1 Convexité dans $\mathbb{R}^n$

1.1 Géométrie affine dans $\mathbb{R}^n$

1. Démontrer qu'un ensemble S de points forme un sous-espace affin ssi toute droite déterminée par deux points de S est contenue dans S. Ce résultat est-il encore valable dans $\mathbb{F}_2^n$?

2. Démontrer que toute intersection de sous-espaces affins est un sous-espace affin.

3. Dans $\mathbb{R}^3$, décrire géométriquement les enveloppes affines des ensembles suivants (discuter) :

a) le vide,

b) un point,

c) deux points distincts,

d) trois points distincts,

e) deux droites distinctes,

f) une sphère.

4. En utilisant la propriété 6.a) ci-dessous, démontrer qu'un ensemble $X \subseteq \mathbb{R}^n$ de points est affinement dépendant ssi l'ensemble $\{(1, x) \mid x \in X\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ de vecteurs est linéairement dépendant.

5. Parmi les ensembles suivants, quels sont ceux qui constituent un repère affin de $\mathbb{R}^3$?

a) $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$,

b) $\{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$,

c) $\{(1, 2, 3), (3, 1, 2), (2, 3, 1), (2, 2, 2)\}$,

d) $\{(0, 1, 0), (1, 4, 5), (-6, 3, 8), (6, 2, -3)\}$.

6. Soit X un ensemble de points. Pour rappel, X est dit *affinement dépendant* s'il existe un point p de X appartenant à l'enveloppe affine de $X \setminus \{p\}$.

a) Montrer que X est affinement dépendant ssi il existe $m \in \mathbb{N}_0$, $p_1, p_2, \ldots, p_m \in X$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j p_j = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{m} \lambda_j = 0.$$

b) Montrer que X est affinement indépendant ssi l'ensemble $\{x - a : x \in X, x \neq a\}$ de vecteurs est linéairement indépendant, pour tout a dans X.

7. Laquelle des implications suivantes est-elle vraie ?

$$X \text{ affinement dépendant} \Rightarrow X \text{ linéairement dépendant}$$

$$X \text{ linéairement dépendant} \Rightarrow X \text{ affinement dépendant}$$

8. Vérifier que $g : V \to K$ est une forme affine si $\forall p, q \in V$, $\forall \lambda, \mu \in K$:

$$\lambda + \mu = 1 \Longrightarrow g(\lambda p + \mu q) = \lambda g(p) + \mu g(q).$$

10. Une *affinité* de $\mathbb{R}^n$ est une transformation de la forme $x \mapsto A(x)+t$ où A est une permutation linéaire de $\mathbb{R}^n$ et $t \in \mathbb{R}^n$. Donnez une affinité de $\mathbb{R}^2$ envoyant le point $(1, 1)$ sur le point $(2, 1)$ et le point $(0, 1)$ sur le point $(3, -2)$. Combien existe-t-il de telles affinités ?

11. Démontrer que l'équation de l'hyperplan passant par n points affinement indépendants p_1, p_2, …, p_n dans $\mathbb{R}^n$ peut s'écrire :

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ 1 & p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

12. Considérons la courbe algébrique dans $\mathbb{R}^n$ paramétrisée par $\gamma : t \mapsto (t, t^2, \ldots, t^n)$. Démontrer que tout ensemble d'au plus $n+1$ points distincts de cette courbe est toujours affinement indépendant. (Aide : établir l'identité de Vandermonde

$$\begin{vmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & \cdots & t_0^n \\ 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \cdots & t_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \le i < j \le n} (t_j - t_i)$$

où t_0, t_1, …, t_n sont $n+1$ réels distincts.)

1.2 Segments, demi-droites, demi-espaces

13. Soit H un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ et $H^<$, $H^>$ les deux demi-espaces ouverts déterminés par H. Considérons $p, q \in H^<$ et $r \in H^>$. Prouver :

$$[p, q] \subseteq H^< \qquad \text{et} \qquad [p, r] \cap H \text{ est un singleton.}$$

1.3 Ensembles convexes

14. Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$, lesquels sont convexes ? Argumentez.

a) une droite;
b) une demi-droite;
c) un segment;
d) deux points distincts;
e) une sphère;
f) une demi-boule.

15. Considérons dans $\mathbb{R}^{n\times n}$ l'ensemble S des matrices symétriques réelles semi-définies positives

$$S = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^t = A,\ \forall x \in \mathbb{R}^n : x^t A x \ge 0\}.$$

Vérifier que S est convexe.

16. Dans $\mathbb{R}^2$, quelle est l'enveloppe convexe des ensembles suivants ?

a) $\mathbb{Z}^2$;
b) $\mathbb{N}^2$;
c) deux droites (discuter);
d) un point et une droite (discuter);
e) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid 2\,x_1 + 2\,x_2 \le 5\}$;
f) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid 14\,x_1 + 10\,x_2 \le 35\}$.

17. Déterminer l'enveloppe convexe des sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$:

a) un point;

b) deux points;

c) trois points distincts (discuter);

d) quatre points distincts (discuter);

e) une sphère;

f) une hélice droite;

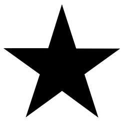
g) un point et un plan (discuter);

h) deux droites gauches.

18. Soit e_1, e_2, $\ldots$, e_n la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Démontrer :

$$\operatorname{conv}(\{o, e_1, e_2, \ldots, e_n\}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0,\, x_2 \geq 0,\, \ldots,\, x_n \geq 0,\, \sum_{i=1}^{n} x_i \leq 1\}.$$

19. Soit a, b, c, d, e cinq points de $\mathbb{R}^n$ tels que $b \in [a, c]$, $d \in [a, e]$. Montrez qu'alors les segments $[b, e]$ et $[c, d]$ ont au moins un point commun.

20. L'étoile à cinq branches  est-elle la réunion de deux ensembles convexes ?

21. (Théorème de Radon). Soit X un ensemble d'au moins $n + 2$ points dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que X est partitionnable en deux sous-ensembles X_1 et X_2 tels que

$$\operatorname{conv} X_1 \cap \operatorname{conv} X_2 \neq \varnothing.$$

(*Aide* : utiliser le fait qu'un tel ensemble X est affinement dépendant et l'exercice 6.a puis considérer les signes des coefficients λ_j.)

22. Vérifier que la relation $\leq$ sur les couples (X, Y) de sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ définie par $(X_1, Y_1) \leq (X_2, Y_2) \iff X_1 \subseteq X_2$ et $Y_1 \subseteq Y_2$ est une relation d'ordre. L'ensemble ordonné ainsi obtenu admet-il un élément maximal ? un élément maximum ?

23. a) Trouver toutes les tripartitions convexes de $\mathbb{R}$ (à affinité près).
b) Donner des exemples de tripartitions convexes de $\mathbb{R}^2$.
c) Donner des exemples de quadripartitions convexes de $\mathbb{R}^2$.

24. Si A et B sont des convexes de $\mathbb{R}^n$, lesquels des ensembles suivants sont nécessairement convexes ?

a) $[A, B] = \bigcup\limits_{\substack{a \in A \\ b \in B}} [a, b]$

b) $A/B = \{p \in \mathbb{R}^n \mid \exists a \in A, \exists b \in B : a \in [p, b]\}$

c) $\langle A, B\rangle = \bigcup\limits_{\substack{a \in A \\ b \in B}} \langle a, b\rangle$

d) $[A, B\rangle = \bigcup\limits_{\substack{a \in A \\ b \in B}} [a, b\rangle$

25. Décrire l'enveloppe convexe dans $\mathbb{R}^3$ de deux-demi-droites ouvertes gauches. Si les deux demi-droites sont données par

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0 \\ z & = & 1 \\ y & \geq & 0 \end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad \left\{\begin{array}{lcl} y & = & 0 \\ z & = & 0 \\ x & \geq & 0 \end{array}\right.$$

décrivez analytiquement l'ensemble des points qu'il faut ajouter à la réunion des deux demi-droites pour obtenir leur enveloppe convexe.

26. Deux convexes disjoints C et D sont donnés dans $\mathbb{R}^n$. Est-il toujours vrai qu'au moins une des deux intersections suivantes est vide ?

$$C \cap \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda\, D \qquad \text{et} \qquad D \cap \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda\, C.$$

27. Soit p un point d'un espace affin réel $\mathbb{R}^n$. Un *semi-espace en* p est un convexe évitant p et maximal pour cette propriété.

a) Lorsque $n = 1$, 2, ou 3, donner un exemple de semi-espace en p.

b) En dimension n quelconque, existe-t-il toujours un semi-espace en p ?

c) Si C est un convexe évitant le point p, existe-t-il nécessairement un semi-espace en p contenant C ?

d) Si S est un semi-espace en p, le complément de $S \cup \{p\}$ est-il nécessairement aussi un semi-espace ?

e) Deux semi-espaces en p sont-ils nécessairement images par affinité l'un de l'autre ? (difficile)

28. Si C un convexe de $\mathbb{R}^n$, lesquels des ensembles suivants le sont-ils nécessairement aussi ?

a) $\{p \in \mathbb{R}^n \mid \exists q \in C :]p, q] \subseteq C\}$

b) $\{p \in \mathbb{R}^n \mid \forall q \in \mathbb{R}^n, \exists \lambda \in \mathbb{R} : \lambda > 0 \text{ et }]p - \lambda(q - p), p + \lambda(q - p)[\subseteq C\}$

c) $\{p \in \mathbb{R}^n \mid \forall q \in \operatorname{aff} C, \exists \lambda \in \mathbb{R} : \lambda > 0 \text{ et }]p - \lambda(q - p), p + \lambda(q - p)[\subseteq C\}$

29. Si C et D sont convexes, définissons leur somme de Minkowski :

$$C + D = \{c + d \mid c \in C, d \in D\}.$$

a) Déterminer la somme de Minkowski des deux ou trois convexes suivants de $\mathbb{R}^2$.

1) $[(1, 0), (0, 1)]$ et $[(2, 0), (2, 2)]$
2) $[(0, 0), (1, 0)]$, $[(1, 0), (0, 1)]$ et $[(0, 1), (0, 0)]$
3) $[(1, 1), (2, 1)]$, $[(2, 1), (1, 2)]$ et $[(1, 2), (1, 1)]$

b) Déterminer la somme des deux convexes suivants de $\mathbb{R}^3$.

1) $[(0, 0, 0), (1, 0, 0)\rangle$ et $[(0, 0, 1), (0, 1, 1)\rangle$
2) $[(1, 0, 0), (0, 1, 0)]$, $[(0, 1, 0), (0, 0, 1)]$ et $[(0, 0, 1), (1, 0, 0)]$

c) Montrer que $C + D$ est toujours convexe.

1.4 Séparation

30. Dans $\mathbb{R}^2$, lesquelles des paires suivantes de convexes sont-elles séparables ? strictement séparables ? fortement séparables ?

a) deux singletons distincts

b) deux segments (discuter)

c) une droite et un singleton disjoint de la droite

d) deux droites (discuter)

e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2\}$ et $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq -x^2\}$

f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^2\}$ et $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < -x^2\}$

g) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 1 \text{ et } x \geq 0\}$ et $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \leq -1 \text{ et } x \geq 0\}$

h) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 1 \text{ et } x \geq 0\}$ et $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy < -1 \text{ et } x \geq 0\}$

31. Dans $\mathbb{R}^3$, lesquelles des paires suivantes de convexes sont-elles séparables ? strictement séparables ? fortement séparables ?

a) deux singletons distincts

b) deux segments (discuter)

c) une droite et un singleton disjoint de la droite

d) deux droites (discuter)

e) deux plans

f) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq x^2 + y^2\}$ et $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq x\}$

g) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0 \text{ et } z^2 \geq x^2 + y^2 + 1\}$ et $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0 \text{ et } x^2 \geq z^2\}$

h) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ et une droite (discuter)

32. Déterminer l'intérieur relatif des sous-ensembles convexes de $\mathbb{R}^3$ suivants :

a) $[(0, 0, 0), (1, 0, 0)]$;

b) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\}$;

c) $[-1, 1]^3$;

d) $\{(0, 0, 0)\}$.

33. Comment l'intérieur relatif de $\operatorname{conv}(\{p\} \cup C)$ s'obtient-il à partir de celui de C ? Ici, p est un point et C un convexe.

34. Dans $\mathbb{R}[X]$, donnez un convexe propre qui n'est contenu dans aucun demi-espace large. Existe-t-il un tel convexe dans $\mathbb{R}^n$?

35. Si C est un convexe non vide et S un sous-espace affin de $\mathbb{R}^n$ avec $C \cap S = \varnothing$, existe-t-il nécessairement un hyperplan H contenant S et disjoint de C ?

36. Donner deux convexes bornés de $\mathbb{R}^n$ qui sont séparés par un unique hyperplan.

37. Dans $\mathbb{R}^n$, quels sont les convexes d'intérieur relatif vide ?

38. Pour quels convexes de $\mathbb{R}^2$ intérieur relatif et intérieur coïncident-ils ? Généraliser à $\mathbb{R}^n$.

39. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, soit C un sous-ensemble. Lesquelles des implications suivantes sont correctes ?

a) C est convexe et ouvert $\Rightarrow$ C est intersection de demi-espaces stricts

b) C est intersection de demi-espaces stricts $\Rightarrow$ C est convexe et ouvert

c) C est convexe et fermé $\Rightarrow$ C est intersection de demi-espaces larges

d) C est intersection de demi-espaces larges $\Rightarrow$ C est convexe et fermé

40. Pour quels corps commutatifs ordonnés $K, +, \cdot, \leq$ est-il vrai que deux convexes disjoints de la droite sur K sont toujours séparables ? Même question en remplaçant la droite sur K par l'espace K^n, où n est un naturel non nul fixé.

1.6 Appui et faces

41. Pour chacun des systèmes d'inégalités suivants, déterminer les droites d'appui passant par l'origine du sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^2$ correspondant :

a) $y \geq x^2$

b) $y > 0$ et $xy > 1$

c) $y > 0$ et $y^2 - x^2 \geq 1$

d) $(x-5)^2 + (y-5)^2 \leq 9$

42. Quels sont les points extrêmes et les points exposés du convexe de $\mathbb{R}^2$ décrit par

a) $x + y \leq 1$?

b) $x + y \leq 1$, $x \geq 0$ et $y \geq 0$?

c) $x \geq y^2$ et $x \leq 4$?

d) $(y \geq 0$ et $x \geq y^2)$ ou $(y \leq 0$ et $x \geq 0)$?

e) $|x + y| \leq 1$?

43. Déterminer les faces du convexe de $\mathbb{R}^2$ spécifié par les inégalités suivantes :

a) $y \geq x^2$

b) $(x \leq 0$ et $y \geq x^2)$ ou $(y \geq 0$ et $0 \leq x \leq 1)$

c) $|x| \leq 1$ et $x + y \geq -1$

44. Pour chacun des convexes suivants de $\mathbb{R}^n$, déterminez ses hyperplans d'appui passant par l'origine :

a) une demi-droite fermée (discuter)

b) une droite (discuter)

c) un hyperplan (discuter)

d) un demi-espace (discuter)

45. Prouver que si F est une face du convexe C, on a $\operatorname{ext}(F) = F \cap \operatorname{ext}(C)$. Pourquoi ce résultat implique-t-il $\exp(C) \subseteq \operatorname{ext}(C)$?

46. Soit C un ensemble convexe et p un point de C. Est-il vrai que p est extrême si et seulement si $C \setminus \{p\}$ est convexe ?

47. Il existe en dimension 3 un ensemble convexe compact C tel que $\exp(C)$ n'est pas fermé. Construisez un tel ensemble.

48. Le convexe C de $\mathbb{R}^n$ est-il l'intersection de ses demi-espaces d'appui

a) si C est compact ?

b) si C est fermé ?

c) si C est ouvert ?

49. Soit C un convexe compact de l'espace affin $\mathbb{R}^n$. Existe-t-il un plus petit ensemble E tel que $C = \operatorname{conv}(E)$? Que veut dire "plus petit" ?

50. Quelles implications sont vraies à propos d'un ensemble X de points de $\mathbb{R}^n$?

a) $\operatorname{int}(X)$ convexe $\Rightarrow X$ convexe

b) $\operatorname{adh}(X)$ convexe $\Rightarrow X$ convexe

c) $\operatorname{adh}(X)$ convexe $\Rightarrow \operatorname{int}(X)$ convexe

d) $\operatorname{int}(X)$ convexe $\Rightarrow \operatorname{adh}(X)$ convexe

51. Montrer que pour tout convexe C de $\mathbb{R}^n$ on a $\exp(C) \subseteq \operatorname{ext}(C)$ mais que pour certains convexes C on a $\operatorname{ext}(C) \not\subseteq \exp(C)$.

52. Quels sont les convexes C de $\mathbb{R}^n$ tels que $C = \operatorname{adh}(\operatorname{int}(C))$?

53. Soit F une face du convexe compact C et G une face du convexe F. Alors G est-elle nécessairement une face du convexe C ?

54. Vrai ou faux ? L'enveloppe convexe d'un fermé de $\mathbb{R}^n$ est un fermé. Même question avec fermé remplacé par ouvert.

55. Pour X un sous-ensemble quelconque de $\mathbb{R}^n$, définissez $\operatorname{ext}(X)$. Quelles égalités sont-elles toujours vraies ?

a) $\operatorname{adh}(\operatorname{conv}(X)) = \operatorname{adh}(\operatorname{conv}(\operatorname{ext}(X)))$

b) $\operatorname{conv} X = \operatorname{conv}(\operatorname{ext}(X))$

1.7 Convexes non bornés

56. Sur le champ $\mathbb{Q}$, est-il toujours vrai que tout convexe non borné contient une demi-droite ?

57. Lesquels des ensembles de points définis par les inégalités suivantes sont-ils des cônes convexes ?

- dans $\mathbb{R}^2$:

  a) $y \geq x^2$

  b) $y \geq 0$ et $x^2 - y^2 \leq -1$

  c) $y \geq 0$ et $x^2 - y^2 + 2y \leq 0$

  d) $2x + 3y \geq 0$ et $x - y \leq 0$

- dans $\mathbb{R}^3$:

  e) $x \geq 0$

  f) $x \geq 1$

  g) $3x - y + z \geq 0$, $4x - 2y + 5z \geq 0$, $6x - y \geq 0$ et $7x - y + 3z \leq 0$

58. Déterminer le cône caractéristique et les points extrêmes des convexes fermés définis par les inégalités suivantes :

- dans $\mathbb{R}^2$:

  a) $x \geq 0$ et $y \geq 0$

  b) $x \geq 0$ et $xy \geq 1$

  c) $y \geq x^2$

- dans $\mathbb{R}^3$:

  d) $x \geq 0$, $y \geq 0$ et $z \geq 0$

  e) $x \geq 0$ et $y \geq 0$

  f) $x^2 + y^2 \leq 1$

  g) $z \geq 0$ et $x^2 + y^2 - z^2 \leq -1$

  h) $z \geq x^2 + y^2$

Pour lesquels de ces convexes C l'égalité $C = \mathrm{cc}(C) + \mathrm{conv}(\mathrm{ext}(C))$ est-elle vérifiée ?

59. Quelle est l'enveloppe conique (aussi appelée enveloppe positive) des ensembles suivants de vecteurs ?

- dans $\mathbb{R}^2$:

  a) $\{(1,0),(0,1),(2,2)\}$

  b) $\{(1,0),(0,1),(-2,-2)\}$

  c) $\{(1,0),(0,1),(-2,2)\}$

  d) $\{(1,1),(-1,1),(1,-1)\}$

- dans $\mathbb{R}^3$:

  e) $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$

  f) $\{(1,-1,0),(1,0,-1),(-2,1,1)\}$

  g) $\{\vec{e_i} - \vec{e_j} \mid i,j = 1,2,3\}$

  h) $\{\vec{e_i} - \vec{e_j} \mid i,j = 1,2,3 \text{ et } i < j\}$

  i) $\{\vec{e_i} + \vec{e_j} \mid i,j = 1,2,3\}$

  j) $\{\vec{e_i} + \vec{e_j} \mid i,j = 1,2,3 \text{ et } i < j\} \cup \{-\vec{e_1} - \vec{e_2} - \vec{e_3}\}$

60. Quels sous-espaces affins sont des cônes convexes ?

2 Polytopes et ensembles polyédriques

2.1 Définitions et théorème fondamental

1. Pour $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $b \in \mathbb{R}^n$, posons $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ puis

$$\begin{aligned} Q &= \{y \in \mathbb{R}^n \mid \exists x \in \mathbb{R}^n, \exists \lambda \in \mathbb{R} : \ Ax \leq b, 0 \leq \lambda \leq 1, y = \lambda x\}, \\ R &= \{y \in \mathbb{R}^n \mid \exists \mu \in \mathbb{R} : \ Ay \leq \mu b, 0 \leq \mu \leq 1\}. \end{aligned}$$

Démontrez :

a) dans tous les cas, $Q \subseteq R$;

b) si P est un polytope non vide, alors $\{z \in \mathbb{R}^n \mid Az \leq 0\} = \{o\}$;

c) si P est un polytope non vide, alors $Q = R$.

Cette dernière égalité est utilisée dans la démonstration du théorème $1'$.

2. Décrire les polytopes suivants par un système d'inégalités linéaires :

a) $\operatorname{conv}\{(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})\}$;

b) $\operatorname{conv}\{(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)\}$.

2bis. Soit P un polytope non vide dans $\mathbb{R}^n$ et v un point de $\mathbb{R}^n$ hors de P; posons $Q = \operatorname{conv}(P \cup \{v\})$. Le nombre de HDF de Q est-il toujours plus grand que celui de P ? Mêmes questions en remplaçant "plus grand que" par "plus petit que" ou par "égal à".

2.2 Familles d'exemples et constructions de polytopes

Le simplexe S_n et le cube Q_n ont été définis au cours. L'*octaèdre* O_n est le polytope dont

- l'ensemble des sommets est $\{\pm e_1, \pm e_2, \ldots, \pm e_n\}$;
- les IDF sont de la forme $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i \leq 1$ avec $c_i = \pm 1$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$.

3. Et il me répéta alors, tout doucement, comme une chose très sérieuse :
- S'il vous plaît ... dessine-moi un octaèdre ...

4. Donner le nombre de sommets et le nombre de HDF
a) du simplexe S_n; b) du cube Q_n; c) de l'octaèdre O_n.

5. Etablissez rigoureusement les descriptions des sommets et HDF des
a) simplexes S_n; b) cubes Q_n; c) octaèdres O_n.

6. Soit $\operatorname{Bip}(P, p, q)$ la bipyramide de base P et de sommets principaux p et q. Décrivez les sommets et les HDF de cette bipyramide; justifiez vos réponses.

7. Soit $P = \operatorname{conv}\{(0,0,1,1),(0,1,0,1),(0,1,1,0),(1,0,0,1),(1,0,1,0),(1,1,0,0)\} \subseteq \mathbb{R}^4$. Déterminer les sommets et les HDF de P.

8. Pour un ensemble de n villes, combien existe-t-il de tours de ces n villes ? A partir de quelle valeur de n ce nombre de tours dépasse-t-il le million ?

9. Soient $P \subseteq \mathbb{R}^m$ et $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ deux polytopes. Montrer l'égalité $\operatorname{vert}(P \times Q) = \operatorname{vert}(P) \times \operatorname{vert}(Q)$. Si $P = \{x \in \mathbb{R}^m \mid Ax \leq b\}$ et $Q = \{y \in \mathbb{R}^n \mid Cy \leq d\}$, montrer qu'on a $P \times Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{m+n} \mid Ax \leq b, Cy \leq d\}$. En déduire une caractérisation des IDF de $P \times Q$.

2.3 Résultats généraux élémentaires

10. Démontrez qu'une inégalité affine $g(x) \leq \alpha$ est valide pour $\mathrm{conv}(X)$ si et seulement si elle est valide pour X, et ceci pour tout $X \subseteq \mathbb{R}^n$.

11. La somme de Minkowski de deux polytopes est encore un polytope. Démontrez ! (Aide : établissez l'égalité $\mathrm{conv}(X) + \mathrm{conv}(Y) = \mathrm{conv}(X + Y)$.)

12. **a)** Démontrez que tout polytope est image affine d'un simplexe. **b)** Formulez et démontrez un résultat analogue pour les zonotopes.

13. Si P est un zonotope de l'espace vectoriel réel V et $g : V \to W$ une application affine vers un espace vectoriel réel W, l'image $g(P)$ est-elle nécessairement un zonotope ?

14. Soit P un polytope dans $\mathbb{R}^{d+1}$ et g la projection de $\mathbb{R}^{d+1}$ vers $\mathbb{R}^d$ définie par $g(x_1, \ldots, x_d, x_{d+1}) = (x_1, \ldots, x_d)$.

a) Quelles inclusions sont correctes ?

$$\begin{aligned} g(\mathrm{vert}(P)) &\subseteq \mathrm{vert}(g(P)) \\ g(\mathrm{vert}(P)) &\supseteq \mathrm{vert}(g(P)) \end{aligned}$$

b) Si H est un HDF de P, alors $g(H)$ est-il nécessairement un HDF de $g(P)$?

c) Si H est un HDF de $g(P)$, alors $g^{-1}(H)$ est-il nécessairement un HDF de P ?

2.4 Faces de polytopes

15. Calculer le nombre de sommets, arêtes et facettes des polytopes de dimension 3 suivants :

a) le simplexe S_3;

b) le cube Q_3;

c) l'octaèdre O_3;

d) l'icosaèdre;

e) le dodécaèdre;

f) le cuboctaèdre.

16. Calculer le nombre de faces de dimension k pour k allant de -1 à n des polytopes suivants :

a) le simplexe S_n;

b) le cube Q_n;

c) l'octaèdre O_n.

17. Si F est une face du polytope P, l'ensemble ordonné $(\{G \in \mathcal{F}(P) \mid G \subseteq F\}, \subseteq)$ est-il isomorphe au treillis des faces d'un polytope ?

18. Toute face d'un polytope P de dimension d est-elle contenue dans une *chaîne* de $d + 2$ faces, c.-à-d. une suite de faces de la forme

$$\varnothing = F_{-1} \subsetneq F_0 \subsetneq F_1 \subsetneq \cdots \subsetneq F_d = P \text{ ?}$$

19. Soit P et Q deux polytopes. Montrer que P et Q ont même type combinatoire ssi il existe une bijection $\beta : \mathrm{vert}(P) \to \mathrm{vert}(Q)$ telle que pour tout $X \subseteq \mathrm{vert}(P)$ il vient : X est l'ensemble des sommets d'une face de P ssi $\beta(X)$ est l'ensemble des sommets d'une face de Q.

2.5 Polytopes cycliques

20. Construisez le treillis des faces du polytope cyclique $C_3(4)$; donnez un polytope “bien” connu ayant le même type combinatoire. Mêmes questions pour $C_3(5)$.

21. Existe-t-il un polytope cyclique $C_d(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ ayant le même type combinatoire que

a) le tétraèdre ou simplexe S_3 ?

b) le cube Q_3 ?

c) l’octaèdre O_3 ?

22. Il a été vu au cours que pour $d \geq 4$ le graphe du polytope cyclique $C_d(n)$ est complet. Démontrez ce résultat autrement en prouvant puis appliquant le critère général suivant : deux sommets d’un polytope quelconque sont adjacents si et seulement si l’intersection des facettes contenant ces deux sommets n’a pas d’autre sommet que ces deux-là.

23. Le graphe d’un polytope détermine-t-il la dimension du polytope ? Le treillis des faces détermine-t-il la dimension ?

24. Quels polytopes de dimension trois ont un graphe qui est complet ?

3 Systèmes d’inégalités linéaires

1. Soit le système d’inégalités linéaires

$$\left\{\begin{array}{rcr} 2x_1 - x_2 & \leq & 5 \\ -x_1 + 3x_2 & \leq & -1 \\ 5x_1 + 2x_2 & \leq & 0 \\ -2x_1 + 3x_2 & \leq & 4 \end{array}\right.$$

Mettez en oeuvre la méthode de Fourier-Motzkin pour vérifier si ce système admet une solution. Ensuite, faites une représentation graphique de l’ensemble des solutions. Sur le dessin, interprétez les calculs que vous avez effectués.

2. Considérons le système d’inégalités linéaires

$$\left\{\begin{array}{rcr} x_1 - x_2 + x_3 & \leq & 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 & \leq & -1 \\ -x_1 + x_2 + 7x_3 & \leq & 5 \end{array}\right.$$

En appliquant la méthode de Fourier-Motzkin, vérifiez si ce système admet une solution. Donnez une interprétation géométrique des étapes de la méthode.

2. Donnez une condition nécessaire et suffisante sur les seconds membres b_1, b_2, …, b_5 pour que le système suivant d’inégalités linéaires admette une solution.

$$\left\{\begin{array}{cccccccc} x_1 - x_2 & & & & & \leq & b_1 \\ & x_2 - x_3 & & & & \leq & b_2 \\ & & x_3 - x_4 & & & \leq & b_3 \\ & & & x_4 - x_5 & & \leq & b_4 \\ -x_1 & & & & x_5 & \leq & b_5 \end{array}\right.$$