MATH-F-206 — Mathématique Combinatoire
Corrections de certains des exercices

1 Convexité dans un espace affin réel

3. Considérons un ensemble X fini de points, $X = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. Vérifier que l'enveloppe affine de X est décrite par

$$\text{aff } X = \{\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \ldots + \lambda_n p_n \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K \text{ et } \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1\}.$$

Comment adapter ce résultat dans le cas où X est quelconque ?

Correction (1ère méthode). La première étape est de démontrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes pour un sous-ensemble S donné de $A(V)$:

(i) S est un sous-espace affin ;

(ii) $\forall \lambda \in K$, $\forall p, q, r \in S : p + \lambda(r - q) \in S$;

(iii) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, $\forall p_1, \ldots, p_n \in S : \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i \in S$.

Géométriquement, la condition (ii) signifie que pour tout triple de points p, q, r dans S, la droite passant par p et de vecteur directeur $r - q$ est entièrement contenue dans S, et la condition (iii) signifie que toute combinaison affine de points pris dans S appartient à S. Par un résultat du cours, on a (i) $\Leftrightarrow$ (ii). Il est facile de voir que (iii) $\Rightarrow$ (ii) (pourquoi ?). Nous allons maintenant démontrer (ii) $\Rightarrow$ (iii), par induction sur n. Supposons que S vérifie (ii).

- Pour $n = 1$, (iii) est trivialement vérifiée.
- Pour $n = 2$, on a $\sum_{i=1}^n \lambda_i p_i = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 = (1 - \lambda_2)p_1 + \lambda_2 p_2 = p_1 + \lambda_2(p_2 - p_1)$, donc ce point appartient à S par (ii). Par conséquent, (iii) est vraie pour $n = 2$.
- Supposons que (iii) est vraie pour $n \leq k$ et prouvons qu'elle est vraie pour $n = k + 1$ (avec $k \geq 2$). Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, et $p_1, \ldots, p_n \in S$. Posons $s := \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i$.

  Cas 1. Il existe un indice j tel que $\lambda_j \neq 1$. Alors, en posant $\mu = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \lambda_i$, on a $\mu \neq 0$ (pourquoi ?) et il vient :

$$s = \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i = \lambda_j p_j + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \lambda_i p_i = \lambda_j p_j + \mu \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \mu^{-1} \lambda_i p_i \right).$$

  Le point s est donc une combinaison affine de deux points dont le premier est dans S et le deuxième est lui-même une combinaison affine de $n - 1 = k$ points pris dans S. Par l'hypothèse d'induction, cette dernière combinaison affine est un point de S. Il s'en suit que s appartient à S.

  Cas 2. $\lambda_i = 1$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. Etant donné que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, on a $n \cdot 1 = 1$ dans K, et donc $(n-1) \cdot 1 = k \cdot 1 = 0$ dans K. En particulier, la caractéristique de K doit être $\neq 0$. Si la caractéristique de K n'est pas 2, on réécrit $s = \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i$ comme suit :

$$s = \sum_{i=1}^n p_i = (p_1 + p_2) + (p_3 + \ldots + p_n) = 2(2^{-1}p_1 + 2^{-1}p_2) + (-1)((-1)p_3 + \ldots + (-1)p_n),$$

et on conclut de la même façon que dans le Cas 1. Si la caractéristique de K est 2, on réécrit $s = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i$ comme suit :

$$s = \sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \sum_{i=3}^{n} p_i = p_1 - 1 \cdot (p_2 - \sum_{i=3}^{n} p_i)$$

et on déduit de (ii) que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i \in S$ (pourquoi peut-on le faire ?). Ceci conclut la démonstration de l'implication (ii) $\Rightarrow$ (iii).

Retournons maintenant à l'énoncé principal et posons

$$S := \{\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \ldots + \lambda_n p_n \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K \text{ et } \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1\}.$$

Comme (i) $\Leftrightarrow$ (ii), S est un sous-espace affin (pourquoi ?). Etant donné que S contient X, on a $\operatorname{aff} X \subseteq S$. Il reste à montrer que $S \supseteq \operatorname{aff} X$, ce qui est immédiat par (iii) appliqué au sous-espace affin $\operatorname{aff} X$ car on a $X \supseteq \operatorname{aff} X$. Si X est quelconque (c-à.-d pas nécéssairement fini), la même preuve montre que $\operatorname{aff} X$ n'est autre que l'ensemble des combinaisons affines (finies) de points pris dans X. ■

Correction (2ème méthode). On montre en posant S égal au membre de droite :

- $X \subseteq S$ (évident : prendre $n = 1$) ;
- S est un sous-espace affin en utilisant (ii) ;
- $S \subseteq \operatorname{aff} X$ par récurrence sur n en utilisant (ii).

Comme les deux premiers points montrent que $\operatorname{aff} X \subseteq S$, on a que $\operatorname{aff} X = S$. ■

Correction (3ème méthode). On utilise un résultat du cours de géométrie de BA1 : le sous-espace vectoriel engendré par un ensemble de vecteurs Y est égal à l'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs pris dans Y. Soit $p \in X$ (si $X = \varnothing$ alors il n'y a rien à démontrer). Alors $(\operatorname{aff} X) - p$ est un sous-espace affin contenant o et aussi $X - p = \{p_1 - p, p_2 - p, \ldots, p_n - p\}$. C'est même le plus petit sous-espace vectoriel contenant $X - p$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\operatorname{aff} X &= p + ((\operatorname{aff} X) - p) \\
&= p + \operatorname{vect}(X - p) \\
&= p + \{\sum_{i=1}^{m} \mu_i q_i \mid m \in \mathbb{N}^*, \mu_i \in K, q_i \in X - p\} \\
&= p + \{\sum_{i=1}^{m} \mu_i (p_i - p) \mid m \in \mathbb{N}^*, \mu_i \in K, p_i \in X\} \\
&= \{(1 - \sum_{i=1}^{m} \mu_i) p + \sum_{i=1}^{m} \mu_i p_i \mid m \in \mathbb{N}^*, \mu_i \in K, p_i \in X\} \\
&= \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i \mid n \in \mathbb{N}^*, \lambda_i \in K, p_i \in X, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}.
\end{aligned}$$

■

27. Soit p un point d'un espace affin réel $A(V)$. Un *semi-espace en p* est un convexe évitant p et maximal pour cette propriété.

a) Lorsque $V = \mathbb{R}^d$ et $d = 1$, 2, ou 3, donner un exemple de semi-espace en p.

b) En dimension quelconque, existe-t-il toujours un semi-espace en p ?

c) Si S est un semi-espace en p, le complément de $S \cup \{p\}$ est-il nécessairement aussi un semi-espace ?

Correction. a) Pour fixer les idées, disons que p est l'origine. Si $d = 1$, alors $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ est un exemple de demi-espace en p. Si $d = 2$, alors $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0, \text{ ou } y = 0 \text{ et } x < 0\}$ est un exemple de demi-espace en p. Si $d = 3$, un exemple est $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z < 0, \text{ ou } z = 0 \text{ et } y < 0, \text{ ou } z = 0 \text{ et } y = 0 \text{ et } x < 0\}$.

b) Oui, en vertu du lemme de Zorn. En effet, soit $\mathcal{C}$ la collection de tous les sous-ensembles convexes de $A(V)$ évitant p, muni de $\subseteq$. Dans cet ensemble partiellement ordonné, toute chaîne possède un majorant. En effet, si $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ est une chaîne, alors

$$\bigcup_{C \in \mathcal{D}} C$$

appartient à $\mathcal{C}$ (voyez-vous pourquoi ?) et est un majorant de $\mathcal{D}$. Donc $(\mathcal{C}, \subseteq)$ possède un élément maximal C^*. Cet élément est un semi-espace en p.

c) Soit $T = \overline{S \cup \{p\}}$. Par définition, p n'appartient pas à T. Si l'on montre que T est convexe, alors c'est un semi-espace en p. En effet, pour tout point a de S, tout point b de $[a, p\rangle \setminus [a, p]$ est tel que $p \in [a, b]$. Donc aucun point de S ne peut être rajouté à T de telle manière à garder un ensemble convexe évitant p. En d'autres termes, T est maximal.

Montrons maintenant que T est convexe, par l'absurde. S'il ne l'était pas, il existerait deux points a et b de T tels que $[a, b]$ contient un point hors de T. Ci-dessous, nous utilisons la Proposition 5 de 1.4 pour traduire la maximalité de S de manière plus simple : pour tout point $t \neq p$ hors de S, il existe un point s de S tel que $p \in [s, t]$.
Cas I. $p \in [a, b]$. Par maximalité de S, il existe un point c de S dans $]p, b\rangle$ et il existe un point d de S dans $\langle a, p[$ Alors p appartient nécessairement au segment $[c, d]$. Comme S est convexe, il vient $p \in S$, une contradiction.
Cas II. Il existe un point c de S tel que $c \in [a, b]$. Par maximalité de S, il existe deux autres points d et e de S tels que $p \in [a, d]$ et $p \in [b, e]$. Par la Proposition 1 de 1.3 appliquée aux deux segments $[a, b]$ et $[a, d]$ émanant de a, il existe un point f dans $[b, p] \cap [c, d]$. Par la Proposition 2 de 1.3 appliquée au triangle de sommets c, d, e, il existe un point g tel que $g \in [e, d]$ et $p \in [c, g]$. Comme S est convexe, il vient $g \in S$ et donc $p \in S$, une contradiction. ∎

35. Si C est un convexe non vide et S un sous-espace affin de $A(\mathbb{R}^d)$ avec $C \cap S = \varnothing$, existe-t-il nécessairement un hyperplan H contenant S et disjoint de C ?

Correction. La réponse est NON. Prenons par exemple $d = 2$, $S = \{(0, 0)\}$ et $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0, \text{ ou } y = 0 \text{ et } x < 0\}$. ∎

36. Donner deux convexes bornés de $A(\mathbb{R}^d)$ qui sont séparés par un unique hyperplan.

Correction. Considérons par exemple les convexes $C_1 = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \sum_{i=1}^d x_i^2 \leq 1\}$ et $C_2 = \{(1, 0, \dots, 0)\}$. Etant donné que $p \overset{\text{def.}}{=} (1, 0, \dots, 0) \in C_1$, tout hyperplan séparant (c.-à-d. séparant faiblement) C_1 et C_2 passe par p. Le seul hyperplan séparant faiblement C_1 et C_2 est donc l'hyperplan tangent à C_1 en p, c.-à-d. l'hyperplan d'équation $x_1 = 1$. ∎

39. Dans l'espace affin $A(\mathbb{R}^d)$, soit C un sous-ensemble. Lesquelles des implications suivantes sont correctes ?

a) C est convexe et ouvert $\Rightarrow$ C est intersection de demi-espaces stricts

b) C est intersection de demi-espaces stricts $\Rightarrow$ C est convexe et ouvert

c) C est convexe et fermé $\Rightarrow$ C est intersection de demi-espaces larges

d) C est intersection de demi-espaces larges $\Rightarrow$ C est convexe et fermé

Correction. On voit directement que l'implication d) est vraie. En effet, l'intersection d'une famille de convexes est toujours convexe, l'intersection d'une famille de fermés est toujours fermée. De plus, l'implication b) est fausse car

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}]0-1/n, 1+1/n[= [0,1].$$

(Le membre de gauche est l'intersection d'une famille de demi-espaces stricts et le membre de droite est un convexe non ouvert.)

L'implication a) est vraie pour la raison suivante. Appelons C' l'intersection de tous les demi-espaces stricts contenant C. Par la définition même de C', nous voyons que $C \subseteq C'$. Si cette inclusion n'était pas une égalité, il existerait un point p dans $C' \setminus C$. Considérons un hyperplan H séparant (faiblement) les convexes C et $\{p\}$. Etant donné que C est ouvert, il est contenu dans un des demi-espaces stricts déterminés par H. De plus, p n'est pas dans le même demi-espace strict car H sépare C et $\{p\}$. Donc p n'appartient pas à C', une contradiction.

Pour démontrer l'implication c) on peut suivre le même raisonnement que ci-dessus et d'appliquer le théorème de séparation (faible) au convexe fermé C et à une 'petite' boule autour du point p (comme C est ouvert, son complémentaire est fermé et il existe une boule centrée en p disjointe de C). ■

2 Polytopes en ensembles polyédriques

2. Les sommets et les HDF des **a)** simplexes **b)** cubes **c)** octaèdres ont été décrits au cours.

Etablissez rigoureusement ces descriptions.

Correction. a) Notons p_1, p_2, …, p_{d+1} les points du repère affin R tel que $S_d = \mathrm{conv}(R)$. Pour i allant de 1 à $d+1$, notons H_i l'hyperplan $\mathrm{aff}(R \setminus \{p_i\})$ et H_i' l'hyperplan parallèle à H_i passant par p_i. Etant donné que R est un repère affin, on a $p_i \notin H_i$ et donc H_i' est disjoint de H_i. Par choix de H_i', tous les points de R sont d'un même côté de H_i'. De plus, p_i est le seul point de R sur H_i'. Donc tous les points de S_d sont d'un même côté de H_i' et p_i est le seul point de S_d sur H_i'. Donc chaque point de R est exposé. Il s'en suit que $\mathrm{vert}(S_d) = R$.

Par la définition même de HDF, il vient que les HDF de S_d sont exactement les $d+1$ hyperplans H_1, H_2, …, H_{d+1}.

b) Définissons Q_d comme l'enveloppe convexe de l'ensemble $X \stackrel{\text{def.}}{=} \{0,1\}^d = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x_i = 0$ ou $1\}$. Montrons tout d'abord que chaque point de X est extrême dans Q_d. Par symétrie, il suffit de montrer que l'origine o est extrême dans Q_d. (En effet, les affinités $\sigma_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d : (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_d) \mapsto (x_1, x_2, \ldots, 1-x_i, \ldots, x_d)$ préservent X, donc préservent Q_d.) Si o n'était pas extrême dans Q_d, il existerait deux points p et q distincts de o dans Q_d tels que

$o \in [p, q]$, c.-à-d.

$$0 = \lambda p_i + (1-\lambda) q_i \quad \forall i = 1, 2, \ldots, d$$

pour un certain $\lambda \in]0, 1[$. Etant donné que l'inégalité $x_i \geq 0$ est valide pour tous les points de X, elle est valide pour tous les points de $Q_d = \text{conv}(X)$. Donc nous avons $p_i \geq 0$ et $q_i \geq 0$ pour tout i. La seule manière de satisfaire l''egalité $0 = \lambda p_i + (1-\lambda) q_i$ est donc d'avoir $p_i = q_i = 0$ (car $\lambda \in [0, 1]$). Comme ceci est vrai pour tout i, on conclut que $p = q = o$, une contradiction. Donc o est extrême dans Q_d et par conséquent tout point de X est extrême dans Q_d et $\text{vert}(Q_d) = X$.

Une autre méthode pour montrer que $\text{vert}(Q_d) = X$ est de prouver que tout point de X est exposé ou, de manière équivalente (par symétrie), que l'origine est un point exposé de Q_d. Ceci peut se faire en considérant l'hyperplan d'appui $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$.

En utilisant le même argument de symétrie que ci-dessus, on remarque que pour déterminer tous les HDF, il suffit de déterminer les HDF passant par l'origine (les autres HDF s'obtenant à partir de ceux-là en appliquant les symétries σ_i). Soit $\sum_{i=1}^{d} a_i x_i = 0$ l'équation d'un HDF H de Q_d passant par l'origine. Comme H est d'appui pour Q_d, tous les a_i doivent être du même signe. En effet, si on a $a_i < 0$ et $a_j > 0$ pour certains indices i et j, alors les points e_i et e_j de la base canonique de $\mathbb{R}^d$ sont situés de part et d'autre de H, une contradiction. Sans perte de généralité, on peut supposer que $a_i \geq 0$ pour tout i. Un point p de X se trouve sur H si et seulement si on a $p_i = 0$ dès que $a_i \neq 0$. Comme H est un hyperplan, au moins un des a_i doit être non nul. Comme H est un HDF (et donc contient d points de X affinement indépendants qui engendrent H), il faut qu'exactement un des a_i soit non nul. En effet, dans le cas contraire, tous les points de X sur H satisfont au moins deux équations du type $x_i = 0$ et ne peuvent donc pas engendrer un hyperplan. L'équation de H, une fois normalisée, est donc de la forme $x_i = 0$. Donc tous les HDF par l'origine sont définis par des équations de ce type. Inversément, toutes ces équations définissent des HDF par l'origine (voyez-vous pourquoi ?). En mettant tout ensemble (y compris l'argument de symétrie du début), on obtient que les HDF de Q_d sont exactement tous les hyperplans définis par des équations du type $x_i = 0$ ou $x_i = 1$.

Il y a un autre moyen de montrer ce résultat (expliqué aux exercices). On peut d'abord montrer que $Q_d = \{x \in \mathbb{R}^d \mid 0 \leq x_i \leq 1 \ \forall i = 1, 2, \ldots, d\}$ par récurrence et puis utiliser le fait (voir une Proposition de 2.1) que toutes les IDF d'un polytope figurent dans **toute** description de ce polytope par un système d'inégalités linéaires.

c) Pour terminer, considérons le cas de $O_d \stackrel{\text{def.}}{=} \text{conv}\{\pm e_1, \pm e_2, \ldots, \pm e_d\}$, où e_1, e_2, …, e_d sont les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^d$. Appelons X l'ensemble $\{\pm e_1, \pm e_2, \ldots, \pm e_d\}$. Il est aisé de prouver que chaque point de X est exposé dans O_d. En effet, il suffit de constater que l'hyperplan d'équation $x_i = \pm 1$ laisse tous les points de X d'un côté et que le seul point de X sur cet hyperplan est le point $\pm e_i$. Par conséquent, nous avons $\text{vert}(O_d) = X$.

Pour caractériser les HDF de O_d, l'observation cruciale est qu'un hyperplan contenant e_i et $-e_i$ contient également l'origine o, coupe donc le polytope en son barycentre, et ne peut pas être d'appui. Il résulte de ceci que les HDF de O_d sont exactement les hyperplans engendrés par un sous-ensemble Y de d des $2d$ sommets de O_d tel que $e_i \in Y$ ssi $-e_i \notin Y$. Ces hyperplans sont au nombre de 2^d et ont des équations de la forme $\sum_{i=1}^{d} \epsilon_i x_i = 1$ où chaque $\epsilon_i = \pm 1$. ■

11. Calculer le nombre de faces de dimension k pour k allant de -1 à d des polytopes suivants :

a) le simplexe S_d ;

b) le cube Q_d ;

c) l'octaèdre O_d.

Remarque préliminaire. Les trois faits suivants vont nous être utiles à propos d'un polytope P :

(i) toute intersection de faces de P est une face de P (un fait établi au Chapitre 1 pour tout convexe) ;

(ii) toute face de P est intersection de (0, 1, 2, ..., d ou $d+1$) facettes de P (Corollaire 2 de la Proposition 3 de 2.4) ;

(iii) si F est G sont deux faces de P, alors $\mathrm{vert}(F \cap G) = \mathrm{vert}(F) \cap \mathrm{vert}(G)$ (ceci découle directement de la Proposition 1 de 2.4).

Correction. a) Notons p_1, p_2, ..., p_{d+1} les sommets de S_d. Les facettes de S_d sont déterminées par les hyperplans $H_i \stackrel{\text{def.}}{=} \mathrm{aff}(\{p_1, p_2, \ldots, p_{d+1}\} \setminus \{p_i\})$ pour $i = 1, 2, \ldots, d+1$ et sont donc de la forme

$$F_i \stackrel{\text{def.}}{=} S_d \cap H_i = \mathrm{conv}(\{p_1, p_2, \ldots, p_{d+1}\} \setminus \{p_i\})$$

Par les faits (i) et (ii), les faces de S_d sont exactement toutes les intersections possibles de facettes de S_d. Voyons par exemple ce que vaut $F_i \cap F_j \cap F_k$ si i, j et k sont distincts. Nous avons

$$F_i \cap F_j \cap F_k = \mathrm{conv}(\{p_1, p_2, \ldots, p_{d+1}\} \setminus \{p_i, p_j, p_k\})$$

par le fait (iii). En généralisant, on voit que tout sous-ensemble de sommets de S_d est l'ensemble des sommets d'une face de S_d. Réciproquement, toute face de S_d est l'enveloppe convexe d'un sous-ensemble de sommets de S_d (cf. Proposition 1 de 2.4). De plus, la dimension de la face correspondant à un sous-ensemble de $k+1$ sommets sera de dimension k. Le nombre de faces de S_d de dimension k est donc égal à

$$f_k(S_d) = \binom{d+1}{k+1},$$

c'est-à-dire au nombre de sous-ensembles à $k+1$ éléments d'un ensemble à $d+1$ éléments.

b) Les facettes de Q_d sont de la forme

$$\begin{aligned} F_i^{(0)} &\stackrel{\text{def.}}{=} Q_d \cap \{x \in \mathbb{R}^d \mid x_i = 0\} = \{x \in Q_d \mid x_i = 0\}, \text{ ou} \\ F_i^{(1)} &\stackrel{\text{def.}}{=} Q_d \cap \{x \in \mathbb{R}^d \mid x_i = 1\} = \{x \in Q_d \mid x_i = 1\}. \end{aligned}$$

Comme à la partie a) de l'exercice, on sait, par les faits (i) et (ii), que les faces de Q_d s'obtiennent en intersectant des facettes. Par exemple, les ensembles suivants sont des faces de Q_d (dès que $d \geq 3$)

$$\begin{aligned} F_1^{(0)} \cap F_2^{(1)} &= \{x \in Q_d \mid x_1 = 0, x_2 = 1\}, \\ F_1^{(0)} \cap F_1^{(1)} &= \{x \in Q_d \mid x_1 = 0, x_1 = 1\} = \varnothing, \\ F_1^{(1)} \cap F_2^{(0)} \cap F_3^{(1)} &= \{x \in Q_d \mid x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1\}. \end{aligned}$$

En général, les faces non vides de Q_d s'obtiennent en calculant l'intersection d'un ensemble de facettes tel que $F_i^{(0)}$ est dans l'ensemble ssi $F_i^{(1)}$ n'est pas dans l'ensemble. La dimension d'une telle face est $d-t$, où t est le nombre de facettes comprises dans l'ensemble. Donc pour obtenir une face de dimension k, il faudra intersecter $t = d-k$ facettes. Tout ensemble de $d-k$ facettes satisfaisant la condition plus haut peut s'obtenir en choisissant d'abord un ensemble de $d-k$ d'indices parmi d et puis après en déterminant pour chaque indice choisi i si $F_i^{(0)}$ ou si $F_i^{(1)}$ doit être prise. En conclusion, le nombre de faces de dimension k de Q_d est égal à

$$f_k(Q_d) = \begin{cases} \binom{d}{d-k} \cdot 2^{d-k} & \text{si } k \neq -1 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

c) En se basant sur une description des facettes similaire au b) (en terme des sommets), on établit une correspondance entre les faces propres de O_d de dim k et les ensembles de $k+1$

sommets tels que e_i est dans cet ensemble ssi $-e_i$ n'y est pas. On conclut comme à la partie c) que le nombre de faces de dimension k de O_d est égal à

$$f_k(O_d) = \begin{cases} \binom{d}{k+1} \cdot 2^{k+1} & \text{si } k \neq d \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$ ■

12. Si F est une face du polytope P, l'ensemble ordonné $(\{G \in \mathcal{F}(P) \mid G \subseteq F\}, \subseteq)$ est-il isomorphe au treillis des faces d'un polytope ?

Correction. Par la Proposition 1 de 2.4, toute face d'un polytope est un polytope. Donc F est un polytope. Il suffit alors de montrer :

$$\mathcal{F}(F) = \{G \in \mathcal{F}(P) \mid G \subseteq F\}.$$

$\boxed{\supseteq}$ Toute face G de P contenue dans F est une face de F. En effet, si $G = H \cap P$ pour un certain hyperplan d'appui H (qui est d'appui pour P) alors cet hyperplan est aussi d'appui pour F (car $G \subseteq F \subseteq P$) et on a $G = H \cap P = H \cap F$. Donc G est une face de F. Enfin, si $G = F$ ou $G = \varnothing$ alors G est (trivialement) une face de F.

$\boxed{\subseteq}$ Soit G une face de F. Nous souhaitons montrer que la face G de la face F de P est aussi une face de P (en résumé : toute face d'une face est encore une face). Les cas $G = F$ et $G = \varnothing$ étant triviaux, on peut les écarter. Il existe alors deux formes affines f et g telles que
- $f(x) \geq 0$ $\forall x \in P$ et $F = \{x \in P \mid f(x) = 0\}$, et
- $g(x) \geq 0$ $\forall x \in F$ et $G = \{x \in F \mid g(x) = 0\}$.

(Un raisonnement est requis pour montrer l'existence de ces deux formes affines. Voyez-vous lequel ?) Soit $\varepsilon > 0$ et h la forme affine définie par $h = f + \varepsilon g$. Montrons qu'on peut choisir ε de telle sorte que

$$h(x) \geq 0 \ \forall x \in P \text{ et } G = \{x \in P \mid h(x) = 0\}.$$

Cas I. $g(x) \geq 0$ est valide pour P (c'est-à-dire $g(x) \geq 0$ $\forall x \in P$). Dans ce cas la forme affine h vérifie les conditions voulues car :

$$\begin{array}{rll} & f(x) \geq 0 & \forall x \in P \\ \varepsilon \times & g(x) \geq 0 & \forall x \in P \\ \hline & f(x) + \varepsilon g(x) \geq 0 & \forall x \in P \end{array}$$

pour tout choix de $\varepsilon > 0$ et

$$\begin{aligned} \{x \in P \mid h(x) = 0\} &= \{x \in P \mid f(x) + \varepsilon g(x) = 0\} \\ &= \{x \in P \mid f(x) = 0 \text{ et } g(x) = 0\} \\ &= \{x \in F \mid g(x) = 0\} = G \end{aligned}$$

Cas II. $g(y) < 0$ pour au moins un point y de P. Dans ce cas, posons $\beta = \min\{g(x) \mid x \in P\}$ et $\alpha = \min\{f(x) \mid x \in \text{vert}(P), x \notin F\}$. Par hypothèse, on a $\beta < 0$. De plus, on a $\alpha > 0$ car F est exactement l'ensemble des points de P où f s'annule et $\text{vert}(P)$ est fini (P est un polytope !).

Prenons maintenant n'importe quel ε dans l'intervalle ouvert $]\,0, -\alpha/\beta\,[$ et posons à nouveau $h = f + \varepsilon f$. Alors, on a $h(x) \geq 0$ $\forall x \in P$ ou, de manière équivalente, $h(x) \geq 0$ $\forall x \in \text{vert}\, P$. C'est clair pour $x \in F$ (voir le raisonnement utilisé dans le Cas I). Si $x \in \text{vert}(P)$ et $x \notin F$, il vient

$$h(x) = f(x) + \varepsilon g(x) \geq \alpha + \varepsilon\beta > 0$$

(la dernière inégalité est due au choix de ε). Pour vérifier que l'ensemble des points de P où h s'annule est bien G, il suffit (par la Proposition 1 de 2.4 encore) de vérifier que l'ensemble des sommets de P où h s'annule est exactement l'ensemble des sommets de G.

– Si $x \in \text{vert}(G) = \text{vert}(F) \cap G = \text{vert}(P) \cap G \cap F = \text{vert}(P) \cap G$ alors on a $h(x) = 0$ par définition de h.
– Si $x \in \text{vert}(F) = \text{vert}(P) \cap F$ et $x \notin G$ alors on a $h(x) > 0$ (pourquoi ?).
– Si $x \in \text{vert}(P)$ et $x \notin F$ alors on a $h(x) > 0$.

Par conséquent, l'ensemble des sommets de P où h s'annule est exactement l'ensemble des sommets de G, ce qui implique que l'ensemble des points de P où h s'annule est G. ∎

13. Toute face d'un polytope P de dimension d est-elle contenue dans une *chaîne* de $d+2$ faces, c.-à-d. une suite de faces de la forme

$$\varnothing = F_{-1} \subsetneq F_0 \subsetneq F_1 \subsetneq \cdots \subsetneq F_d = P \; ?$$

Correction. Procédons par induction sur d. Si $d = 0$ alors l'assertion est triviale car F apparaît nécessairement dans la chaine $\varnothing \subsetneq P$. Supposons que l'assertion est vraie pour $d = n$ et démontrons-la pour $d = n + 1$.
Cas I. F est une face propre de P. Soit G une face propre de P contenant F et maximale pour l'inclusion. Par construction, G est donc une facette de P. Par la Proposition 2 de 2.4, la dimension de G est $d - 1 = n$. En appliquant l'assertion au polytope G et à sa face F, on obtient une chaîne

$$\varnothing = F_{-1} \subsetneq F_0 \subsetneq F_1 \subsetneq \cdots \subsetneq F_{d-1} = G$$

de faces de G (qui sont également des faces de P par l'exercice 12) où F figure. Cette chaîne s'étend en une chaîne

$$\varnothing = F_{-1} \subsetneq F_0 \subsetneq F_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \underbrace{F_{d-1}}_{=G} \subsetneq F_d = P.$$

de faces de P où F figure.
Cas I. $F = P$. Soit G n'importe quelle facette de P. En appliquant l'assertion au polytope G (qui est de dimension $d - 1 = n$) et à sa face G, on trouve une chaîne

$$\varnothing = F_{-1} \subsetneq F_0 \subsetneq F_1 \subsetneq \cdots \subsetneq F_{d-1} = G$$

de faces de G. Il suffit alors de prolonger cette chaîne en :

$$\varnothing = F_{-1} \subsetneq F_0 \subsetneq F_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \underbrace{F_{d-1}}_{=G} \subsetneq F_d = P = F.$$

∎

17. Il a été vu au cours que pour $d \geq 4$ le graphe du polytope cyclique $C_d(n)$ est complet. Démontrez ce résultat autrement en prouvant puis appliquant le critère général suivant : deux sommets d'un polytope quelconque sont adjacents si et seulement si l'intersection des facettes contenant ces deux sommets n'a pas d'autre sommet que ces deux-là.

Correction. Par définition, deux sommets p et q d'un polytope P sont adjacents ssi $[p, q]$ est une face de P. Etant donné que toute face de P est une intersection de facettes (Corollaire 2 de la Proposition 3 de 2.4), p et q sont adjacents ssi l'intersection de **toutes** les facettes contenant p et q est égale à $[p, q]$. Cette dernière condition est équivalente à : l'intersection des facettes contenant p et q n'a pas d'autre sommet que p et q (ici on utilise la Proposition 1 de 2.4).

Montrons maintenant que le graphe de $C_4(n)$ est complet ($n \geq 5$), c'est-à-dire que tout sommet de ce polytope est adjacent à tout autre sommet. En vertu du critère général, il s'agit de prouver que pour tout triple p, q, r de sommets distincts de $C_4(n)$, il existe une facette de $C_4(n)$ contenant les sommets p et q mais pas le sommet r.

Dans la suite, nous identifierons un sommet de $C_4(n)$ avec les nombres entiers de 1 à n de telle sorte que le sommet i corresponde au point $\gamma(u_i)$. De plus, nous représenterons les facettes de $C_d(n)$ par des mots de longueur n formés des symboles $\bullet$ et $\circ$, notre convention étant celle du cours, c.-à-d. que le symbole $\bullet$ correspond à un sommet sur la facette et le symbole $\circ$ à un sommet hors de la facette. Les facettes de $C_4(n)$ s'identifient alors aux mots comportant exactement 4 symboles $\bullet$ respectant la condition de parité de Gale (les blocs maximaux de $\bullet$ consécutifs sont de longueur paire, excepté ceux touchant une extrémité).

Exemple : $n = 7$, $p = 2$, $q = 6$ et $r = 1$. Nous cherchons une facette dont la configuration est de la forme : $\circ \bullet - - - \bullet -$. Par la condition de parité de Gale, il doit y avoir un $\bullet$ en position 3 et un $\bullet$ en position 5 ou en position 7. Voici le mots d'une facette satisfaisant les conditions voulues : $\circ \bullet \bullet \circ \bullet \bullet \circ$ (remarque : il y a exactement une autre facette qui convient, voyez-vous laquelle ?).

Prouvons maintenant qu'il existe toujours une facette de $C_4(n)$ contenant deux sommets donnés p et q et ne contenant pas un troisième sommet r. Il n'est pas restrictif de supposer que $p < q$. L'idée est d'essayer de placer deux symboles $\bullet$, l'un juste à gauche ou juste à droite de p et l'autre juste à gauche ou juste à droite de q. Si cela n'est pas possible, alors nous devons nécessairement nous trouver dans l'un des cas suivants :
Cas I. $p = 1$ et $r = 2$. Si $q < n - 1$ alors nous plaçons un symbole $\bullet$ à droite de q ainsi qu'un en position n. Si $q = n - 1$ alors nous plaçons deux symboles $\bullet$, un en position $n - 2$ et l'autre en position n. Si $q = n$ alors nous plaçons deux symboles $\bullet$, un en position $n - 2$ et l'autre en position $n - 1$.
Cas II. $q = n$ et $r = n - 1$. Similaire au Cas I.
Cas III. $p = 1$ et $q = 2$. Nous plaçons deux symboles $\bullet$ le plus à gauche possible, sauf si $r = 4$ et $n > 5$ auquel cas nous plaçons deux symboles $\bullet$, un en position 5 et l'autre en position 6.
Cas IV. $p = n - 1$ et $q = n$. Similaire au Cas III.
Cas V. $q = p + 1 < n$ et $r = p - 1$. Nous plaçons deux symboles $\bullet$, l'un en position 1 et l'autre en position n. Sauf si $r = 1$, auquel cas nous plaçons deux symboles $\bullet$ consécutivement en position $n - 1$ et n.
Cas VI. $q = p + 1 < n$ et $r = p + 2$. Similaire au Cas V.
Cas VII. $p = 1$, $q = 3$ et $r = 4$. Nous plaçons deux symboles $\bullet$, l'un en position 2 et l'autre en position n.
Cas VIII. $p = n - 2$, $q = n$ et $r = n - 3$. Similaire au Cas VII. ■

18. Le graphe d'un polytope détermine-t-il la dimension du polytope ? Le treillis des faces détermine-t-il la dimension ?

Correction. Etant donné que les polytopes $C_d(n)$ ont tous le même graphe pour $d \geq 4$, à savoir, le graphe complet à n sommets, le graphe d'un polytope ne détermine pas sa dimension. D'un autre côté, la dimension d'un polytope P peut facilement calculer sur base de son treillis de faces. En effet, dans le treillis de faces d'un polytope, toutes les collections maximales de faces totalement ordonnées pour l'inclusion (chaînes maximales) ont le même nombre d'éléments : précisément $\dim(P) + 2$. ■