre, l'ensemble X est convexe car si q et r sont deux points de X alors, $q \in A$ pour un certain $A \in \mathcal{A}$ et $r \in B$ pour un certain $B \in \mathcal{A}$. Etant donné que $\mathcal{A}$ est une chaîne, donc est totalement ordonnée, on a $A \subseteq B$ ou $B \subseteq A$. Comme les deux cas sont symétriques, on peut supposer que $A \subseteq B$ sans perte de généralité. Alors q et r sont tous les deux des éléments de B, qui est convexe, donc le segment $[q, r]$ est entièrement contenu dans B. Par conséquent, $[q, r]$ est entièrement contenu dans X. Ceci montre que X est convexe. L'ensemble X appartient donc à $\mathcal{S}$. Le lemme de Zorn s'applique donc et implique l'existence d'un semi-espace en p contenant C.

On est maintenant en mesure de montrer que tout sous-ensemble convexe C de $\mathbb{R}^d$ est l'intersection de semi-espaces. Pour tout point $p \in \mathbb{R}^d \setminus C$, notons $S(p)$ un semi-espace en p contenant C (qui existe par le paragraphe précédent). Alors on a l'égalité suivante :

$$C = \bigcap_{p \in \mathbb{R}^d \setminus A} S(p).$$

2. **Idée de la réponse** : on voit assez facilement que b) est fausse. De plus, si c) est vraie alors a) l'est aussi puisque $\operatorname{conv}(T) \subseteq \operatorname{aff}(T)$. On va démontrer que c) est vraie. Intuitivement, c'est clair. Une face F du polytope P est l'intersection de P et d'un hyperplan d'appui H. L'enveloppe affine de F est contenue dans H et le reste du polytope dans un des demi-espaces ouverts déterminés par H. La dernière implication, c'est-à-dire l'implication d), s'avère être vraie. Sa démonstration est plus difficile (c'est pourquoi on a donné trois démonstrations différentes ci-dessous).

---

a) est vraie car c) l'est et car $\operatorname{conv}(T) \subseteq \operatorname{aff}(T)$.

b) est fausse. Par exemple, si $d = 2$, $S = \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}$, $P = \operatorname{conv}(S)$ et $T = \{(0,0), (1,0), (0,1)\} = S \setminus \{(1,1)\}$ alors $\operatorname{conv}(T) \cap \operatorname{conv}(S \setminus T) = \varnothing$ mais T n'est pas facial. On construit facilement d'autres contre-exemples en retirant un sommet quelconque à l'ensemble des sommets d'un polytope quelconque (pour autant que ce ne soit pas une pyramide).

c) Supposons T facial. Alors $F = \mathrm{conv}\,(T)$ est une face de P avec $T = \mathrm{vert}\,(F) = F \cap \mathrm{vert}\,(P)$. Soit H un hyperplan d'appui tel que $F = H \cap P$. Notons $H^{\geq}$ le demi-espace fermé déterminé par H contenant P et $H^{>} = H^{\geq} \setminus H$ le demi-espace ouvert correspondant. Alors : (i) $T \subseteq H$ et (ii) $S \setminus T \subseteq H^{>}$ car sinon il y aurait un sommet $s \in S \setminus T$ sur H et dans ce cas $s \in H \cap P = F$ donc $s \in \mathrm{vert}\,(P) \cap F = \mathrm{vert}\,(F) = T$, une contradiction ! Il s'ensuit : (i) $\mathrm{aff}\,(T) \subseteq H$ car H est un sous-espace affin contenant T, (ii) $\mathrm{conv}\,(S \setminus T) \subseteq H^{>}$ car $H^{>}$ est un convexe contenant $S \setminus T$. Par conséquent, $\mathrm{aff}\,(T) \cap \mathrm{conv}\,(S \setminus T) = \varnothing$ et c) est vraie.

d) est vraie. En effet, supposons que $\mathrm{aff}\,(T)$ et $\mathrm{conv}\,(S \setminus T)$ sont disjoints. Notons Q le polytope $\mathrm{conv}\,(S \setminus T)$. Ce polytope est contenu dans P et son ensemble de sommets est $S \setminus T$. Si T est vide ou un singleton alors T est facial par définition. Sinon $\mathrm{aff}\,(T)$ contient une droite. Par un théorème de séparation vu au cours, il existe un hyperplan H séparant (faiblement) les convexes $\mathrm{aff}\,(T)$ et Q, car ils sont disjoints. Nécessairement, H est parallèle à $\mathrm{aff}\,(T)$. En translatant H si nécessaire, on peut supposer que H contient $\mathrm{aff}\,(T)$. Si H ne contient aucun point de $S \setminus T$ alors c'est gagné : $H \cap P$ est une face de P dont l'ensemble des sommets est T. En général, il est possible qu'un ou plusieurs point(s) de $S \setminus T$ soient sur H. Il faut donc trouver un moyen de contourner ce problème.

Fin de la preuve #1. (**Idée** : On va "épaissir" un peu Q et réappliquer le théorème de séparation.)

La fonction de Q dans $\mathbb{R}^+$ associant à tout point $q \in Q$ sa distance $d(q, \mathrm{aff}\,(T))$ à $\mathrm{aff}\,(T)$ est continue et ne s'annule jamais. Etant donné que Q est compact, il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que $d(q, \mathrm{aff}\,(T)) > \varepsilon$ pour tout $q \in Q$. Ceci implique que l'ensemble

$$Q_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^d \mid d(x, Q) < \varepsilon\}$$

est disjoint de $\mathrm{aff}\,(T)$. De plus, cet ensemble est convexe car $Q_\varepsilon = Q + B(o, \varepsilon)$ (en français, Q_ε est la somme de Minkowski de Q et d'une boule ouverte centrée en l'origine o de rayon ε). Au lieu de prendre n'importe quel hyperplan H séparant $\mathrm{aff}\,(T)$ et Q, choisissons-le de telle sorte qu'il sépare aussi $\mathrm{aff}\,(T)$ et Q_ε (on suppose toujours que H contient $\mathrm{aff}\,(T)$). Alors H ne contient aucun point de $S \setminus T$ et d) est démontrée, par ce qui précède.

Fin de la preuve #2. (**Idée** : on va "faire tourner" H autour de $\mathrm{aff}\,(T)$ de sorte à obtenir un hyperplan contenant $\mathrm{aff}\,(T)$ et disjoint de Q).

Soit f une forme affine telle que $f(x) = 0$ pour tout $x \in H$. Etant donné que Q est contenu dans des demi-espaces fermés déterminés par H, on peut supposer que $f(x) \leq 0$ pour tout $x \in Q$, quitte à multiplier f par -1. Comme $\mathrm{aff}\,(T)$ est contenu dans H, on a aussi $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathrm{aff}\,(T)$. Par hypothèse, $\mathrm{aff}\,(T)$ et Q sont disjoints, donc $\mathrm{aff}\,(T)$ et $H \cap Q$ sont deux convexes disjoints de l'hyperplan H. En appliquant le même théorème de séparation que plus haut au sein de l'hyperplan H, on voit qu'il existe un hyperplan I de H (donc un sous-espace de dimension $d-2$ de $\mathbb{R}^d$) séparant $\mathrm{aff}\,(T)$ et $H \cap Q$ dans H. Soit J n'importe quel hyperplan contenant I et distinct de H, et soit g une forme affine g telle que $g(x) = 0$ pour tout $x \in J$. On peut choisir g de telle sorte que $g(x) \leq 0$ pour tout $x \in H \cap Q$. Maintenant, si $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit, la forme affine $h = f - \varepsilon g$ est telle que $h(x) = 0$ pour tout $x \in \mathrm{aff}\,(T)$ et $h(x) < 0$ pour tout $x \in Q = \mathrm{conv}\,(S \setminus T)$. Elle définit donc une face de P dont l'ensemble des sommets est exactement T. En conclusion, d) est vraie.

Fin de la preuve #3. (**Idée** : utiliser une projection pour se ramener au cas où T est un singleton.) Après un changement de repère, on peut supposer que $\mathrm{aff}\,(T)$ est le sous-espace vectoriel

$$W_1 = \{x \in \mathbb{R}^d : x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0\},$$

pour un certain entier k entre 1 et $d-1$. Considérons maintenant le sous-espace complémentaire à W_1 :

$$W_2 = \{x \in \mathbb{R}^d : x_{k+1} = x_{k+1} = \cdots = x_d = 0\}.$$

Projetons maintenant l'entièreté de la configuration orthogonalement sur W_2. L'image de $W_1 = \mathrm{aff}\,(T)$ par cette projection est l'origine o et l'image de Q est un polytope disjoint de o, notons-le R. Alors il existe un hyperplan K de W_2 par o et disjoint de R. Redéfinissons maintenant H comme l'image inverse de K par la projection orthogonale sur W_2. Alors ce nouvel hyperplan H contient $\mathrm{aff}\,(T)$ et est disjoint de Q. Ceci montre que d) est vraie.

3. **Idée de la réponse** : un polytope peut être défini de deux manières équivalentes. Soit comme enveloppe convexe d'un nombre fini de points, soit comme l'intersection bornée d'un nombre fini de demi-espaces. Certains résultats se démontrent plus facilement avec la première définition, certains autres avec la deuxième. Pour cet exercice il est plus facile d'utiliser la première définition car elle se combine bien avec le “caractère linéaire” des applications considérées.

---

a) Soit A une application linéaire de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^e$ et $P = \mathrm{conv}\,(X)$ un polytope dans $\mathbb{R}^d$. Alors :

$$A(P) = A(\mathrm{conv}\,(X)) = \mathrm{conv}\,(A(X)).$$

La dernière égalité se justifie de la manière suivante. Si $q = \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i$ est une combinaison convexe de points de X alors son image

$$A(q) = A(\sum_{i=1}^n \lambda_i p_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i A(p_i)$$

est une combinaison convexe de points de $A(X)$. De manière similaire, toute combinaison convexe de points de $A(X)$ est l'image par A d'une combinaison convexe de points de X. Donc on a bien $A(\mathrm{conv}\,(X)) = \mathrm{conv}\,(A(X))$. En particulier, $A(P)$ est un polytope.

b) Soit $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x_1, x_2) \mapsto x_1$ et $P = [0,1]$. Alors P est un polytope dans $\mathbb{R}$ dont l'image inverse par A est

$$A^{-1}(P) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in [0,1]\},$$

qui n'est manifestement pas un polytope (par exemple, parce que c'est un ensemble non borné).

c) Non car les raisonnements de la question a) sont valides pour n'importe quelle application affine A et le contre-exemple de la question b) subsiste.

4. **Idée de la réponse** : on utilise deux ingrédients : (i) la condition de parité de Gale qui caractérise les sous-ensembles de sommets d'un polytope cyclique définissant une facette, (ii) le fait que la graphe d'un polytope cyclique est complet. Si vous maîtrisez suffisamment ces deux ingrédients, il suffit d'essayer plusieurs paires de sommets pour trouver lesquelles donnent les arêtes souhaitées.

Soient t_1, t_2, …, t_n des réels tels que $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ et considérons $P = C_4(t_1, t_2, \ldots, t_n)$. Alors nous pouvons identifier les sommets de P avec les nombres 1, 2, …, n. Sous cette identification, le nombre i correspond au sommet $\gamma(t_i)$ pour $1 \leq i \leq n$. On sait que le graphe de P est complet, donc tout couple de sommets de P définit une arête.

Ci-dessous, nous représenterons les facettes de $C_4(n)$ par des mots de longueur n formés des symboles $\bullet$ et $\circ$, la convention étant celle du cours, c.-à-d. que le symbole $\bullet$ correspond à un sommet sur la facette et le symbole $\circ$ à un sommet hors de la facette. Les facettes de $C_4(n)$ s'identifient aux mots comportant exactement 4 symboles $\bullet$ et $n-4$ symboles $\circ$ respectant la condition de parité de Gale (les blocs maximaux de $\bullet$ consécutifs sont de longueur paire, excepté ceux touchant une extrémité).

a) L'arête par les sommets 2 et 4 est contenue dans exactement 3 facettes car les facettes contenant cette arête sont, par le critère de Gale :

$$\begin{array}{ll}
\#1 & \bullet \boxed{\bullet} \circ \boxed{\bullet} \bullet \circ \cdots \circ \\
\#2 & \bullet \boxed{\bullet} \bullet \boxed{\bullet} \circ \circ \cdots \circ \\
\#3 & \circ \boxed{\bullet} \bullet \boxed{\bullet} \bullet \circ \cdots \circ
\end{array}$$

b) L'arête par les sommets 2 et 5 est contenue dans exactement 4 facettes :

$$\begin{array}{ll}
\#1 & \bullet \boxed{\bullet} \circ \circ \boxed{\bullet} \bullet \circ \cdots \circ \\
\#2 & \bullet \boxed{\bullet} \circ \bullet \boxed{\bullet} \circ \circ \cdots \circ \\
\#3 & \circ \boxed{\bullet} \bullet \circ \boxed{\bullet} \bullet \circ \cdots \circ \\
\#4 & \circ \boxed{\bullet} \bullet \bullet \boxed{\bullet} \circ \circ \cdots \circ
\end{array}$$

b) L'arête par les sommets 1 et n est contenue dans exactement $n-2$ facettes :

$$\begin{array}{rl}
\#1 & \boxed{\bullet} \bullet \bullet \circ \circ \circ \cdots \circ \boxed{\bullet} \\
\#2 & \boxed{\bullet} \circ \bullet \bullet \circ \circ \cdots \circ \boxed{\bullet} \\
\#3 & \boxed{\bullet} \circ \circ \bullet \bullet \circ \cdots \circ \boxed{\bullet} \\
\vdots & \vdots \\
\#n-3 & \boxed{\bullet} \circ \circ \circ \cdots \circ \bullet \bullet \boxed{\bullet} \\
\hline
\#n-2 & \boxed{\bullet} \bullet \circ \circ \cdots \circ \circ \bullet \boxed{\bullet}
\end{array}$$