8	8	15	9	12	9	9	30	100

BA2 EN SCIENCES MATHEMATIQUES
MATH-F-206 MATHEMATIQUE COMBINATOIRE
EXAMEN DU 23 JANVIER 2006 (PARTIE SANS DOCUMENT)

NOM : **Prénom :**

Seule la réponse à la question 8 doit être justifiée !

---

1. **(8 points).** Ecrivez "vrai" ou "faux". Dans $\mathbb{R}^d$, l'enveloppe convexe d'un ensemble de points est toujours

a) convexe `vrai` b) fermée `faux` c) ouverte `faux` d) compacte `faux`

`Des contre-exemples s'obtiennent en prenant comme ensembles de points :`
`un demi-espace ouvert;` `une droite;` `une droite.`

2. **(8 points).** Complétez les formules, où $X \subset \mathbb{R}^d$:

$$\text{conv}\,(X) = \left\{ \sum_{j=1}^{k} \lambda_j\, p_j \;\middle|\; k \in \mathbb{N}^*,\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R},\ p_1, p_2, \ldots, p_k \in X, \quad \boxed{\forall j \in \{1,2,\ldots,k\} :\ \lambda_j \geq 0; \quad \textstyle\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1} \right\}$$

$$\text{pos}\,(X) = \left\{ \sum_{j=1}^{k} \lambda_j\, p_j \;\middle|\; k \in \mathbb{N}^*,\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R},\ p_1, p_2, \ldots, p_k \in X, \quad \boxed{\forall j \in \{1,2,\ldots,k\} :\ \lambda_j \geq 0} \right\}$$

$$\text{aff}\,(X) = \left\{ \sum_{j=1}^{k} \lambda_j\, p_j \;\middle|\; k \in \mathbb{N}^*,\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R},\ p_1, p_2, \ldots, p_k \in X, \quad \boxed{\textstyle\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1} \right\}$$

$$\text{vect}\,(X) = \left\{ \sum_{j=1}^{k} \lambda_j\, p_j \;\middle|\; k \in \mathbb{N}^*,\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R},\ p_1, p_2, \ldots, p_k \in X, \quad \boxed{\texttt{(rien)}} \right\}$$

3. (15 points). Donnez un polytope de dimension 4 (ou écrivez "n'existe pas") ayant

a) 5 sommets et 10 arêtes : `un simplexe (de dimension 4)`

b) 10 sommets et 45 arêtes : `un polytope cyclique`

c) autant de facettes que de sommets : `un simplexe`

d) 16 sommets et 8 facettes : `un hypercube`

e) 8 sommets et 16 facettes : `un hyperoctaèdre`

4. (9 points). Soit

$$C \quad = \quad \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x+y \geq 0,\ x \geq 2,\ \text{ et } y \geq 3 \right\}.$$

Donnez

a) les points exposés de C : le seul point $(2,3)$

b) les points extrêmes de C : idem

b) le cône caractéristique de C : $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0\}$

5. (12 points). Définissez la notion de face d'un polytope convexe P de $\mathbb{R}^d$:

Soit P lui-même, soit l'intersection de P avec un hyperplan H tel que P est entièrement contenu dans un côté fermé de H

6. (9 points). Si $\{A, B\}$ est une partition convexe de $\mathbb{R}^d$, quelle figure géométrique est formée par

adh $(A) \cap$ adh (B) ? `un hyperplan affin`

7. (9 points). Donnez un exemple d'ensemble convexe propre de dimension trois sans point extrême :

`une droite, un plan, une boule ouverte, etc.`

8. **(30 points).** Un polytope P est donné dans $\mathbb{R}^d$, de même qu'une forme linéaire non nulle $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Démontrez ou infirmez l'assertion.

a) La forme linéaire f atteint un maximum sur le polytope P.

b) Il existe un sommet de P où ce maximum est atteint.

c) Ce maximum est atteint seulement en un ou plusieurs sommets de P.

d) Les points de P où ce maximum est atteint forment une face de P.

a) Toute forme linéaire sur $\mathbb{R}^d$ est continue; tout polytope est compact. Il suffit donc de rappeler que toute fonction continue sur un compact y atteint un maximum.

Un autre raisonnement consiste à considérer les valeurs de la forme linéaire f en les différents sommets du polytope P. Comme P a un nombre fini de sommets, il existe une plus grande de ces valeurs, prise en un certain sommet v. Il suffit à présent de montrer $f(v) = \max\{f(p) \mid p \in P\}$. Tout point p de P est combinaison convexe des sommets v_1, v_2, ..., v_k de P, c'est-à-dire qu'il existe λ_1, λ_2, ..., $\lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que $p = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \, v_j$ avec $\lambda_j \geq 0$ pour $j = 1$, 2, ..., k et $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1$. Ainsi

$$
\begin{aligned}
f(p) &= f\left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \, v_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \, f(v_j) \\
&\leq \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \, f(v) \\
&= f(v) \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \\
&= f(v),
\end{aligned}
$$

ce qui établit $f(p) \leq f(v)$. Puisque $v \in P$, nous avons $f(v) = \max\{f(p) \mid p \in P\}$.

b) Voir le deuxième raisonnement de la réponse au a).

c) Cette assertion est fausse. Voici un contre-exemple dans $\mathbb{R}^2$. Prenons pour P le ''carré unité'' de sommets $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ et $(1,1)$, et pour f la forme linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x$. Les points de P où f atteint son maximum sont tous les points du segment $[(1,0), (1,1)]$.

d) Cette assertion est vraie, d'après la définition de face rappelée dans la réponse à la question **5**. En effet, si M est la valeur maximum atteinte par f sur P, l'hyperplan $f^{-1}(M)$ rencontre P exactement en les points de P où f vaut M, et de plus P est contenu dans le côté fermé de cet hyperplan défini par $f^{-1}(\{r \in \mathbb{R} \mid r \leq M\})$.