6	15	12	12	5	12	18	20	100

BA2 EN SCIENCES MATHEMATIQUES
MATH-F-206 MATHEMATIQUE COMBINATOIRE
EXAMEN DU 5 JUIN 2007 (PARTIE SANS DOCUMENT)
NOM : **Prénom :**

Veillez à justifier soigneusement votre réponse aux questions 6, 7 et 8.

---

1. (6 points) Considérons le sous-ensemble X de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$X = \{(1,1,2,2),(1,2,1,2),(1,2,2,1),(2,1,1,2),(2,1,2,1),(2,2,1,1)\}$$

a) X est-il linéairement indépendant ? (OUI ou NON) `non`

b) X est-il affinement indépendant ? (OUI ou NON) `non`

c) X est-il l'ensemble des sommets d'un polytope ? (OUI ou NON) `oui`

2. (15 points) Dans $\mathbb{R}^3$, donnez, s'il existe, un ensemble X minimal pour la propriété $A = \operatorname{conv} X$ avec (s'il n'existe pas de tel X, écrivez "néant")

A formé des (x,y,z) tels que	X
$x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x+y+z=1$	$\{\,(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,0,1)\,\}$
$x^2+y^2+z^2 < 1$	néant
$x^2+y^2+z^2 \leq 1$	$\{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ x^2+y^2+z^2\ =\ 1\,\}$
$x = 1,\ \|y+z\| \leq 2$	néant
$x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$	néant

3. (12 points) Soit $X = \{(1,1,1),(1,1,-1),(1,-1,1),(1,-1,-1),(0,0,1),(0,0,-1)\}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$. Déterminer, sans justifier, toutes les IDF du polytope $P = \operatorname{conv} X$.

$z \leq 1, \qquad z \geq -1, \qquad x \leq 1, \qquad x-y \geq 0, \qquad x+y \geq 0.$

4. **(12 points)** Voici des paires d'ensembles C et D de $\mathbb{R}^2$ définis par une condition sur leurs points (x, y). Indiquez pour chacune si elle est séparable

C	D	simplement	strictement	fortement
$x \geq 1,\ y \geq 2$	$x \leq 1,\ y \leq 2$	oui	non	non
$x \geq 1,\ y \geq 2$	$x \leq 1,\ y \geq 2$	oui	non	non
$x > 1,\ y \geq 2$	$x < 1,\ y \leq 2$	oui	oui	non
$x > 1,\ y \geq 2$	$x < 1,\ y < 1$	oui	oui	oui
$x > 2,\ y \geq 2$	$x < 2,\ y \leq 2$	oui	oui	non
$x > 2,\ y \geq 2$	$x < 1,\ y \leq 2$	oui	oui	oui
$y \geq x^2$	$y \leq 0$	oui	non	non
$y > x^2$	$y < 0$	oui	oui	non

5. **(5 points)** Soit P un polytope dans $\mathbb{R}^n$ possédant f facettes et q_1, q_2, q_3 trois points tels que

$$q_1 \in \mathbb{R}^n \setminus \text{aff}\,(P), \qquad q_2 \in \mathbb{R}^n \setminus \text{aff}\,(P \cup \{q_1\}) \qquad q_3 \in \mathbb{R}^n \setminus \text{aff}\,(P \cup \{q_1, q_2\}).$$

Combien le polytope $\quad Q = \text{Pyr}\,(\,q_3,\ \text{Pyr}\,(\,q_2,\ \text{Pyr}\,(q_1,\ P)\,)\,)\quad$ a-t-il de facettes ? $\boxed{f + 3}$

6. **(12 points)** Pour quelles valeurs des coefficients a_i réels $(1 \leq i \leq n)$ l'inégalité $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i \geq 0$ est-elle valide pour $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0\}$? Justifier votre réponse.

Réponse : $a_i \geq 0$, pour $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$. $\qquad$ (*)

Justification :

- La condition (*) est nécessaire. En effet, l'inégalité doit être valide en le point $e_i = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, 0, \ldots, 0)$ de $\mathbb{R}^n_+$, ce qui donne $a_i \geq 0$ (car la valeur du membre de gauche en ce point est précisément a_i).

- La condition (*) est suffisante. Prenons $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dans $\mathbb{R}^n_+$. Alors $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i$ est une somme de termes positifs ou nuls (car tous les a_i et tous les x_i le sont), donc est positif ou nul. Ceci montre que l'égalité donnée est valide pour $\mathbb{R}^n_+$.

7. (18 points) Utilisez le lemme de Zorn pour démontrer l'assertion suivante :

> *Soit $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ deux convexes disjoints. Il existe un sous-ensemble convexe C de $\mathbb{R}^n$ maximal pour la propriété de contenir A et d'éviter B.*

Notons E la collection de tous les sous-ensembles convexes de $\mathbb{R}^n$ contenant A et évitant B. Ordonnons E par l'inclusion. Il s'agit de montrer que l'ensemble ordonné $(E, \subseteq)$ admet un élément maximal. Par le Lemme de Zorn, cette dernière propriété est vraie lorsque toute chaîne $\mathcal{C}$ est majorée dans E (c.-à-d. : il existe un élément M de E tel que $C \subseteq M$ pour tout C de $\mathcal{C}$).

Montrons que $\mathcal{C}$ est majorée par $\cup\mathcal{C}$. Comme les éléments de $\mathcal{C}$ sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ contenant A et évitant B, leur union $\cup\mathcal{C}$ a aussi ces propriétés. Ensuite, pour établir que $\cup\mathcal{C}$ est convexe, prenons deux points p et q de $\cup\mathcal{C}$. Par définition de $\cup\mathcal{C}$, il existe P et Q dans $\mathcal{C}$ tels que $p \in P$ et $q \in Q$. Comme $\mathcal{C}$ est une chaîne, il vient $P \subseteq Q$ ou $Q \subseteq P$. Les deux cas étant similaires, traitons seulement le premier. Nous avons alors $p, q \in Q$, donc $[p, q] \subseteq Q$ car Q est convexe, et ainsi $[p, q] \subseteq \cup\mathcal{C}$ car $Q \subseteq \cup\mathcal{C}$. En conclusion, $\cup\mathcal{C}$ est un sous-ensemble convexe contenant A et évitant B, c'est-à-dire un élément de E, qui de plus majore $\mathcal{C}$.

8. (20 points) Soit P un polytope dans $\mathbb{R}^n$.

a) Qu'appelle-t-on le graphe de P ?
b) Le type combinatoire de P est-il déterminé par le graphe de P ? Justifiez votre réponse.
c) Qu'appelle-t-on une facette de P ?
d) Le type combinatoire de P est-il déterminé par la liste des facettes de P ? Justifiez votre réponse.

a) Le *graphe du polytope* P est le graphe simple (non dirigé, sans boucle, sans arête multiple) dont les sommets sont les sommets de P (un sommet de P est un point p qui forme à lui seul une face de P) et les arêtes sont les paires de sommets $\{p, q\}$ tels que $[p, q]$ est une face de P.

b) Non, car par exemple beaucoup de polytopes ont le même nombre de sommets et un graphe complet sans cependant avoir le même type combinatoire. C'est le cas notamment des polytopes cycliques $C_4(6)$ et $C_5(6)$ (ayant 6 sommets) qui n'ont pas même type combinatoire car de dimensions respectives 4 et 5.

c) Une *facette* de P est une face propre maximale (une *face* est l'intersection de P avec un hyperplan d'appui de P; cette face est *propre* si elle diffère de P; elle est *propre maximale* si la seule autre face qui la contient est P).

d) Un théorème affirme que toute intersection de faces (donc en particulier de facettes) de P est encore une face de P. Un autre affirme que toute face de P est intersection de facettes de P. Ainsi, les faces de P sont exactement les intersections de collections de facettes de P. La donnée des facettes de P permet donc de fabriquer les faces de P. Ainsi la réponse est affirmative, car le type combinatoire de P consiste précisément en la collection des faces de P ordonnéee par inclusion.