25	25	25	25	100

BA2 EN SCIENCES MATHEMATIQUES
MATH-F-206 MATHEMATIQUE COMBINATOIRE
EXAMEN DU 5 JUIN 2007 (PARTIE AVEC DOCUMENTS)
NOM : **Prénom :**

Veillez à soigneusement justifier vos réponses !

---

1. Pour $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $C \in \mathbb{R}^{\ell\times n}$ et $d \in \mathbb{R}^\ell$, posons

$$P = \{\ x \in \mathbb{R}^n \mid A\,x \leq b,\ C\,x \leq d\ \} \qquad \text{et} \qquad Q = \{\ x \in \mathbb{R}^n \mid A\,x \leq b,\ C\,x = d\ \}.$$

Quelles inclusions sont vraies, où $\mathrm{ext}(X)$ désigne l'ensemble des points extrêmes de X ?

a) $\mathrm{ext}(P) \subseteq \mathrm{ext}(Q)$, **b)** $\mathrm{ext}(Q) \subseteq \mathrm{ext}(P)$.

Si une ligne de C est identiquement nulle, disons la ligne i, soit $d_i = 0$ et alors on peut enlever la ligne i de la matrice C et du vecteur colonne d sans rien changer, soit $d_i \neq 0$ et alors $Q = \varnothing$. Notons que dans le dernier cas on a $\mathrm{ext}\,Q = \varnothing \subseteq \mathrm{ext}\,P$ (donc **b)** est vraie).

Supposons à partir de maintenant qu'aucune ligne de C n'est identiquement nulle. Par définition de P et Q, nous voyons que $Q \subseteq P$. Montrons que Q est en fait une face de P. Pour $i = 1, \dots, \ell$, posons $H_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{j=1}^n c_{ij}x_j = d_i\}$. Les H_i sont des hyperplans car, pour tout i fixé, au moins un des c_{ij} est non nul. Ces hyperplans sont tous valides pour P. De plus, on a

$$Q = \bigcap_i (P \cap H_i)$$

donc Q est une intersection de faces de P, donc une face de P (l'intersection d'un nombre fini de faces d'un convexe est une face de ce convexe). En particulier, on a $\mathrm{ext}\,Q = Q \cap \mathrm{ext}\,P$ par un résultat du cours (si F est une face du convexe A alors $\mathrm{ext}\,F = F \cap \mathrm{ext}\,A$).

a) est fausse. Intuitivement, P peut avoir des points extrêmes en dehors de Q et ces points ne peuvent bien sûr pas être extrêmes dans Q. Un contre-exemple simple est $P = \{x \in \mathbb{R} \mid -x \leq 0, x \leq 1\}$ et $Q = \{x \in \mathbb{R} \mid -x \leq 0, x = 1\}$. Alors $\mathrm{ext}\ P = \{0, 1\}$ et $\mathrm{ext}\ Q = \{1\}$. Donc dans ce cas (comme dans beaucoup d'autres !!) on a $\mathrm{ext}\ P \nsubseteq \mathrm{ext}\ Q$.

b) est vraie car $\mathrm{ext}\ Q = Q \cap \mathrm{ext}\ P \subseteq \mathrm{ext}\ P$.

Remarque. Une autre manière d'établir l'inclusion du **b)** consiste à revenir à la définition de point extrême. Prenons un point extrême q de Q et prouvons qu'il est extrême pour P. Bien sûr, $q \in P$ (car $Q \subseteq P$). Ensuite, supposons $q \in [p, p']$ avec $p, p' \in P$. Pour chaque indice i de ligne de C, nous avons, comme $q \in Q$,

$$\sum_{j=1}^n c_{ij} q_j = d_i.$$

D'autre part, $p, p' \in P$ implique

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} p_j \leq d_i \qquad \text{et} \qquad \sum_{j=1}^{n} c_{ij} p'_j \leq d_i.$$

Ainsi, comme $q \in [p, p']$, il faut

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} p_j = d_i \qquad \text{et} \qquad \sum_{j=1}^{n} c_{ij} p'_j = d_i,$$

c'est-à-dire $p, p' \in Q$. L'hypothèse $q \in [p, p']$ entraîne à présent $q = p$ ou $q = p'$. Mais ceci établit $q \in \operatorname{ext} P$, comme voulu.

---

2. Si P et Q sont deux polytopes de $\mathbb{R}^n$ tels que $\operatorname{intrel}(P) \cap \operatorname{intrel}(Q)$ consiste en un seul point r, posons

$$P * Q \quad = \quad \operatorname{conv}(P \cup Q).$$

a) Si P est un segment et Q un polygone convexe à m côtés, combien de facettes admet le polytope $P * Q$?

b) De manière générale, comment la dimension du polytope $P * Q$ s'obtient-elle à partir des dimensions de P et Q ?

c) De manière générale, comment les sommets du polytope $P * Q$ s'obtiennent-ils à partir des sommets de P et Q ?

Montrons tout d'abord que $\operatorname{aff} P \cap \operatorname{aff} Q = \{r\}$. On a bien $r \in \operatorname{aff} P \cap \operatorname{aff} Q$. Supposons qu'il existe un point s distinct de r dans $\operatorname{aff} P \cap \operatorname{aff} Q$. Prenons un point $t \in [r, s]$ tel que $t \in P \cap Q$. Un tel point existe car $r \in \operatorname{intrel} P \cap \operatorname{intrel} Q$. Alors on a nécessairement $[r, s[\subseteq \operatorname{intrel} P \cap \operatorname{intrel} Q$, une contradiction. En conclusion, l'intersection $\operatorname{aff} P \cap \operatorname{aff} Q$ est réduite à $\{r\}$.

a) Appelons p_1 et p_2 les sommets du segment P. Alors $P * Q$ est une bipyramide de base Q et de sommets principaux p_1 et p_2. Dès lors, $P * Q$ a exactement $2m$ facettes.

b) Par une translation, on peut ramener le point r en l'origine o. Supposons donc que r est l'origine. Donc $A = \operatorname{aff} P$ et $B = \operatorname{aff} Q$ sont maintenant deux sous-espaces vectoriels dont l'intersection est le singleton $\{r\} = \{o\}$. En particulier, on a

$$\dim(A + B) = \dim A + \dim B - \dim(A \cap B) = \dim A + \dim B - 0 = \dim P + \dim Q.$$

De plus, $A + B$ est le plus petit sous-espace affin contenant P et Q simultanément, donc $A + B = \operatorname{aff}(P * Q)$ et $\dim P * Q = \dim P + \dim Q$.

c) Dès que $\dim P \geq 1$ et $\dim Q \geq 1$, on a $\operatorname{vert}(P * Q) = \operatorname{vert} P \cup \operatorname{vert} Q$. En effet, on a

$$P * Q = \operatorname{conv}(P \cup Q) = \operatorname{conv}(\operatorname{conv}(\operatorname{vert} P) \cup \operatorname{conv}(\operatorname{vert} Q)) = \operatorname{conv}(\operatorname{vert} P \cup \operatorname{vert} Q)$$

donc $\text{vert}(P * Q) \subseteq \text{vert}\, P \cup \text{vert}\, Q$ (la dernière égalité ci-dessus est due au fait que $\text{conv}(\cdot)$ est un opérateur de fermeture).

Pour montrer l'autre inclusion $\text{vert}\, P \cup \text{vert}\, Q \subseteq \text{vert}(P * Q)$, considérons un point dans $\text{vert}\, P \cup \text{vert}\, Q$. Pour fixer les idées, soit $p \in \text{vert}\, P$ (l'autre cas est symétrique). En vue de symplifier la démonstration, faisons quelques hypothèses. Aucune de ces hypothèses ne restreint la généralité. Supposons de nouveau que le point r coïncide avec l'origine. Donc $A = \text{aff}\, P$ et $B = \text{aff}\, Q$ sont des sous-espaces vectoriels. Supposons de plus que $P * Q$ est de dimension pleine, c.-à-d., $A + B = \text{aff}(P * Q) = \mathbb{R}^n$. Donc A et B sont deux sous-espaces complémentaires de $\mathbb{R}^n$. Après changement de base, nous pouvons supposer

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_{d+1} = \cdots = x_n = 0\} \quad \text{et} \quad B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = \cdots = x_d = 0\},$$

où $d = \dim A = \dim P$ et $n - d = \dim B = \dim Q$. Etant donné que p est un sommet de P il existe une inégalité de la forme $\sum_{i=1}^d a_i x_i \leq b$ valide pour P telle que le seul point de P satisfaisant $\sum_{i=1}^d a_i x_i = b$ est le point p (on peut supposer que cette inégalité ne fait pas intervenir de variable x_j avec $j > d$ en considérant P comme un polytope défini dans $A \cong \mathbb{R}^d$). Notons que l'inégalité est également valide pour Q car en tout point de Q, donc en particulier en $r = o$, le membre de gauche est zéro. Comme l'inégalité est valide pour $r \in P$, elle est valide pour Q tout entier. Notons que b est nécessairement plus grand que 0 car sinon tous les points de P (et pas seulement p) satisferaient $\sum_{i=1}^d a_i x_i = b$. Ceci n'est pas possible car P étant de dimension au moins 1, il contient d'autres points que p (par exemple, on doit avoir $r \neq p$). Par conséquent, aucun point de Q ne satisfait $\sum_{i=1}^d a_i x_i = b$. On a donc trouvé un demi-espace $H^{\leq} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^d a_i x_i \leq b\}$ tel que $P, Q \subseteq H^{\leq}$, $H \cap P = \{p\}$ et $H \cap Q = \varnothing$. Donc $(P * Q) \subseteq H^{\leq}$ et $H \cap (P * Q) = \{p\}$ et p est bien un sommet de $P * Q$.

Remarque. Etant donné que $r \in \text{intrel}\, P \cap \text{intrel}\, Q \subseteq P \cap Q$ on sait que $\dim P \geq 0$ et $\dim Q \geq 0$. Si $\dim P = 0$ et $\dim Q = 0$ alors $P * Q = \{r\}$ et $\text{vert}\, P * Q = \{r\}$. Si $\dim P = 0$ et $\dim Q \geq 1$ alors $\text{vert}\, P * Q = \text{vert}\, Q$. Si $\dim Q = 0$ et $\dim P \geq 1$ alors $\text{vert}\, P * Q = \text{vert}\, P$.

---

3. Pour un sous-ensemble X de $\mathbb{R}^n$, posons

$$X^{\triangle} \quad = \quad \{\, y \in \mathbb{R}^n \;\mid\; x^T y \;\leq\; 1,\ \forall x \in X \,\}.$$

a) L'ensemble $X^{\triangle}$ est-il toujours convexe ?

b) L'ensemble $X^{\triangle}$ est-il toujours polyédrique ?

c) Si X est supposé être un polytope, les réponses aux questions précédentes sont-elles modifiées ?

---

a) est vraie : $X^{\triangle} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \forall x \in X : x^T y \leq 1\}$ est une intersection de demi-espaces (un pour chaque $x \in X$), donc est toujours convexe.

b) est fausse. Dès que X est infini, $X^{\triangle}$ est défini comme une intersection d'un nombre infini de demi-espaces. Notons que ce n'est pas pour autant que X n'est pas un ensemble polyédrique. Ce qui est important est que le nombre de demi-espaces *non-redondants* dans la description de $X^\triangle$ est parfois infini. Définissons

$$B := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid ||x|| \leq 1\},$$

prenons $n = 2$ et $X = B$, et montrons que $X^\triangle = X$. On a $X^\triangle \subseteq X$ car pour tout point $y \in X^\triangle$ on a $||y|| \leq 1$. C'est évident si $y = 0$ et sinon en posant $x = y/||y|| \in X$ on a

$$x^T y \leq 1 \iff (y/||y||)^T y \leq 1 \iff ||y|| \leq 1.$$

De plus, on a $X \subseteq X^\triangle$ car si $x, y \in X$ on a

$$x^T y \leq ||x|| \cdot ||y|| \leq 1$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwartz. Donc $y \in X^\triangle$ et par conséquent $X \subseteq X^\triangle$. Finalement, on conclut que $X^\triangle = X$. De plus, X n'est pas polyédrique car s'il l'était il serait un polytope (car X est borné) et donc possèderait un nombre fini de points extrêmes (ce qui n'est pas le cas).

Si X est un polytope, alors la réponse au **a)** ne change pas (aucune hypothèse sur X n'était nécessaire dans notre raisonnement). Par contre, **b)** est maintenant vraie. Il suffit de montrer que

$$X^\triangle = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \forall x \in \operatorname{vert} X : x^T y \leq 1\}.$$

car dans ce cas $X^\triangle$ est une intersection d'un nombre fini de demi-espaces et est donc un ensemble polyédrique. Clairement l'inclusion $\subseteq$ est vérifiée. Voyons pourquoi l'inclusion $\supseteq$ est vérifiée. Supposons qu'un point y vérifie $w^T y \leq 1$ pour tout sommet w de X. Soit x un point quelconque de X. Alors x est une combinaison convexe $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i w_i$ de sommets et

$$x^T y = \Big(\sum_{i=1}^m \lambda_i w_i\Big)^T y = \sum_{i=1}^m \lambda_i w_i^T y \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1.$$

Comme ceci est vrai pour n'importe quel x, on a bien l'inclusion souhaitée.

---

4. En supposant $n \geq 7$, considérons le polytope cyclique $C_6(0,\, 1,\, \dots,\, n-1)$ ainsi que sa face F ayant pour sommets les trois points $\gamma(0)$, $\gamma(1)$ et $\gamma(2)$.

Déterminez l'équation d'un hyperplan valide définissant cette face F.

Considérons le polynôme $p(t) = t(t-1)(t-2) = 2t - 3t^2 + t^3$. Alors $p(t) = 0$ pour $t = 0, 1, 2$ et $p(t) > 0$ pour $t = 3, 4, \dots, n$. Donc l'inégalité $2x_1 - 3x_2 + x_3 \geq 0$ est valide pour $C_d(0, 1, \dots, n)$ et est vérifiée à égalité par un sommet $\gamma(t)$ de $C_d(0, 1, \dots, n)$ si et seulement si $t = 0, 1$ ou 2. Donc l'hyperplan d'équation $2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$ définit bien la face dont les sommets sont $\gamma(0)$, $\gamma(1)$ et $\gamma(2)$.

Remarque. Il y avait d'autres choix possibles. Par exemple, on aurait pu prendre $p(t) = t^2(t-1)^2(t-2)^2$ avec l'avantage d'avoir un hyperplan laissant l'entièreté de la courbe des moments d'un côté et touchant la courbe exactement aux points $\gamma(0)$, $\gamma(1)$ et $\gamma(2)$.