MATH-F-307
Mathématiques discrètes

Professeur : Samuel Fiorini *Auteur :* Jérémy Pagé

Septembre à Décembre 2010

Remerciements

Je tiens à remercier tout particulièrement Antoine Dewilde, Valérie Pirenne, Yves-Rémi Van Eycke, Sophie Vervier et Jérémy Vion pour leurs relectures attentives et leurs commentaires qui ont permis de relever plusieurs erreurs et permettre ainsi l'amélioration de mes notes.

Table des matières

Chapitre 1

Comptage élémentaire

1.1 Principes de base

Définition.

- *Deux ensembles ont la même* cardinalité *(taille) s'il existe une bijection de l'un vers l'autre.*
- *Un ensemble E a une cardinalité n (pour $n \in \mathbb{N}$) s'il est en bijection avec $[n] := 1, 2, \ldots, n$.*

Remarque.

$$\begin{aligned} n &= 0 \qquad [n] = [0] = \emptyset \\ n &= 1 \qquad [n] = 1 \end{aligned}$$

Ceci est noté $|E| = n$, parfois $\#E = n$. On dit alors que E est fini.

Si $A_1, A_2, \ldots, A_k$ sont des ensembles finis disjoints :
- $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_k| = \sum_{i=1}^{k} |A_i|$
- $|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_k| = \prod_{i=1}^{k} |A_i|$

Exemple.

$$A_1 = \{\textit{salade grecque, carpaccio}\} \qquad \textit{(entrées)}$$
$$A_2 = \{\textit{spaghetti diable, steak frites, moules}\} \qquad \textit{(plats principaux)}$$

$$\#\textit{total de plats} = |A_1 \cup A_2| = 5$$
$$\#\textit{total de menus entrée + plat principal} = |A_1 \times A_2| = |A_1| \cdot |A_2| = 6$$

Définition. $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k = \{(a_1, a_2, \ldots, a_k) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_k \in A_k\}$

1.2 Factorielles

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = \prod_{k=1}^{n} k$$

C'est le nombre de façon de ranger (ordonner) n objets distincts, de fonctions bijectives entre deux ensembles de taille n.

Remarque.

- *Un produit vide est toujours égal à 1 ;*
- *Une somme vide est toujours égale à 0.*

Donc $0! = 1$.

Démonstration. Soit $f : [n] \to [n]$ bijective

$$\begin{aligned} n &\text{ choix pour } f(1) \\ n-1 &\text{ choix pour } f(2) \\ n-2 &\text{ choix pour } f(3) \\ &\vdots \\ 1 &\text{ choix pour } f(n) \end{aligned}$$

Au total, on a :

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

□

Exemple. *Nombre d'ordres totaux sur* $E = \{a, b, c\}$ *est* $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

$$\begin{array}{ccc} a < b < c & b < a < c & c < a < b \\ a < c < b & b < c < a & c < b < a \end{array}$$

$n!$ *grandit très vite :*

n	0	1	2	3	4	5	6	...	10	...
$n!$	1	1	2	6	24	120	720	...	3628800	...

au-delà, les algorithmes deviennent lents à les énumérer.

*On parle d'*explosion combinatoire.

Remarque.

$$\begin{aligned} (n!)^2 &= (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n)(n \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \\ &= \prod_{k=1}^{n} \underbrace{k(n-k+1)}_{\text{polynôme du second degré en } k} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} & n \leq k(n-k+1) \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \qquad \forall 1 \leq k \leq n \\ \Rightarrow\ & \underbrace{\prod_{k=1}^{n} n}_{n^n} \leq (n!)^2 \leq \underbrace{\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{4}(n+1)^2}_{\left(\frac{1}{4}\right)^n (n+1)^{2n}} \\ \Rightarrow\ & \boxed{n^{\frac{n}{2}} \leq n! \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (n+1)^n} \end{aligned}$$

Gauss (9 ans) a utilisé un truc *semblable pour calculer* $1 + 2 + \ldots + n$.

Pour n grand, on a

$$\begin{aligned} \frac{n}{2} \log_2 n \leq \log_2 n! &\leq -n + n \log_2(n+1) \\ &\leq n \log_2 n \end{aligned}$$

On a vu pour $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} n! &= \#\text{bijections de } [n] \text{ dans } [n] \\ &= \#\text{injections de } [n] \text{ dans } [n] \end{aligned}$$

Pour $n, k \in \mathbb{N}$ avec $k \leq n$

$$\begin{aligned} &\#\text{injections de } [k] \text{ dans } [n] \\ = &\underbrace{n}_{\substack{\#\text{choix} \\ \text{pour } f(1)}} \cdot \underbrace{(n-1)}_{\substack{\#\text{choix pour} \\ f(2) \text{ sachant } f(1)}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(n-k+1)}_{\substack{\#\text{choix pour } f(k) \\ \text{sachant } f(1), f(2), \ldots, f(k-1)}} \\ = &\frac{n!}{(n-k)!} \end{aligned}$$

C'est le nombre de suites de k objets pris parmi n, sans répétition (*sélection ordonnée sans répétition*).

Exemple. *Il y a* $\frac{26}{(26-4)!}$ *mots sur l'alphabet*

$$\{a, b, \ldots, z\}$$

dont les lettres sont différentes :

$$(abcd, abce, \ldots, wxyz)$$

1.3 Coefficients binomiaux I

$$\binom{n}{k} := \#\text{sous-ensembles de taille } k \text{ d'un ensemble de taille } n$$

Il faut lire n *choose* k. Défini pour $n, k \in \mathbb{N}$ $(k \leq n)$.

Proposition (Symétrie).

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}}$$

Démonstration. Appelons E notre ensemble de taille n. Le passage au complémentaire est une bijection entre les sous-ensembles de E de taille k et les sous-ensembles de E de taille $n-k$. □

Proposition (Absorption/Extraction).

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}} \qquad \forall n, k \in \mathbb{N}_0$$

Démonstration. Démontrons $\binom{n}{k}k = n\binom{n-1}{k-1}$ par double comptage.

$$\binom{n}{k}k = \#\text{manières de choisir un sous-ensemble } X \subseteq E \text{ de taille } k\text{, puis un élément } e \text{ dans } X$$

$$n\binom{n-1}{k-1} = \#\text{manières de choisir un élément } e \text{ de } E\text{, puis un sous-ensemble } Y \subseteq E\backslash\{e\} \text{ de taille } k-1$$

On voit

$$\binom{n}{k}k = n\binom{n-1}{k-1}$$

Formellement,

$$\{(X, e) \mid X \subseteq E, |X| = k, e \in X\}$$

et

$$\{(e, Y) \mid e \in E, Y \subseteq E\backslash\{e\}, |Y| = k-1\}$$

sont deux ensembles de tailles respectives $\binom{n}{k}k$ et $n\binom{n-1}{k-1}$ qui sont en bijection $(X, e) \to (e, X\backslash\{e\})$. □

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = \frac{n}{k}\frac{n-1}{k-1}\binom{n-2}{k-2} = \dots$$

$$= \frac{\overbrace{n(n-1)\dots(n-k+1)}^{=\frac{n!}{(n-k)!}}}{\underbrace{k(k-1)\dots 1}_{=k!}} \underbrace{\binom{n-k}{0}}_{=1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

Proposition (Addition/Induction).

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}} \qquad \forall n, k \in \mathbb{N}_0 \ (k \leq n-1)$$

Démonstration. Fixons $e \in E$. Deux cas sont possibles pour un sous-ensemble $S \subseteq E$ de taille k :

Cas 1 : $S \not\ni e$, il y a $\binom{n-1}{k}$ tels S.

Cas 2 : $S \ni e$, il y a $\binom{n-1}{k-1}$ tels S.

Formellement,

$$\{S \subseteq E \mid |S| = k\} = \{S \subseteq E \mid |S| = k, S \not\ni e\} \cup \{S \subseteq E \mid |S| = k, S \ni e\}$$

□

1.4 Coefficients binomiaux II

Prenons $x, y \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{Q}$, ou $\mathbb{C}$, ...).

$$\begin{array}{lccccccccc}
(x+y)^0: & & & & & 1 & & & & \\
(x+y)^1: & & & & 1x & + & 1y & & & \\
(x+y)^2: & & & 1x^2 & + & 2xy & + & 1y^2 & & \\
(x+y)^3: & & 1x^3 & + & 3x^2y & + & 3xy^2 & + & 1y^3 & \\
(x+y)^4: & 1x^4 & + & 4x^3y & + & 6x^2y^2 & + & 4xy^3 & + & 1y^4 \\
\vdots & & & & & & & & &
\end{array}$$

Appelons $a_{n,k}$ le coefficient de $x^{n-k}y^k$ dans $(x+y)^n$ $(\forall n, k \in \mathbb{N},\ k \leq n)$.

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} x^{n-k} y^k = \underbrace{(x+y)(x+y)\dots(x+y)}_{n \text{ fois}}$$

Alors

$$(*) \begin{cases} a_{n,0} & = & \text{coefficient de } x^n = 1 \\ a_{n,n} & = & \text{coefficient de } y^n = 1 \\ a_{n,k} & = & a_{n-1,k} + a_{n-1,k-1} \qquad n > k \geq 1 \end{cases}$$

Idée :

$$(x+y)^n = (x+y)(x+y)^{n-1}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} x^{n-k} y^k &= (x+y) \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1,k} x^{n-1-k} y^k \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1,k} x^{n-k} y^k + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1,k} x^{n-1-k} y^{k+1}}_{\text{remplacer } k+1 \text{ par } k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1,k} x^{n-k} y^k + \sum_{k=1}^{n} a_{n-1,k-1} x^{n-k} y^k \end{aligned}$$

Et ceci $\forall x$, $\forall y$, donc on peut (doit) identifier les coefficients de $x^{n-k}y^k$ à gauche et à droite. Pour $n > k \geq 1$: $a_{n,k} = a_{n-1,k} + a_{n-1,k-1}$.

Théorème (Formule du binôme).

$$\boxed{a_{n,k} = \binom{n}{k}} \qquad \forall n, k \in \mathbb{N}$$

Démonstration.

1. Les nombres $a_{n,k}$ sont entièrement déterminés par $(*)$;
2. En posant $a_{n,k} = \binom{n}{k}$ on obtient une solution.

$$\Rightarrow a_{n,k} = \binom{n}{k} \qquad \forall n, k \in \mathbb{N}$$

□

Triangle de Pascal :

$n=0$:						1					
$n=1$:					1		1				
$n=2$:				1		2		1			
$n=3$:			1		3		3		1		
$n=4$:		1		4		6		4		1	
$n=5$:	1		5		10		10		5		1

Formule du binôme :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

On peut étendre le triangle de Pascal à tout un demi-plan (par des zéros) en préservant l'addition/induction.

Ça colle avec la définition :

$$\binom{n}{k} = \#\text{sous-ensembles à } k \text{ éléments d'un ensemble à } n \text{ éléments}$$

Proposition.

$$\sum_{n=k}^{m} \binom{n}{k} = \binom{m+1}{n+1} \qquad \forall n, k \in \mathbb{N}$$

1.5 Coefficients binomiaux III (applications)

1. #mots de n bits contenant k uns (et donc $n-k$ zéros) $= \binom{n}{k}$;
2. #plus courts chemins de $(0,0)$ à (a,b) dans la grille des entiers $= \binom{a+b}{a} = \binom{a+b}{b}$;
   Idée : encoder les chemins par des mots de $a+b$ bits comportant a uns (ou b zéros).
3. #solutions $(x_1, x_2, \dots, x_d)$ entières ($\in \mathbb{N}^d$) de l'équation $x_1 + x_2 + \dots + x_d = c$ avec $c \in \mathbb{N}$ $= \binom{d+c-1}{d-1} = \binom{d+c-1}{c}$;
   Idée : encoder les solutions par des mots de $(d-1)+c$ bits ayant $d-1$ uns et c zéros.
4. #manières de sélectionner k objets pris parmi n, sans ordre, avec répétition = #solutions en nombres naturels de

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = k \qquad (\text{où } x_i = \#\text{objets de type } i \text{ sélectionnés})$$

$= \binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$.

La *règle de quatre* :

sélection de k objets pris parmi n	ordonnée	non ordonnée
sans répétition	$\frac{n!}{(n-k)!} = k!\binom{n}{k}$	$\binom{n}{k}$
avec répétition	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$

1.6 Preuves bijectives

1.6.1 Arbres étiquetés à n sommets

Théorème (de Cayley (1889)).

$$\boxed{\#\textit{arbres étiquetés à } n \textit{ sommets} = n^{n-2}}$$

Démonstration. Définissons

$$a_n := \#\text{arbres étiquetés à } n \text{ sommets}$$
$$\mathcal{A}_n := \{\text{arbres étiquetés à } n \text{ sommets avec deux sommets spéciaux (peuvent coïncider)}\}$$

En général $|\mathcal{A}_n| = n^2 \cdot a_n$. Le *but* est de montrer $|\mathcal{A}_n| = n^n$.

On va trouver une bijection entre $\mathcal{A}_n$ et $[n]^{[n]}$.

Soit $f : [n] \to [n]$ une fonction et soit $\vec{G}(f)$ le graphe dirigé dont les sommets sont $1, 2, \dots, n$ et les arcs sont $(i, f(i))$ avec $i = 1, 2, \dots, n$. □

Chaque composant de $\vec{G}(f)$ contient un *unique* cycle dirigé.

Définition.

$$\begin{aligned} M : &= \{\textit{ensemble des sommets de } \vec{G}(f) \textit{ qui apparaissent sur un cycle dirigé}\} \\ &= \{i_1, i_2, \dots, i_m\} \qquad \textit{avec } i_1 < i_2 < \dots < i_m \end{aligned}$$

Écrivons

$$f/M = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_m \\ f(i_1) & f(i_2) & \dots & fi_m \end{pmatrix}$$

Remarque. *f/M est une bijection, donc le vecteur des images contient tous les nombres de M, dans un certain ordre.*

Idée : on représente cet ordre par

$$f(i_1)\_f(i_2)\_f(i_3)\_\dots\_f(i_m)$$

L'arbre correspondant à f est obtenu à partir de $\vec{G}(f)$ en remplaçant les arbres dans M par

$$f(i_1)\_f(i_2)\_f(i_3)\_\dots\_f(i_m)$$

et en oubliant l'orientation des autres arcs.

Cette correspondance est une bijection car à tout arbre on peut faire correspondre une fonction, de plus, ces correspondances sont réciproques l'une de l'autre.

$\exists$ deux fonctions :

$$\alpha : [n]^{[n]} \to \mathcal{A}_n$$
$$\beta : \mathcal{A}_n \to [n]^{[n]}$$

qui vérifient

$$\alpha \cdot \beta = \mathrm{id}|_{\mathcal{A}_n} \qquad \beta \cdot \alpha = \mathrm{id}|_{[n]^{[n]}}$$

$$\Rightarrow \alpha, \beta \text{ sont des bijections et } \alpha = \beta^{-1}, \beta = \alpha^{-1}$$

1.6.2 Arbres binaires enracinés et triangulations d'un polygone

Arbres binaires enracinés à 2 feuilles : #total = 1 ; à 3 feuilles : #total = 2 ; à 4 feuilles : #total = 5.

Remarque. *Quand on compte des objets, il faut être précis sur ce qu'on compte exactement. En particulier, sur la manière de décider quand deux objets sont différents.*

Dans ce cas précis :

- *Il y a un sommet spécial : la racine ;*
- *On distingue* gauche *et* droite.

Définition (Arbre binaire enraciné). *Un* arbre binaire enraciné *est un arbre (c'est-à-dire un graphe connexe, sans cycle) dont tous les sommets ont pour degré* $1, 2$ *ou* 3*. Un et un seul sommet a pour degré* 2*, la* racine.

Chaque arête porte un label "G" ou "D".

Problème avec la définition : deux arbres identiques peuvent être différents car leurs étiquettes sont différentes.

Deux arbres binaires enracinés T_1 et T_2 sont *isomorphes* (équivalents) s'il existe une bijection des sommets de T_1 sur les sommets de T_2 telle que :

(i) Toute arête de T_1 est envoyée sur une arête de T_2 ;

(ii) Idem avec les non-arêtes ;

(iii) Les labels sur les arêtes sont préservés.

(i) et (ii) $\to$ isomorphisme de graphes.

Théorème.

$$\begin{array}{c}\textit{\#arbres binaires enracinés} \\ \textit{à } n \textit{ feuilles (à un isomorphisme près)}\end{array} = \begin{array}{c}\textit{\#triangulations d'un} \\ \textit{polygone convexe à } n+1 \textit{ côtés}\end{array}$$

Idée de la démonstration : on va trouver une bijection entre

$$\mathcal{A}_n := \{\text{arbres binaires enracinés à } n \text{ feuilles, pris à un isomorphisme près}\}$$

et

$$\mathcal{T}_{n+1} := \{\text{triangulations d'un } (n+1)\text{-gone convexe}\}$$

Numérotons les arêtes d'un $(n+1)$-gone, disons P, de 0 à n dans le sens anti-horlogique (et on met $\underline{0}$ *en haut*).

Étant donné une triangulation de P, nous obtenons un arbre binaire enraciné à n feuilles en plaçant

- La racine à l'intérieur du triangle adjacent à $\underline{0}$;
- Un sommet (interne) à l'intérieur de chaque autre triangle ;
- Les n feuilles dans l'intérieur (relatif) des côtés $\underline{1}$ jusque $\underline{n}$.

Puis en reliant les sommets placés dans des triangles adjacents, ainsi que chaque feuille avec le sommet placé dans le triangle contenant le côté correspondant.

Et les labels ? On utilise le sens anti-horlogique.

Comment inverser cette correspondance ?

$$\mathcal{T}_{n+1} \to \mathcal{A}_n$$

pour trouver une correspondance réciproque

$$\mathcal{A}_n \to \mathcal{T}_{n+1}$$

Chapitre 2

Récurrences

2.1 Exemples récurrents

2.1.1 Nombres de régions délimitées par n droites dans le plan

Problème. *Considérons n droites dans le plan, en position générale. Combien de régions délimitent-elles ?*

Définition (Position générale). *Toute paire de droites s'intersectent en 1 point et tout triple de droites ont une intersection $\emptyset$.*

En général, si on part d'un arrangement de $n-1$ droites et qu'on en rajoute une, on crée exactement n nouvelles régions.

Remarque. *On voit donc que #régions pour n droites ne dépend* pas *des droites (uniquement de n).*

Posons $\Phi_2(n) :=$ #régions délimitées par n droites (en position générale).

$$\boxed{\Phi_2(n) = \Phi_2(n-1) + n} \qquad \forall n \geq 1;\ \Phi_2(0) = 1$$

Pour résoudre cette récurrence, on la déroule :

$$\begin{aligned}
\Phi_2(n) &= n + \Phi_2(n-1) \\
&= n + (n-1) + \Phi_2(n-2) \\
&= \dots \\
&= n + (n-1) + (n-2) + \dots + 1 + \underbrace{\Phi_2(0)}_{=1} \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + 1 \\
&= \frac{n(n-1)}{2} + n + 1 \\
&= \binom{n}{2} + \binom{n}{1} + \binom{n}{0}
\end{aligned}$$

Considérons maintenant n plans dans l'espace (de dimension 3) en position générale.

Définition (Position générale). *L'intersection de k plans (choisis dans l'arrangement) est de dimension $3-k$, pour $k = 1, 2, 3, 4$* $\qquad [\dim \emptyset = -1]$.

Posons $\Phi_3(n) :=$ #régions délimitées par n plans (en position générale).
Par analogie dimensionnelle, on obtient la récurrence :

$$\boxed{\Phi_3(n) = \Phi_3(n-1) + \Phi_2(n-1)} \qquad \forall n \geq 1;\ \Phi_3(0) = 1$$

En déroulant :

$$\begin{aligned}
\Phi_3(n) &= \Phi_2(n-1) + \Phi_3(n-1) \\
&= \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{0} + \Phi_3(n-1) \\
&= \left[\binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{0}\right] + \left[\binom{n-2}{2} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-2}{0}\right] \\
&\quad + \ldots + \underbrace{\left[\binom{0}{2} + \binom{0}{1} + \binom{0}{0}\right]}_{\Phi_2(0)} + \underbrace{\Phi_3(0)}_{=1=\binom{n}{0}} \\
&= \binom{n}{3} + \binom{n}{2} + \binom{n}{1} + \binom{n}{0}
\end{aligned}$$

Tout ceci se généralise en dimension quelconque :

$$\boxed{\Phi_d(n) = \Phi_d(n-1) + \Phi_{d-1}(n-1)} \qquad \forall n \geq 1;\ \Phi_d(0) = 1$$

On trouve :

$$\boxed{\Phi_d(n) = \binom{n}{d} + \binom{n}{d-1} + \ldots + \binom{n}{1} + \binom{n}{0}}$$

2.1.2 Dallage d'un chemin

Problème. *De combien de manières peut-on daller un chemin de 2 mètres de large et n mètres de long, avec des dalles de $1m \times 2m$?*

Notons $p_n :=$ #manières de daller un chemin de n mètres.
On a la récurrence :

$$\boxed{p_n = p_{n-1} + p_{n-2}} \qquad \forall n \geq 3;\ p_1 = 1;\ p_2 = 2$$

On obtient :

$$(p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots) = (1, 2, 3, 4, 5, 8, 13, 21, \ldots)$$

Ce sont des nombres de Fibonacci ($\sim$ 1200).
F_n ($n \in \mathbb{N}$) est défini par :

$$(*)\ \boxed{F_n = F_{n-1} + F_{n-2}} \qquad \forall n \geq 2;\ F_0 = 0;\ F_1 = 1$$

On voit $(p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots) = (F_2, F_3, F_4, F_5, \ldots)$.

$$\boxed{P_n = F_{n+1}} \qquad \forall n \geq 1$$

Rappel. *$y'' = y' + y$ a des solutions de la forme $y = e^{\lambda x}$.*

Ici : on cherche des solutions de la forme λ^n pour certains $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
Conditions sur λ ?

$$\begin{aligned}
\lambda^n &= \lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} \qquad \forall n \geq 2 \\
\overset{\lambda\neq 0}{\Leftrightarrow} \lambda^2 &= \lambda + 1 \\
\Leftrightarrow \lambda &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

Remarque. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *est le nombre d'or.*

Donc $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ et $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ sont deux solutions de $(*)$.
Et par conséquent, toute suite de la forme

$$c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

est solution de $(*)$, $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, car l'ensemble des suites solutions de $(*)$ forme un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles ($\mathbb{N} \to \mathbb{R}$).

La dimension de ce sous-espace est *exactement* 2 (intuitivement : 2 degrés de liberté $\to$ le choix de F_0 et F_1 ; tout est déterminé quand on connaît F_0 et F_1).

Or $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ et $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ sont linéairement indépendants. Donc leurs combinaisons linéaires sont *toutes* les solutions de $(*)$.

$$\Rightarrow F_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \qquad \text{pour certains } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

On a :

$$\begin{aligned} n = 0 : &\qquad 0 = F_0 = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 \\ n = 1 : &\qquad 1 = F_1 = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 & = 0 \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)c_1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)c_2 & = 1 \end{cases}$$

On trouve :

$$\begin{cases} c_1 & = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ c_2 & = \dfrac{-1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$\boxed{F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Remarque. $F_n \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ *pour* n *grand.*

2.1.3 Tri fusion

Étant donné un vecteur de taille N, le tri fusion le partitionne en deux vecteurs de taille $\left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil$ et $\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor$ puis s'appelle récursivement sur chacun de ces deux vecteurs, puis fusionne les vecteurs résultants.

Appelons C_N le nombre de comparaisons effectuées par cet algorithme.

Exemple.

$$\begin{array}{c} \boxed{4 \mid 1 \mid 3 \mid 2} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \boxed{4 \mid 1} \quad \boxed{3 \mid 2} \\ \Downarrow \qquad\quad \Downarrow \\ \boxed{1 \mid 4} \quad \boxed{2 \mid 3} \\ \searrow \quad \swarrow \\ \boxed{1 \mid 2 \mid 3 \mid 4} \end{array}$$

Pour le moment, on prend $N = 2^n$ $(n \geq 0)$.

$$C_N = C_{\lceil \frac{N}{2} \rceil} + C_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} + N \qquad \forall N \geq 2;\ C_1 = 0$$

$$C_{2^n} = 2C_{2^{n-1}} + 2^n \qquad \text{pour } N = 2^n$$

On divise par 2^n :

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{C_{2^n}}{2^n}}_{d_n} = \underbrace{\frac{C_{2^{n-1}}}{2^{n-1}}}_{d_{n-1}} + 1 \qquad (n \geq 1)$$

et $C_{2^0} = 0 = d_0$.

$$\begin{aligned}\Rightarrow d_n &= 1 + d_{n-1}\\ &= 1 + 1 + d_{n-2}\\ &= \underbrace{1 + 1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ fois}} + \underbrace{d_0}_{=0}\\ &= n\end{aligned}$$

$$C_{2^n} = 2^n \cdot n$$

Donc

$$\boxed{C_N = N \log_2 N}$$

$$N = 2^n \Leftrightarrow n = \log_2 N$$

2.2 Récurrences linéaires

2.2.1 Récurrences linéaires du 1^er ordre

$$\begin{aligned}x_n &= c_n x_{n-1} + d_n \qquad \forall n \geq 1;\ x_0 = 0\\ x_n &= \sum_{i=1}^{n} d_i \prod_{j=i+1}^{n} c_j\\ &= d_n + d_{n-1}c_n + d_{n-2}c_{n-1}c_n + \ldots + d_1 c_2 \ldots c_n\end{aligned}$$

2.2.2 Récurrences linéaires homogènes à coefficients constants

$$x_n = c_{d-1}x_{n-1} + c_{d-2}x_{n-2} + \ldots + c_0 x_{n-d}$$

pour $n \geq d$, où $c_0, c_1, \ldots, c_d \in \mathbb{C}$ et $c_0 \neq 0$.

L'*ordre* d'une telle récurrence est d.

Définition (Polynôme caractéristique). *Le* polynôme caractéristique *associé est*

$$P(t) := t^d - c_{d-1}t^{d-1} - c_{d-2}t^{d-2} - \ldots - c_0 t_0$$

L'*objectif* est de comprendre les solutions de ces récurrences, c'est-à-dire les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui satisfont l'équation $\forall n \geq d$.

Observations :

1. Une telle suite est entièrement déterminée par ses d premières valeurs $x_0, x_1, \ldots, x_{d-1}$ appelées *conditions initiales.*
2. L'ensemble des solutions forme un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Démonstration. En effet, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont solutions et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, alors la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$z_n := \lambda x_n + \mu y_n \qquad \forall n \geq 0$$

satisfait, pour $n \geq d$:

$$\begin{aligned} z_n &= \lambda x_n + \mu y_n \\ &= \lambda(c_{d-1}x_{n-1} + \ldots + c_0 x_{n-d}) + \mu(c_{d-1}y_{n-1} + \ldots + c_0 y_{n-d}) \\ &= c_{d-1}(\lambda x_{n-1} + \mu y_{n-1}) + c_{d-2}(\lambda x_{n-2} + \mu y_{n-2}) + \ldots + c_0(\lambda x_{n-d} + \mu y_{n-d}) \\ &= c_{d-1}z_{n-1} + \ldots + c_0 z_{n-d} \end{aligned}$$

$\Rightarrow (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est solution.*

□

Rappel.
- *Tout polynôme complexe de degré $d \geq 1$ peut se factoriser comme un produit de d facteurs de degré 1.*
- *$\beta \in \mathbb{C}$ est une* racine de multiplicité *m d'un polynôme complexe $p(t) \in [t]$ si $p(t)$ est divisible par $(t-\beta)^m$ mais pas par $(t-\beta)^{m+1}$.*

Théorème. *Considérons la relation de récurrence d'ordre $d \geq 1$*

$$x_n = c_{d-1}x_{n-1} + \ldots + c_0 x_{n-d}$$

pour $n \geq d$, où $c_0, \ldots, c_{d-1} \in \mathbb{C}$ et $c_0 \neq 0$.

Notons $m(\beta)$ pour la multiplicité d'une racine β du polynôme caractéristique $p(t)$ associé.
Alors, $\forall$ racine β et naturel $j \leq m(\beta) - 1$, la suite $(n^j\beta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est solution.
Réciproquement, toute solution est une combinaison linéaire de ces d solutions canoniques.

Une *application* est que pour des conditions initiales $x_0, x_1, \ldots, x_{d-1}$ données, on peut écrire une forme close pour x_n.

En effet, par le théorème, nous avons $\forall n \in \mathbb{N}$

$$x_n = \sum_{\beta \text{ racine}} \sum_{j=0}^{m(\beta)-1} \lambda_{\beta,j}(n^j\beta^n)$$

où les $\lambda_{\beta,j}$ sont les d coefficients de la combinaison linéaire.

En prenant cette équation pour chaque $n \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$, on obtient un système de d équations linéaires qui sont linéairement indépendants. On peut résoudre ce système et calculer les $\lambda_{\beta,j}$.

Exemple.

1.

$$x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2} \qquad \forall n \geq 2;\ x_0 = 0;\ x_1 = 1$$
$$p(t) = t^2 - 5t + 6 = (t-3)(t-2)$$

Racines : $t = 3$ ou $t = 2$ (multiplicité 1 chacune).
Donc $x_n = \lambda 3^n + \mu 2^n$ avec

$$\begin{cases} x_0 &= 0 = \lambda 3^0 + \mu 2^0 = \lambda + \mu \\ x_1 &= 1 = \lambda 3 + \mu 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda &= 1 \\ \mu &= -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_n = 3^n - 2^n$$

2.

$$\begin{aligned} x_n &= -x_{n-1} - x_{n-2} \qquad \forall n \geq 2;\ x_0 = 0;\ x_1 = 1 \\ p(t) &= t^2 + t + 1 \end{aligned}$$

Racines : $t = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ *ou* $t = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ *(multiplicité* 1 *chacune).*

$$\vdots$$

$$\Rightarrow x_n = \frac{i}{\sqrt{3}} \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \right)^n - \frac{i}{\sqrt{3}} \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \right)^n$$

Lemme 1. *Soit* $p(t) \in \mathbb{C}[t]$ *un polynôme complexe de degré* $d \geq 1$*. Si* β *est une racine de multiplicité* m*, alors*

$$p(\beta) = p'(\beta) = \ldots = p^{\underline{m-1}}(\beta) = 0$$

Démonstration. Par la formule de Taylor,

$$\begin{aligned} p(t) = p(\beta) + p'(\beta)(t-\beta) + \frac{1}{2}p''(\beta)(t-\beta)^2 + \ldots + \\ \frac{1}{(m-1)!}p^{\underline{m-1}}(\beta)(t-\beta)^{m-1} + \frac{1}{m!}p^{\underline{m}}(\beta)(t-\beta)^m + \ldots + \\ \frac{1}{d!}p^{\underline{d}}(\beta)(t-\beta)^d \end{aligned}$$

$(t-\beta)^m$ divise $p(t) \Rightarrow p^{\underline{i}}(\beta) = 0 \qquad \forall i < m.$ ☐

Lemme 2. *Pour tout entier* $j \geq 1$*, il existe des coefficients entiers* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_j$ *tels que*

$$i^j = \alpha_1 i + \alpha_2 i(i-1) + \ldots + \alpha_j i(i-1)\ldots(i-j+1) \qquad \forall i \in \mathbb{Z}$$

(Sans démonstration).

Lemme 3. *Si* β *est une racine de multiplicité* m *d'un polynôme* $p(t) \in \mathbb{C}[t]$ *de degré* d*, avec* $p(t) = \sum_{i=0}^{d} c_i t^i$*, alors*

$$\sum_{i=0}^{d} c_i i^j \beta^i = 0 \qquad \forall j \in \{0, \ldots, m-1\}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{d} c_i i^j \beta^i \\ = & \sum_{i=0}^{d} c_i \left(\sum_{k=1}^{j} \alpha_k i(i-1)\ldots(i-k+1) \right) \beta^i && \text{par Lemme 2} \\ = & \sum_{k=1}^{j} \alpha_k \left(\sum_{i=0}^{d} c_i i(i-1)\ldots(i-k+1)\beta^i \right) \\ = & \sum_{k=1}^{j} \alpha_k p^{\underline{k}}(\beta) = 0 && \text{par Lemme 1} \end{aligned}$$

☐

Maintenant, nous pouvons démontrer le théorème.

Démonstration.

(1) Soit β une racine de $p(t)$ et $j \in \{0,\ldots,m(\beta)-1\}$.
Alors $(n^j\beta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est solution de la récurrence *si et seulement si*, $\forall n \geq d$, on a

$$\begin{aligned}
& n^j\beta^n = c_{d-1}(n-1)^j\beta^{n-1} + \ldots + c_0(n-d)^j\beta^{n-d} \\
\Leftrightarrow\ & n^j\beta^n = c_{d-1}(n-1)^j\beta^{d-1} + \ldots + c_0(n-d)^j\beta^{0} \\
\Leftrightarrow\ & 0 = \sum_{i=0}^{d} c_i(i+(n-d))^j\beta^i \qquad (\text{avec } c_d := -1) \\
\Leftrightarrow\ & 0 = \sum_{i=0}^{d} c_i\left(\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k} i^{j-k}(n-d)^k\right)\beta^i \\
\Leftrightarrow\ & 0 = \sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}(n-d)^k \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{d} c_i i^{j-k}\beta^i\right)}_{=0 \text{ par Lemme 3}} \\
\Rightarrow\ & (n^j\beta^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est solution (il y en a } d).
\end{aligned}$$

(2) Soit S l'ensemble des solutions, alors S est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ (l'espace vectoriel des suites complexes).
L'application $A : S \to \mathbb{C}^d$

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto A(x) = (x_0, x_1, \ldots, x_{d-1})$$

est linéaire, injective (car toute suite est déterminée par ses valeurs initiales, ou encore $\ker A = \{0\}$), surjective (car $\mathrm{Im}\ A = \mathbb{C}^d$).
Donc A est un *isomorphisme* et $\dim S = \dim \mathbb{C}^d = d$.

(3) Reste à démontrer que les solutions $n^j\beta^n$ pour β racine de $p(t)$ et $j \in \{0,\ldots,m(\beta)-1\}$ sont linéairement indépendantes (idée : trouver une récurrence telle que un des $\beta^n n^j$ intervenant dans une dépendance linéaire avec j maximum n'est *pas* solution, alors que les autres le sont).

□

Exemple.

$$\begin{aligned}
x_n &= 4x_{n-1} - 5x_{n-2} + 2x_{n-3} \\
p(t) &= -(t-1)^2(t-2) \\
&= -(t^2-2t+1)(t-2) \\
&= -t^3 + 4t^2 - 5t + 2
\end{aligned}$$

On a trois solutions de base $1^n, 1^n\cdot n, 2^n$ *c'est-à-dire* $1, n, 2^n$. *Elles sont linéairement indépendantes car :*

1. $1, n$ *sont solutions de* $x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2}$ *alors que* 2^n *n'est pas solution* ($\Rightarrow (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'est pas une combinaison linéaire de* $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(n)_{n\in\mathbb{N}}$*) ;*
2. $1, 2^n$ *sont solutions de* $x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2}$ *alors que* n *n'est pas solution* ($\Rightarrow (n)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'est pas une combinaison linéaire de* $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$*).*

2.2.3 Récurrences linéaires non-homogènes à coefficients constants

$$x_n = c_{d-1}x_{n-1} + \ldots + c_0 x_{n-d} + e_n$$

Toute solution est de la forme :

$$\begin{aligned} x_n = {} & \text{solution de l'EHA } (x_n = c_{d-1}x_{n-1} + \ldots + c_0 x_{n-d}) \\ & + \text{solution quelconque, fixée de } (x_n = c_{d-1}x_{n-1} + \ldots + c_0 x_{n-d} + e_n) \end{aligned}$$

"SGENH = SGEHA + SP" où

SGENH = Solution Générale de l'Équation Non-Homogène

SGEHA = Solution Générale de l'Équation Homogène Associée

SP = Solution Particulière (n'importe quelle solution de l'équation non-homogène)

2.3 Récurrences *diviser pour régner*

("Divide and conquer").

Rappel. *On a vu que pour $N = 2^n$ $(n \geq 0)$ la solution de*

$$C_N = C_{\lfloor N/2 \rfloor} + C_{\lceil N/2 \rceil} + N \qquad \forall N \geq 2;\ C_1 = 0$$

est $C_N = N \log_2 N = N \lg N$ (où $\lg(x) = \log_2(x)$ pour $x > 0$).

C'est un exemple de récurrence "diviser pour régner".
– Très importantes pour l'analyse d'algorithmiques.
– Effets de $\lfloor \ldots \rfloor$ et $\lceil \ldots \rceil$: termes oscillatoires / fractals dans les solutions exactes.

2.3.1 Recherche binaire

Chercher un nombre dans un vecteur trié.

Théorème. *Soit $B_N :=$ #comparaisons effectuées au pire des cas par une recherche binaire dans un vecteur de taille N.*
Alors $B_N = B_{\lfloor N/2 \rfloor} + 1$ pour $N \geq 2$ et $B_1 = 1$.
La solution de cette récurrence donne #bits dans l'écriture de N en base 2.
Donc, en particulier, $B_N = \lfloor \lg N \rfloor + 1$.

Démonstration.
– Si N est pair : au pire cas, il reste $\frac{N}{2} = \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor$ éléments.
– Si N est impair : dans tous les cas (si échec), il reste $\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor$.
On a bien la récurrence $B_N = B_{\lfloor N/2 \rfloor} + 1$ pour $N \geq 2$ et $B_1 = 1$.
C'est bien le #bits dans l'écriture binaire de N. □

Exemple. $N = 13$ *en base 2 :* 1101.

$$4 bits = (\lfloor \lg 3 \rfloor + 1) bits$$

2.3.2 Solution exacte de la récurrence pour le tri fusion

$$
\begin{aligned}
C_{N+1} &= C_{\lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor} + C_{\lceil \frac{N+1}{2} \rceil} + N + 1 \\
C_N &= C_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} + C_{\lceil \frac{N}{2} \rceil} + N \\
C_{N+1} - C_N &= C_{\lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor} + C_{\lceil \frac{N+1}{2} \rceil} + N + 1 - C_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} - C_{\lceil \frac{N}{2} \rceil} - N \\
&= C_{\lceil \frac{N+1}{2} \rceil} - C_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} + 1
\end{aligned}
$$

Pour N pair :

$$
\begin{aligned}
\left\lfloor \frac{N+1}{2} \right\rfloor &= \frac{N}{2} & \qquad \left\lceil \frac{N+1}{2} \right\rceil &= \frac{N}{2} + 1 \\
\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor &= \frac{N}{2} & \qquad \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil &= \frac{N}{2}
\end{aligned}
$$

Pour N impair :

$$
\begin{aligned}
\left\lfloor \frac{N+1}{2} \right\rfloor &= \frac{N+1}{2} & \qquad \left\lceil \frac{N+1}{2} \right\rceil &= \frac{N+1}{2} \\
\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor &= \frac{N-1}{2} & \qquad \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil &= \frac{N+1}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\lfloor \frac{N+1}{2} \right\rfloor &= \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil & \qquad \forall N \in \mathbb{N} \\
\left\lceil \frac{N+1}{2} \right\rceil &= \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor + 1 & \qquad \forall N \in \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

Si on pose $D_N = C_{N+1} - C_N$, alors :

$$
\begin{aligned}
D_N &= D_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} + 1 \qquad \forall N \geq 2 \\
D1 &= C_2 - C_1 = 2 - 0 = 2 \\
\Rightarrow D_N &= \lfloor \lg N \rfloor + 1 + 1
\end{aligned}
$$

Théorème.

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow C_N &= (C_N - C_{N-1}) + (C_{N-1} - C_{N-2}) + \ldots + (C_2 - C_1) \\
&= D_{N-1} + D_{N-2} + \ldots + D_1 \\
&= \sum_{j=1}^{N-1} (\lfloor \lg j \rfloor + 2) \\
&= (N-1) + \sum_{j=1}^{N-1} \lfloor \lg j \rfloor + 1 \\
&= (N-1) + \#\textit{total de bits dans l'écriture binaire des nombres } 1, 2, \ldots, N-1
\end{aligned}
$$

Exemple. $C_5 = 12$, *car :*

$$1\#10\#11\#100\#$$

comporte $4 + 8 = 12$ *symboles.*

Théorème.

$$\boxed{C_N = N\lfloor \lg N \rfloor + 2N - 2^{\lfloor \lg N \rfloor + 1}}$$

Démonstration.

$$\begin{array}{ll} 1,2,3,4,5,6,7,8,\ldots,N-1 & \text{ont} \geq 1 \text{ bits} \\ 2,3,4,5,6,7,8,\ldots,N-1 & \text{ont} \geq 2 \text{ bits} \\ 4,5,6,7,8,\ldots,N-1 & \text{ont} \geq 3 \text{ bits} \\ \vdots & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow C_N &= (N-1)+(N-1)+(N-2)+(N-4)+\ldots+(N-2^{\lfloor \lg N \rfloor}) \\ &= (N-1)+(N-2^0)+(N-2^1)+(N-2^2)+\ldots+(N-2^{\lfloor \lg N \rfloor}) \\ &= (N-1)+N(\lfloor \lg N \rfloor+1)-\underbrace{(2^0+2^1+2^2+\ldots+2^{\lfloor \lg N \rfloor})}_{=2^{\lfloor \lg N \rfloor+1}-1} \\ &= N\lfloor \lg N \rfloor + 2N - 2^{\lfloor \lg N \rfloor+1} \end{aligned}$$

□

Remarque. *Pour* $N = 2^n$ *:* $N \lg N + 2 \cdot 2^n - 2^{n+1} = N \lg N$

2.3.3 Récurrences *diviser pour régner* générales

En analyse d'algorithmes, on cherche à majorer le coût d'un algorithme qui divise un problème de taille N en α problèmes de taille $\frac{N}{\beta}$ (c'est-à-dire $\left\lceil \frac{N}{\beta} \right\rceil$ ou $\left\lfloor \frac{N}{\beta} \right\rfloor$) et recombine les solutions obtenues avec un coût $\leq f(N)$.

La résolution *exacte* des récurrences obtenues est problématique (cf. caractère oscillatoire/fractal de certains termes). On se contente du comportement asymptotique.

Rappel (sur $O, o, \Omega, \omega, \Theta, \sim$, etc.).

$$f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} &f = O(g) \text{ si } \exists c \in \mathbb{R}_+ \backslash \{0\}, \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow |f(n)| \leq c \cdot |g(n)| \\ &g = \Omega(f) \text{ si } f = O(g) \\ &f = o(g) \text{ si } \lim_{n \to +\infty} \frac{|f(n)|}{|g(n)|} = 0 \\ &g = \omega(f) \text{ si } f = o(g) \\ &f = \Theta(g) \text{ si } f = O(g) \text{ et } g = O(f) \qquad [f \text{ et } g \text{ ont le même ordre de grandeur}] \\ &f \sim g \text{ si } \lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1 \qquad [f \text{ et } g \text{ sont asymptotiquement égales}] \end{aligned}$$

Exemple.

$$\begin{aligned} &\lg n! = \Theta(n \lg n) \\ &n^{\lg n} = o(2^n) \end{aligned}$$

Pour commencer,

$$\begin{array}{ll} a(x) = \alpha a\left(\dfrac{x}{\beta}\right) + x & \forall x > 1 \\ a(x) = 0 & \forall x \leq 1 \end{array}$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R} : \beta > 1, \alpha \geq 1$.

Pour $x = \beta^n$, on trouve :

$$\begin{aligned} a(\beta^n) &= \alpha a(\beta^{n-1}) + \beta^n \\ \Leftrightarrow \frac{a(\beta^n)}{\alpha^n} &= \frac{a(\beta^{n-1})}{\alpha^{n-1}} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{a(\beta^n)}{\alpha^n} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1} + \ldots + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^1 + \underbrace{\frac{a(\beta^0)}{\alpha^0}}_{=0 \text{ car } a(x)=0 \ \forall x \leq 1}$$

$$\Rightarrow a(\beta^n) = \alpha^n \cdot \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^j$$

– Cas 1 : $\alpha > \beta$

$$\Rightarrow a(\beta^n) \sim \alpha^n \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^j}_{=-1+\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^j} = \alpha^n \left(-1 + \frac{1}{1-\frac{\beta}{\alpha}}\right) = \alpha^n \left(-1 + \frac{\alpha}{\alpha - \beta}\right) = \frac{\beta}{\alpha - \beta}\alpha^n$$

– Cas 2 : $\alpha = \beta$

$$\Rightarrow a(\beta^n) = n\alpha^n$$

– Cas 3 : $\alpha < \beta$
  On écrit

$$a(\beta^n) = \alpha^n \cdot \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k$$

  Donc

$$a(\beta^n) \sim \alpha^n \cdot \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k}_{\frac{1}{1-\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\beta}{\beta-\alpha}} = \alpha^n \cdot \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n \cdot \frac{\beta}{\beta - \alpha}$$

$$\Rightarrow a(\beta^n) \sim \frac{\beta}{\beta - \alpha} \cdot \beta^n$$

En remplaçant β^n par x, on trouve
– Cas 1 : $\alpha > \beta$: $a(x) \sim \frac{\beta}{\alpha-\beta}\beta^{\log_\beta \alpha \cdot n} = \frac{\beta}{\alpha-\beta}x^{\log_\beta \alpha}$
– Cas 2 : $\alpha = \beta$: $a(x) \sim \log_\beta x \cdot x^{\log_\beta \alpha} = \log_\beta x \cdot x$
– Cas 3 : $\alpha < \beta$: $a(x) \sim \frac{\beta}{\beta-\alpha} \cdot x$
Seulement valables pour $x = \beta^n$.

Théorème. *Si la fonction* $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *vérifie*

$$\begin{aligned} a(x) &= \alpha a\left(\frac{x}{\beta}\right) + x & \forall x > 1 \\ a(x) &= 0 & \forall x \leq 1 \end{aligned}$$

Alors
– *Cas 1 :* $\alpha > \beta$ *:* $a(x) \sim \frac{\beta}{\alpha-\beta}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\lceil \log_\beta x \rceil - \log_\beta x} x^{\log_\beta \alpha}$
– *Cas 2 :* $\alpha = \beta$ *:* $a(x) \sim x \log_\beta x$
– *Cas 3 :* $\alpha < \beta$ *:* $a(x) \sim \frac{\beta}{\beta-\alpha}x$

Démonstration.

$$
\begin{aligned}
a(x) &= x + \alpha a\left(\frac{x}{\beta}\right) \\
&= x + \alpha\left(\frac{x}{\beta} + \alpha a\left(\frac{x}{\beta^2}\right)\right) \\
&= x + \frac{\alpha}{\beta}\cdot x + \alpha^2 a\left(\frac{x}{\beta^2}\right) \\
&= \dots \\
&= x\left(1 + \frac{\alpha}{\beta} + \dots + \frac{\alpha^{t-1}}{\beta^{t-1}}\right) \qquad \text{pour } t = \lceil \log_\beta x \rceil
\end{aligned}
$$

- Cas 1 : $\alpha > \beta$:

$$
\begin{aligned}
a(x) &= x\frac{\alpha^t}{\beta^t}\left(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta^2}{\alpha^2} + \dots + \frac{\beta^t}{\alpha^t}\right) \\
&\sim x\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\lceil \log_\beta x\rceil}\frac{\beta}{\alpha-\beta} \\
&\sim \frac{\beta}{\alpha-\beta}x\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\log_\beta x}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\lceil \log_\beta x\rceil - \log_\beta x} \\
&\sim \frac{\beta}{\alpha-\beta}\beta^{\log_\beta \alpha \log_\beta x}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\lceil \log_\beta x\rceil - \log_\beta x} \\
&\sim \frac{\beta}{\alpha-\beta}x^{\log_\beta \alpha}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\lceil \log_\beta x\rceil - \log_\beta x}
\end{aligned}
$$

- Cas 2 : $\alpha = \beta$: $a(x) \sim x\lceil \log_\beta x\rceil \sim x \log_\beta x$
- Cas 3 : $\alpha < \beta$: $a(x) \sim \frac{\beta}{\beta-\alpha}x$

□

Théorème (Master Theorem)**.** *Soit $\alpha \geq 1$, $\beta > 1$ des constantes, et $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une fonction.*
Si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la récurrence :

$$a_n = \alpha a_{\frac{n}{\beta}} + f(n)$$

où $\frac{n}{\beta}$ signifie (ici) soit $\left\lceil \frac{n}{\beta}\right\rceil$, soit $\left\lfloor \frac{n}{\beta}\right\rfloor$.
Alors

(i) Si $f(n) = O(n^{\log_\beta \alpha - \epsilon})$ pour $\epsilon > 0$, alors $a_n = \Theta(n^{\log_\beta \alpha})$;
(ii) Si $f(n) = \Theta(n^{\log_\beta \alpha})$, alors $a_n = \Theta(n^{\log_\beta \alpha} \cdot \lg n)$;
(iii) Si $f(n) = \Omega(n^{\log_\beta \alpha + \epsilon})$ pour $\epsilon > 0$, et si $\alpha f\left(\frac{n}{\beta}\right) \leq c \cdot f(n)$ pour une certaine constante $c < 1$ et n grand, alors $a_n = \Theta(f(n))$.

2.3.4 Application : complexité multiplication-matricielle

Calculer le produit de 2 matrices $n \times n$ (taille problème $= n$)

$$
\begin{aligned}
A &= (a_{ij}) \\
B &= (b_{ij})
\end{aligned}
$$

où $i, j \in [n]$, avec

$$(*) \quad \boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}}$$

(produit scalaire de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A et de la $j^{\text{ème}}$ colonne de B).

Algorithme (classique)**.** *Calculer les n^2 coefficients c_{ij} avec la formule $(*)$. On a n multiplications et $n-1$ additions par coefficient c_{ij}.*

Au total, on a $n^2 \cdot n = n^3$ multiplications et $n^2 \cdot (n-1) = n^3 - n^2$ additions. Ce qui fait $O(n^3)$ opérations arithmétiques.

Pour $n = 2$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

L'algorithme classique calcule

$$\begin{aligned} c_{11} &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} \\ c_{12} &= a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ c_{21} &= a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} \\ c_{22} &= a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{aligned}$$

Ce qui nous fait 8 multiplications et 4 additions.

Cependant, il existe un algorithme qui fait *mieux* (asymptotiquement). Strassen s'en tire avec 7 multiplications et 18 additions.

Remarque. *On a intérêt à diminuer le nombre de multiplications, quitte à augmenter le nombre d'additions.*

Algorithme (de Strassen (1969))**.** *Astuce : on calcule les 7 produits :*

$$\begin{aligned} I &= (a_{11} - a_{22}) \cdot (b_{21} + b_{22}) \\ II &= (a_{11} + a_{22}) \cdot (b_{11} + b_{22}) \\ III &= (a_{11} - a_{21}) \cdot (b_{11} + b_{12}) \\ IV &= (a_{11} + a_{12}) \cdot b_{22} \\ V &= a_{11} \cdot (b_{12} - b_{22}) \\ VI &= a_{22} \cdot (b_{21} - b_{11}) \\ VII &= (a_{21} + a_{22}) \cdot b_{11} \end{aligned}$$

On vérifie :

$$\begin{aligned} c_{11} &= I + II - IV + VI \\ c_{12} &= IV + V \\ c_{21} &= VI + VII \\ c_{22} &= II - III + V - VII \end{aligned}$$

Par exemple :

$$\begin{aligned} IV + V &= (a_{11} + a_{12}) \cdot b_{22} + a_{11} \cdot (b_{12} - b_{22}) \\ &= a_{11}b_{22} + a_{12}b_{22} + a_{11}b_{12} - a_{11}b_{22} \\ &= a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ &= c_{12} \end{aligned}$$

Attention : ce résultat n'utilise pas *la commutativité de $\mathbb{R}$,. Les formules restent vraies dans un anneau non commutatif.*

Pour n pair : on découpe chaque matrice en 4 sous-matrices $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$:

$$\left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} C_{11} & C_{12} \\ \hline C_{21} & C_{22} \end{array}\right)$$

On a encore

$$\begin{aligned} C_{11} &= A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} \\ C_{12} &= A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ C_{21} &= A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} \\ C_{22} &= A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{aligned}$$

On utilise Strassen pour écrire c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22} avec 7 multiplications et 18 additions.
Pour n impair : on rajoute une ligne et une colonne de zéros.

$$\begin{pmatrix} & \boxed{A} & & 0 \\ & & & 0 \\ & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \boxed{B} & & 0 \\ & & & 0 \\ & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $T(n)$ (une majoration sur) #total d'opérations arithmétiques pour calculer le produit de 2 matrices $n \times n$:

$$T(n) = 7 \cdot T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + 18 \cdot (n+1)^2$$

Master Theorem avec $\alpha = 7$, $\beta = 2$, $f(n) = 18(n+1)^2$.
Comparer $f(n)$ à $n^{\log_\beta \alpha} = n^{\log_2 7} = n^{\lg 7} = n^{2,81\ldots}$.
On a bien $f(n) = O(n^{\log_\beta \alpha - \epsilon})$ pour un $\epsilon > 0$.

$$\Rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_\beta \alpha}) = \Theta(n^{2,81\ldots}) = O(n^{2,82})$$

L'algorithme de Strassen *bat* l'algorithme classique.

Remarque.

1. *Tout algorithme est de complexité $\Omega(n^2)$ (parce qu'il faut calculer n^2 coefficients) ;*
2. *Conjecture : $\forall \epsilon > 0\ \exists$ algorithme en $O(n^{2+\epsilon})$;*
3. *Coppersmith et Vinograd (1990) $\to O(n^{2,376})$;*
   Cohn, Kleinberg, Szegedy et Umans (2005) $\to O(n^{2,41})$ (moins bien mais il y a des liens intéressants avec la théorie des groupes) ;
4. *On peut démontrer que les problèmes suivants sont de la même complexité :*
   - *Inversion d'une matrice $n \times n$;*
   - *Résolution d'un système d'équations linéaire avec n équations et n variables ;*

   $$Ax = b \Rightarrow x = A^{-1}b \qquad si\ A^{-1}\exists$$

   - *Calcul d'un déterminant $n \times n$.*

2.4 Autres types de récurrences

2.4.1 Calcul d'une racine carrée

$$a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{\beta}{a_{n-1}}\right) \qquad n \geq 1;\ a_0 = 1$$

Récurrence non linéaire, d'ordre 1, utilisée pour calculer $\sqrt{\beta}$, avec $\beta > 0$ (Méthode de Newton).
Supposons que $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe et est égal à L, avec $L \neq 0$.

Alors :

$$\begin{aligned}\underbrace{\lim_{n\to\infty} a_n}_{=L} = & \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{\beta}{a_{n-1}}\right)}\\ &= \frac{1}{2}\underbrace{\lim_{n\to\infty} a_{n-1}}_{=L} + \frac{1}{2}\beta \underbrace{\frac{1}{\lim_{n\to\infty} a_{n-1}}}_{=1/L}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & L = \frac{1}{2}L + \frac{1}{2}\frac{\beta}{L}\\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{2}L = \frac{1}{2}\frac{\beta}{L}\\ \Leftrightarrow\ & L^2 = \beta\\ \Leftrightarrow\ & L = \pm\sqrt{\beta}\\ \Leftrightarrow\ & L = \sqrt{\beta} \qquad \text{car } a_0 > 0 \text{ implique } a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

Montrons $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{\beta}$, en posant $b_n = a_n - \sqrt{\beta}$

$$\Leftrightarrow a_n = b_n + \sqrt{\beta}$$

On a

$$\begin{aligned} b_n + \sqrt{\beta} &= \frac{1}{2}\left(b_{n-1} + \sqrt{\beta} + \frac{\beta}{b_{n-1} + \sqrt{\beta}}\right) \qquad \forall n \geq 1\\ \Leftrightarrow b_n &= \frac{1}{2}\left(b_{n-1} - \sqrt{\beta} + \frac{\beta}{b_{n-1} + \sqrt{\beta}}\right)\\ \Leftrightarrow b_n &= \frac{1}{2}\left(\frac{b_{n-1}^2 - (\sqrt{\beta})^2 + \beta}{b_{n-1} + \sqrt{\beta}}\right) = \frac{1}{2}\frac{b_{n-1}^2}{b_{n-1} + \sqrt{\beta}}\end{aligned}$$

Et $b_0 = a_0 - \sqrt{\beta} = 1 - \sqrt{\beta}$ (problème ? Non car $b_1 = \frac{1}{2}\frac{(1-\sqrt{\beta})^2}{1} \geq 0$).

$$\Rightarrow b_n \geq 0 \qquad \text{toujours } \forall n \geq 1 \text{ (et même } > 0 \text{ si } \beta \neq 1)$$

Remarque.

$$b_n = \frac{1}{2}\frac{b_{n-1}^2}{b_{n-1} + \sqrt{\beta}} \leq \frac{1}{2}\frac{b_{n-1}^2}{b_{n-1}} \leq \frac{1}{2}b_{n-1}$$

Donc b_n converge vers 0 (exponentiellement).
On sait déjà que b_n converge vers 0 $\Rightarrow a_n$ converge aussi et vers $\sqrt{\beta}$.
Dès que b_{n-1} est petit, disons $b_{n-1} \ll \sqrt{\beta}$, on a :

$$b_n \approx \frac{1}{2\sqrt{\beta}}b_{n-1}^2$$

À chaque itération, le nombre de chiffres significatifs *double* (environs).

Exemple. $\beta = 2$

n	a_n	$b_n = a_n - \sqrt{2}$
1	$1,5$	$0,0857\ldots < 10^{-1}$
2	$1,\underline{41}666\ldots$	$0,00245\ldots < 10^{-2}$
3	$1,\underline{41421}568\ldots$	$0,000002123\ldots < 10^{-4}$
4	$1,\underline{41421356}23\ldots$	$\approx 2\cdot 10^{-12} < 10^{-8}$
5	$1,\underline{414213562373}\ldots$	$< 10^{-16}$

2.4.2 Fractions continuées

$$a_n = \frac{1}{1+a_{n-1}} \qquad \forall n \geq 1;\ a_0 = 1$$

Pour $n \leq 3$:

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1 = \frac{1}{1}\\
a_1 &= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}\\
a_2 &= \frac{1}{1+\frac{1}{1+1}} = \frac{2}{3}\\
a_3 &= \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}} = \frac{3}{5}
\end{aligned}$$

Poser $a_n = \frac{b_{n-1}}{b_n}$ ($\forall n \geq 1$).
On obtient :

$$\begin{aligned}
&\frac{b_{n-1}}{b_n} = \frac{1}{1+\frac{b_{n-2}}{b_{n-1}}} \qquad \forall n \geq 2\\
\Leftrightarrow\ &\frac{b_{n-1}}{b_n} = \frac{b_{n-1}}{b_{n-1}+b_{n-2}}\\
\Leftrightarrow\ &b_n = b_{n-1}+b_{n-2} \qquad (\rightsquigarrow \text{Fibonacci})
\end{aligned}$$

Conditions initiales :

$$a_1 = \frac{b_0}{b_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow b_0 = 1,\ b_1 = 2$$

Donc $b_n = F_{n+2}\ \forall n$.
Utilité : approximer des nombres (ir)rationnels pour des rationnels *simples* (utilisant peu de bits).

Exemple. $\pi \approx 3,1415 = \frac{31415}{10000}$
En base 2 : on utilise $\lfloor \lg 31415 \rfloor + 1 + \lfloor \lg 10000 \rfloor + 1$ *bits.*
Peut-on faire mieux ? (Plus précis avec moins de bits).

2.5 Plus d'applications

2.5.1 Problème de la paire la plus proche

On a n points dans le plan (≤ 1 point par droite horizontale/verticale). On voudrait trouver une paire de points séparés par une distance minimale. Il existe un algorithme (trivial) en $\Theta(n^2)$.

Idée : utiliser une approche *diviser pour régner.*

Diviser le problème en deux sous-problèmes de taille $\approx \frac{n}{2}$, récurser, et recombiner.

Comment recombiner ?

Soit d en distance minimum observée à gauche ou à droite.

On veut voir s'il existe une paire $\{p, q\}$ de points avec p à gauche, q à droite et $d(p, q) < d$.

Observations :

1. On peut ignorer les points à distance $> d$ de la verticale D qui sépare les deux sous-problèmes ;
2. On a $d(p, q) < d$ pour une paire $\{p, q\}$ seulement si $d(p, D) \leq d$ et q se trouve dans un rectangle $2d \times d$.

Combien de points q peut-on trouver dans un tel rectangle ?
On dirait que le maximum est 6. Vérifions qu'il y en a ≤ 10.

Démonstration. Autour de chaque point, on considère un disque ouvert de rayon $\frac{d}{2}$. Si deux de ces disques se rencontrent, alors les centres q et q' se trouvent à distance $< \frac{d}{2} + \frac{d}{2} = d \Rightarrow$ les disques sont disjoints.

Chacun de ces disques a au moins $\frac{1}{4}$ de sa surface dans le rectangle.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow k\frac{1}{4}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 \leq 2d^2 \qquad \text{où } k := \#\text{points } q \text{ dans le rectangle} \\
&\Rightarrow k \leq \frac{32}{\pi} = 10,18\ldots \\
&\Rightarrow k \leq \lfloor 10,18\ldots \rfloor = 10
\end{aligned}$$

□

Algorithme :
- Précalcul : construire deux listes triées, contenant l'ensemble des points triés par abscisses $\nearrow$, et par ordonnées $\nearrow$; $\Theta(n \lg n)$
- Partie récursive :
  1. Diviser l'ensemble des points en deux parties, de taille $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ et $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$; $\Theta(n)$
  2. Déterminer récursivement une paire la plus proche dans chacune des parties (gauche et droite), soit d la distance minimum observée ; $\leq 2T\left(\lceil \frac{n}{2} \rceil\right)$
  3. Pour tous les points p à gauche *et* à distance $\leq d$ de la droite verticale D séparant la gauche et la droite ; inspecter tous les points q à droite, dans le rectangle défini par p ; retenir la distance minimum, et une paire à distance minimum (si distance $< d$) ; $\Theta(n)$
  4. Retourner la distance minimum et une paire de points à distance minimum. $\Theta(1)$

Donc au total : (récursif)

$$T(n) \leq 2T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + \Theta(n)$$

Ce qui donne

$$T(n) = O(n \lg n)$$

À cela on rajoute $\Theta(n \lg n)$ pour le précalcul. Au total, le problème peut être résolu en $O(n \lg n)$.

2.5.2 Fermeture transitive

Considérons un graphe dirigé acyclique $D = (V, A)$.
On veut construire $\hat{D} = (V, \hat{A})$ un graphe dirigé (acyclique avec boucle sur chaque sommet).

$$(u, v) \in \hat{A} \Leftrightarrow \exists \text{ chemin dirigé de } u \text{ à } v \text{ dans } D$$

Considérons la matrice M d'adjacence de D :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En général :

$$M = (m_{ij}) \text{ où } m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j) \text{ est un arc} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Calculer $(M + I)^2$ où $I =$ matrice identité $n \times n$ avec une nouvelle addition (c'est un *ou*) :

+	0	1
0	0	1
1	1	1

Exemple.

$$(M+I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Le coefficient en position $(i, j) = 1 \Leftrightarrow \exists$ chemin de longueur ≤ 2 de i à j dans D.

Généralisons : $(M+I)^k$ est une matrice binaire (avec la définition de $+$ choisie) dont le coefficient en position (i, j) est 1 si et seulement si $\exists$ chemin (dirigé) de i à j dans D, de longueur $\leq k$.

On veut donc calculer :

$$(M+I)^{n-1} \text{ ou } (M+I)^k \text{ où } k \geq n-1$$

On calcule $(M+I)^2$, $((M+I)^2)^2$, $(((M+I)^2)^2)^2$, etc. jusqu'à ce que l'exposant $\geq n-1$.

$\Rightarrow$ on obtient un algorithme en $O(n^\omega \lg n)$ où ω est n'importe quel nombre $\in\ ]2, 3[$ tel que $\exists$ algorithme de multiplication de complexité $O(n^\omega)$ pour des matrices $n \times n$.

Remarque. *$\hat{D}$ s'appelle la* fermeture transitive *de D.*

Chapitre 3

Fonctions génératrices

"Une fonction génératrice est une corde à linge où on peut prendre les termes d'une suite."

3.1 Nombres de Catalan

$$\begin{array}{lll}
n=1: & x_1 & 1\\
n=2: & x_1x_2 & 1\\
n=3: & (x_1x_2)x_3 & 2\\
 & x_1(x_2x_3) & \\
n=4: & x_1((x_2x_3)x_4) & 5\\
 & x_1(x_2(x_3x_4)) & \\
 & (x_1x_2)(x_3x_4) & \\
 & ((x_1x_2)x_3)x_4 & \\
 & (x_1(x_2x_3))x_4 &
\end{array}$$

Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ matrices de tailles différentes. Comment parenthèser pour minimiser le nombre de multiplications de nombres (réels) ?

Disons que l'on multiplie avec l'algorithme classique.

Exemple. *Pour $n = 4$. On a les matrices x_1 une 5×2, x_2 une 2×3, x_3 une 3×7 et x_4 une 7×2.*

$$\underbrace{x_1\,\overbrace{(\underbrace{(x_2x_3)}_{2\times 7}\,x_4)}^{2\times 2}}_{5\times 2} \qquad \textit{donne } 14\cdot 3+4\cdot 7+10\cdot 2=42+28+20=90$$

$$\overbrace{\underbrace{(x_1x_2)}_{5\times 3}\,\underbrace{(x_3x_4)}_{3\times 2}}^{5\times 2} \qquad \textit{donne } 15\cdot 2+6\cdot 7+10\cdot 3=30+42+30=102$$

Si on essaie toutes *les possibilités, combien a-t-on de cas à considérer ?*

Relation de récurrence ?

Exemple. *Pour $n = 5$.*

$$\begin{array}{ll}
\textit{Cas 1 : } x_1(x_2x_3x_4x_5) & c_1c_4=5\\
\textit{Cas 2 : } (x_1x_2)(x_3x_4x_5) & c_2c_3=2\\
\textit{Cas 3 : } (x_1x_2x_3)(x_4x_5) & c_3c_2=2\\
\textit{Cas 4 : } (x_1x_2x_3x_4)x_5 & c_4c_1=5
\end{array}$$

On a donc un total de $5+2+2+5=14$.

En général :

$$\boxed{c_n = c_1c_{n-1} + c_2c_{n-2} + \ldots + c_{n-1}c_1} \qquad \forall n \geq 2;\ c_1 = 1$$

Justification : le dernier produit effectué (cas où il y a n facteurs) est constitué du produit des k premiers facteurs (déjà multipliés entre eux) et des $n-k$ derniers facteurs (déjà multipliés entre eux), où $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Résolution de la récurrence : l'idée est de construire la *fonction génératrice*

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot x^n$$

(ici $c_0 := 0$, donc la somme commence à $n=1$), sans s'occuper de la convergence (pour le moment).

$$\begin{aligned}
f(x) &= c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \ldots \\
&= x + (c_1c_1)x^2 + (c_1c_2 + c_2c_1)x^3 + \ldots + (c_1c_{n-1} + \ldots + c_{n-1}c_1)x^n + \ldots \\
&= x + \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_nx^n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_nx^n\right) \\
&= x + [f(x)]^2 \\
\Rightarrow&\ [f(x)]^2 - [f(x)] + x = 0 \\
\Rightarrow&\ f(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2}
\end{aligned}$$

Quel signe prendre ?

$$f(0) = 0 \Rightarrow \boxed{f(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1-4x)^{1/2}$$

Rappel. *Série du binôme de Newton. On a vu :*

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k \qquad \textit{pour } n \in \mathbb{N}$$

(comporte un nombre fini de termes).

On peut définir, pour $t \in \mathbb{R}$:

$$\binom{t}{k} := \frac{t(t-1)\ldots(t-k+1)}{k!}$$

Quand $t > 0$, on a :

$$(1+x)^t = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{t}{k} x^k$$

Remarque. *Cela converge pour* $|x| \leq 1$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow f(x) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} (-4x)^k \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \binom{1/2}{k} (-1)^k 2^{2k} x^k \qquad \text{car } \binom{1/2}{0} := 1 \text{ par convention.} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{-\frac{1}{2}\binom{1/2}{k}(-1)^k 2^{2k}}_{c_k} \cdot x^k
\end{aligned}$$

$$c_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{2}\cdot\frac{(1/2)(1/2-1)(1/2-2)\dots(1/2-(n-1))}{n!}2^n2^n$$

Utilisons $2^n = \underbrace{2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}_{n \text{ fois}}$ pour *tuer* les n "1/2".

$$\begin{aligned}
c_n &= (-1)^{n+1}\frac{1}{2}\cdot\frac{1\overbrace{(1-2)}^{=-1}\overbrace{(1-4)}^{=-3}\dots\overbrace{(1-2(n-1))}^{=-2n+3=-(2n-3)}}{n!}\cdot 2^n\\
&= (-1)^{(n+1)+(n-1)}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{n!n!}\cdot 2^n\cdot n!\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{(2n-2)!}{n!n!}\cdot 2n\\
&= \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{c_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}} \qquad \forall n\geq 1$$

Formule pour le $n^{\text{ème}}$ nombre de Catalan.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
c_n	1	1	2	5	14	42	132	429	1430	...
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	...

On voit $c_n \gg F_n$. Tous les deux ont un comportement exponentiel, mais de base différente (base pour Catalan : 4, base pour Fibonacci : $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$).

Pour $n \geq 2$:

$$\#(\text{arbres binaires enracinés à } n \text{ feuilles}) = c_n$$

C'est simple, il existe une bijection entre :

(i) parenthèsages complets d'un produit de n facteurs ;

(ii) les arbres binaires enracinés à n feuilles.

Corollaire.

$$\begin{aligned}
&\#(\textit{arbres binaires enracinés à } n \textit{ feuilles})\\
&= \#(\textit{triangulations d'un } (n+1)\textit{-gone})\\
&= c_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} \qquad \forall n\geq 2
\end{aligned}$$

3.2 Retour sur les nombres de Fibonacci

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad \forall n\geq 2;\ F_0 = 0;\ F_1 = 1$$

Posons

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} F_n\cdot x^n$$

Alors

$$\begin{aligned}
f(x) &= \underbrace{0+x}_{\text{conditions initiales}} + \sum_{n=2}^{\infty} F_n x^n \\
&= x + \sum_{n=2}^{\infty} (F_{n-1} + F_{n-2}) x^n \\
&= x + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^n + \sum_{n-2}^{\infty} F_{n-2} x^n \\
&= x + \underbrace{x \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^{n-1}}_{xf(x)} + \underbrace{x^2 \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^{n-2}}_{x^2 f(x)} \\
\Rightarrow f(x) &= x + xf(x) + x^2 f(x) \\
\Rightarrow f(x) &= \frac{x}{1-x-x^2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{1-\varphi x} + \frac{\frac{-1}{\sqrt{5}}}{1-\bar{\varphi} x}
\end{aligned}$$

où $\varphi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\bar{\varphi} := \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

L'idée est d'utiliser

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda x)^n = \frac{1}{1-\lambda x} \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^n \cdot x^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\varphi}^n \cdot x^n$$

On retombe sur

$$\boxed{F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\varphi^n - \bar{\varphi}^n)}$$

Formule de Binet.

3.3 Fonctions génératrices ordinaires I

Définition (Fonction génératrice ordinaire). *La* fonction génératrice ordinaire *(FGO) de la suite*

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$$

est

$$A(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

On note

$$[x^n]A(x) = a_n = \text{coefficient de } x^n \text{ dans } A(x)$$

Remarque. *La série définissant une FGO*

- *converge pour certains $x \in \mathbb{R}$;*
- *diverge pour d'autres $x \in \mathbb{R}$.*

Pour le moment, on ignore les questions de convergence.

- *Les manipulations effectuées sur les FGO sont bien définies si on les considère comme séries* formelles *;*
- *Les séries auxquelles on s'intéresse ont typiquement de bonnes propriétés de convergence... au moins pour*

$$x \in \left]-r; r\right[\qquad \forall r > 0$$

Exemple. *La FGO de* $(1, 1, 1, 1, 1, \ldots)$ *est*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

La FGO de $(1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \ldots, \lambda^n, \ldots)$ *est*

$$\frac{1}{1-\lambda x}$$

Théorème. *Soit* $A(x)$ *la FGO de* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $B(x)$ *la FGO de* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(i) $A(x) + B(x)$ *est la FGO de* $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(ii) $xA(x)$ *est la FGO de* $(0, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, \ldots)$

(iii) $A'(x)$ *est la FGO de* $(a_1, 2a_2, 3a_3, \ldots, (n+1)a_{n+1}, \ldots)$

(iv) $A(x)B(x)$ *est la FGO de* $(a_0, a_0b_1 + a_1b_0, a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0, \ldots)$

(v) $\frac{A(x)-a_0}{x}$ *est la FGO de* $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n+1}, \ldots)$

(vi) $\int_0^x A(t)\mathrm{d}t$ *est la FGO de* $(0, a_0, \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{3}, \ldots, \frac{a_{n-1}}{n}, \ldots)$

(vii) $(1-x)A(x)$ *est la FGO de* $(a_0, a_1 - a_0, a_2 - a_1, \ldots, a_n - a_{n-1}, \ldots)$

(viii) $\frac{A(x)}{1-x}$ *est la FGO de* $(a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \ldots, \sum_{k=0}^{n} a_k, \ldots)$

Démonstration.

(i) Ok.

(ii) $xA(x) = x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n$

(iii) $A'(x) = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$

(iv)

$$\begin{aligned}
A(x)B(x) &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots)(b_0 + b_1x + b_2x^2 = \ldots) \\
&= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \ldots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)x^n
\end{aligned}$$

(v) Ok.

(vi) Ok.

(vii) Par (iv) : $(1-x)A(x) = A(x)B(x) \qquad B(x) = \text{FGO de } (1, -1, 0, 0, \ldots)$

$$= \text{FGO de } (a_0, \underbrace{a_0(-1) + a_1(1)}_{a_1 - a_0}, \ldots, a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + \underbrace{a_{n-1}b_1 + a_nb_0}_{a_n - a_{n-1}}, \ldots)$$

(viii) Par (iv), de manière similaire :

$$\frac{1}{1-x}A(x) = A(x)B(x) \qquad B(x) = \text{FGO de } (1, 1, 1, 1, \ldots)$$

$$= \text{FGO de } (a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \ldots, \sum_{k=0}^{n} a_k, \ldots)$$

□

Exemple.

I. *FGO de* $(0,1,2,3,\ldots,n,\ldots)$ *?*

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1-x} && = \text{FGO de } (1,1,1,1,\ldots)\\
\underset{(viii)}{\Rightarrow}\ &\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x} && = \text{FGO de } (1,1+1,1+1+1,\ldots)\\
& && = \text{FGO de } (1,2,3,\ldots,n+1,\ldots)\\
\underset{(ii)}{\Rightarrow}\ &\frac{x}{(1-x)^2} && = \text{FGO de } (0,1,2,3,\ldots,n,\ldots)
\end{aligned}$$

Généralisons, la FGO de $\left(\binom{n}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *pour* $k\in\mathbb{N}$ *fixé est égal à*

$$\frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$$

En effet, vrai pour $k=0$.
Si $\frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$ *est la FGO de* $\left(\binom{n}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\frac{x}{1-x}\cdot\frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$$

est la FGO de

$$\begin{aligned}
&\left(0,\binom{0}{k},\binom{0}{k}+\binom{1,k}{,}\binom{0}{k}+\binom{1}{k}+\binom{2}{k},\ldots\right)\\
=\ &\left(\binom{0}{k+1},\binom{1}{k+1},\binom{2}{k+1},\binom{3}{k+1},\ldots,\binom{n}{k+1},\ldots\right)\\
=\ &\left(\binom{n}{k+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}
\end{aligned}$$

II.

$$\begin{aligned}
&\text{FGO de } \left(0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots,\frac{1}{n},\ldots\right)\\
\underset{(vi)}{=}\ &\int_0^x \frac{1}{1-t}\mathrm{d}t = \Big[-\ln(1-t)\Big]_0^x\\
=\ &\left[\ln\frac{1}{1-t}\right]_0^x = \ln\frac{1}{1-x}-0
\end{aligned}$$

III. *FGO de* $\left(0,1,1+\frac{1}{2},1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3},\ldots,1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n},\ldots\right)$ *est*

$$\boxed{\frac{1}{1-x}\ln\frac{1}{1-x}}$$

Définition (Nombre harmonique). *Pour* $n\in\mathbb{N}$, $H_n := 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$ *est le* $n^{\text{ème}}$ nombre harmonique.

Remarque. *Pour tout choix de* noyau $N(x,n)$, *on peut définir une série génératrice*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot N(x,n)$$

Si on prend $N(x,n)=x^n$ *on obtient les FGO et si on prend* $N(x,n)=\frac{x^n}{n!}$ *on obtient les FGE (Fonctions Génératrices Exponentielles).*

3.4 Fonctions génératrices ordinaires II (récurrences linéaires)

Exemple. *On a vu l'exemple de Fibonacci* $f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$.

Un autre exemple facile :

$$a_n = 2a_{n-1} + 1 \qquad \forall n \geq 1;\ a_0 = 0$$

Posons

$$A(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Alors

$$\begin{aligned} A(x) &= 0 + \sum_{n=1}^{\infty} (2a_{n-1} + 1)x^n \\ &= 0 + 2xA(x) + \underbrace{\left(\frac{1}{1-x} - 1\right)}_{\frac{x}{1-x}} \\ \Rightarrow A(x) &= \frac{x}{(1-x)(1-2x)} \end{aligned}$$

Donc

$$A(x) = \frac{c_0}{1-2x} + \frac{c_1}{1-x}$$

pour certaines constantes c_0, c_1.

$$\underbrace{[x^n]A(x)}_{a_n} = c_0 2^n + c_1 \qquad \forall n \geq 0$$

Remarque. *Ceci se généralise aux récurrences linéaires à coefficients constants. Méthode de résolution :*

(i) Déterminer la FGO $A(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ *où* P *et* Q *sont des polynômes, et* $\deg P < \deg Q$ *;*

(ii) Décomposer $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *en fractions simples ;*

(iii) Extraire les coefficients en utilisant la décomposition.

3.5 Fonctions génératrices ordinaires III (applications)

3.5.1 Quicksort

(Hoare, 1962).

```
def partition(a, l, r, i):
  v := a[i]
  swap a[i] and a[r]
  s := l
  for k from l to r-1:
    if a[k] <= v:
      swap a[k] and a[s]
      s := s + 1
  swap a[s] and a[r]
  return s

def quicksort(a, l, r):
  if r > l:
```

```
    select a pivot index
    ni := partition(a, l, r, i)
    quicksort(a, l, ni − 1)
    quicksort(a, ni + 1, r)
```

Hypothèses :

1. Le vecteur à trier est une permutation des nombres de 1 à N ;
2. Le vecteur à trier est choisi uniformément aléatoirement parmi les $N!$ permutations de $1, \ldots, N$.

$X_n :=$ #comparaisons entre éléments de $a[\ldots]$ effectuées par quicksort sur un vecteur de taille N.
$E[X_n] = ?$
Décomposons :

$$X_N = Y_N + Z_N$$

avec Y_N le #comparaisons pendant le partitionnement et Z_N le #comparaisons après le partitionnement (partie récursive).

Notons

$$Y_N \equiv N - 1$$

Alors

$$\begin{aligned} E[X_N] &= E[Y_N] + E[Z_N] \\ &= (N-1) + \sum_{i=0}^{N-1} P[\text{rang du pivot est } i] \cdot E[Z_N/\text{rang du pivot est } i] \\ &= (N-1) + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{N} \cdot (\underbrace{E[X_i]}_{c_i} + \underbrace{E[X_{N-i-1}]}_{C_{N-i-1}}) \end{aligned}$$

Posons

$$C_N = E[X_N]$$

On trouve

$$\boxed{C_N = (N-1) + \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} c_i} \qquad \forall N \geq 1;\ c_0 = 0$$

Soit $C(x) := \sum_{N=0}^{\infty} c_N x^N =$ FGO de $(c_0, c_1, c_2, \ldots) = (0, c_1, c_2, \ldots)$.
$\forall N \geq 1$:

$$\begin{aligned} NC_N &= N(N-1) + 2\sum_{i=0}^{N-1} c_i \\ \Rightarrow \sum_{N=1}^{\infty} NC_N x^N &= \sum_{N=1}^{\infty} N(N-1)x^N + 2\sum_{N=1}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{N-1} c_i\right) x^N \end{aligned}$$

Notons :

1. $\sum_{N=1}^{\infty} NC_N x^N =$ FGO de $(0, c_1, 2c_2, 3c_3, \ldots) = xC'(x)$
2. $\sum_{N=1}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{N-1} c_i\right) x^N =$ FGO de $(0, c_0, c_0 + c_1, \ldots) = \frac{x}{1-x} C(x)$
3. $2\sum_{N=1}^{\infty} \frac{N(N-1)}{2} x^N = 2\times$FGO de $(0, 0, 1, 3, 6, \ldots, \binom{N}{2}, \ldots) = 2 \cdot \frac{x^2}{(1-x)^3}$

$$\begin{aligned}
&xC'(x) = 2\frac{x^2}{(1-x)^3} + 2\frac{x}{1-x}C(x) \\
\underset{x\neq 0}{\Leftrightarrow}\ & C'(x) - \frac{2}{1-x}C(x) = 2\frac{x}{(1-x)^3} \\
\Leftrightarrow\ & (1-x)^2C'(x) - 2(1-x)C(x) = 2\frac{x}{1-x} \\
\Leftrightarrow\ & \left[(1-x)^2C(x)\right]' = 2\frac{x}{1-x} \\
\Leftrightarrow\ & (1-x)^2C(x) = \int 2\frac{x}{1-x}\mathrm{d}x \\
\Leftrightarrow\ & (1-x)^2C(x) = 2\ln\frac{1}{1-x} - 2x + \mathrm{CST} \qquad \text{avec CST} = 0 \text{ car } C(0) = 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{C(x) = \frac{2}{(1-x)^2}\ln\frac{1}{1-x} - \frac{2x}{(1-x)^2}}$$

Théorème. *Le nombre moyen de comparaisons (entre éléments) effectuées par quicksort sur une permutation aléatoire de taille N est :*

$$[x^N]C(x) = C_N = 2(N+1)(H_{N+1}-1) - 2N \sim 2N\ln N$$

Démonstration.

$$\frac{1}{1-x}\ln\frac{1}{1-x} \text{ est la FGO de } (H_0, H_1, H_2, \ldots, H_N, \ldots)$$

où $H_N = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{N}$ et $H_0 = 0$.

$$\Rightarrow \frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1}{1-x} \text{ est la FGO de } (H_0, H_0 + H_1, \ldots, H_0 + H_1 + \ldots + H_N, \ldots)$$

$$\begin{aligned}
\text{or } \sum_{k=0}^{N} H_k = \sum_{k=1}^{N} H_k &= 1 + \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ldots + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{N}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{N} + \\
&\quad\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{N} + \\
&\quad\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{N} + \\
&\quad\ \vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\
&\quad\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{N} - N \\
&= (N+1)H_N - N \\
&= (N+1)(H_{N+1} - 1)
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} \text{ est la FGO de } (0, 1, 2, 3, \ldots, N, \ldots)$$

□

Remarque.

$$E[X_N] \sim 2N\ln N$$

On peut déterminer

$$Var[X_N] \sim N^2\left(7 - \frac{2\pi^2}{3}\right) \qquad [Knuth]$$

avec l'inégalité de Chebyshev :

$$P[|X_N - E[X_N]| \geq a] \leq \frac{Var(X_N)}{a^2}$$

On voit

$$P[|X_N - E[X_N]| \geq K \cdot N] \leq \frac{Var(X_N)}{K^2N^2} \sim \frac{7 - \frac{2\pi^2}{3}}{K^2}$$

3.5.2 Rendre la monnaie

De combien de manières peut-on rendre n eurocents de monnaie, avec des pièces de 1, 2, 5 et 10 eurocents ?

Soit

$$A(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ la FGO de la suite recherchée}$$

Alors

$$A(x) = \left(\sum_{n_1=0}^{\infty} x^{n_1}\right)\left(\sum_{n_2=0}^{\infty} x^{2n_2}\right)\left(\sum_{n_5=0}^{\infty} x^{5n_5}\right)\left(\sum_{n_{10}=0}^{\infty} x^{10n_{10}}\right)$$

Exemple. *Coefficients de x^3 ?* $\underbrace{1}_{x^3\cdot 1\cdot 1\cdot 1} + \underbrace{1}_{x\cdot x^2\cdot 1\cdot 1} = 2$

$$\boxed{A(x) = \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1-x^5}\cdot\frac{1}{1-x^{10}}}$$

Coefficients ?

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1+x+x^2+\ldots+x^9}{1-x^{10}}\cdot\frac{1+x^2+\ldots+x^8}{1-x^{10}}\cdot\frac{1+x^5}{1-x^{10}}\cdot\frac{1}{1-x^{10}} \\ &= \frac{1+x+2x^2+2x^3+3x^4+4x^5+5x^6+6x^7+7x^8+8x^9+7x^{10}+8x^{11}}{(1-x^{10})^4} + \\ &\quad \frac{7x^{12}+8x^{13}+7x^{14}+6x^{15}+5x^{16}+4x^{17}+3x^{18}+2x^{19}+2x^{20}+x^{21}+x^{22}}{(1-x^{10})^4} \end{aligned}$$

Observons :

$$[x^n]\frac{1}{(1-x)^4} = \binom{n+3}{3}$$

On sait que $\frac{x^3}{(1-x)^4}$ est la FGO de $(\binom{n}{3})_{n\in\mathbb{N}}$

$$[x^{10n}]\frac{1}{(1-x^{10})^4} = \binom{n+3}{3}$$

$$\Rightarrow [x^n]\frac{1}{(1-x^{10})^4} = \begin{cases} \binom{\frac{n}{10}+3}{3} & \text{si } 10 \mid n \\ 0 & \text{si } 10 \nmid n \end{cases}$$

Par exemple, pour

$$n \equiv 0 \pmod{10}$$

on trouve

$$\begin{aligned} [x^n]A(x) &= [x^n]\frac{1+7x^{10}+2x^{20}}{(1-x^{10})^4} \\ &= \binom{\frac{n}{10}+3}{3} + 7\binom{\frac{n}{10}+2}{3}[n\geq 10] + 2\binom{\frac{n}{10}+1}{3}[n \geq 20] \end{aligned}$$

où
$$[n \geq a] = \begin{cases} 1 & \text{si } n \geq a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
(notation d'Iverson).

On trouve des formules similaires quand $n = 1, 2, 3, \ldots, 9 \pmod{10}$.

Exemple.
$$n = 10 \longrightarrow a_{10} = \binom{4}{3} + 7 \cdot \binom{3}{3} + 0 = 4 + 7 = 11$$

3.6 Fonctions génératrices exponentielles

Définition (Fonction génératrice exponentielle). *La* fonction génératrice exponentielle *(FGE) de la suite* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est*
$$A(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$$

On écrit :
$$n![x^n]A(x) = a_n$$

Exemple. *Par calcul direct*

(i) FGE de $(1, 1, 1, \ldots) = (\binom{n}{0})_{n \in \mathbb{N}}$ *est* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$

(ii) FGE de $(\binom{n}{k})_{n \in \mathbb{N}}$ *est* $\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{x^n}{n!} = \frac{x^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \frac{x^k}{k!} e^x$

(iii) FGE de $(1, 1, 2, 6, 24, \ldots, n!, \ldots) = (n!)_{n \in \mathbb{N}}$ *est* $\sum_{n=0}^{\infty} n! \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{1-x}$

Utilité :

1. Comptage de structures étiquetées ;
2. Méthode symbolique ;
3. Meilleures propriétés de convergence.

Théorème. *Si* $A(x)$ *est la FGE de* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *et* $B(x)$ *est la FGE de* $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *:*

(i) $\int_0^x A(t)\mathrm{d}t$ *est la FGE de* $(0, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, \ldots)$

(ii) $A'(x)$ *est la FGE de* $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{n+1}, \ldots)$

(iii) $xA(x)$ *est la FGE de* $(0, a_0, 2a_1, 3a_2, \ldots, na_{n-1}, \ldots)$

(iv) $\frac{A(x)-A(0)}{x}$ *est la FGE de* $(a_1, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{3}, \ldots, \frac{a_{n+1}}{n+1}, \ldots)$

(v) $A(x) + B(x)$ *est la FGE de* $(a_0 + b_0, a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n, \ldots)$

(vi) $A'(x) - A(x)$ *est la FGE de* $(a_1 - a_0, a_2 - a_1, \ldots, a_{n+1} - a_n, \ldots)$

(vii) $A(x)B(x)$ *est la FGE de* $(a_0b_0, a_0b_1 + a_1b_0, a_0b_2 + 2a_1b_1 + a_2b_0, \ldots, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k}, \ldots)$

(viii) $e^x A(x)$ *est la FGE de* $(a_0, a_0 + a_1, a_0 + 2a_1 + a_2, \ldots, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k, \ldots)$

3.7 La méthode symbolique I (objets non étiquetés)

Rappel. *L'équation fonctionnelle, la FGO des nombres de Catalan :*
$$f(x) = x + [f(x)]^2$$

Formons la série *symbolique* $S(x)$

$$S(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum (\text{arbres binaires différents de } i \text{ feuilles}) \cdot x^i$$

Définissons le produit $A_1 \times A_2$ des arbres A_1, A_2 par

$$A_1 \times A_2 = (\text{arbre avec fils gauche } A_1 \text{ et fils droit } A_2)$$

Alors

$$S(x) = (\text{racine}) \cdot x + [S(x)]^2$$

$\mathcal{A}$ classe (ou ensemble) d'objets non étiquetés.
- Chaque objet $a \in \mathcal{A}$ a une taille $|a|$ (dépend du contexte) ;
- $a_n := \#$objets de taille n dans $\mathcal{A}$;
- FGO de $\mathcal{A}$ est $A(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{a \in \mathcal{A}} x^{|a|}$.

Théorème. *Si $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sont deux classes (d'objets non étiquetés), $A(x)$ est la FGO de $\mathcal{A}$ et $B(x)$ est la FGO de $\mathcal{B}$*
- *$A(x) + B(x)$ est la FGO de $\mathcal{A} + \mathcal{B}$, la* réunion disjointe *de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$;*
- *$A(x)B(x)$ est la FGO de $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, le* produit cartésien *de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$: ses objets sont de la forme (a, b) avec $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$, dont la taille est $|a| + |b|$;*
- $\underbrace{\dfrac{1}{1 - A(x)}}_{=1+A(x)+A^2(x)+\dots}$ *est la FGO des suites d'objets de $\mathcal{A}$: $\{\epsilon\} + \mathcal{A} + \mathcal{A}^2 + \mathcal{A}^3 + \dots$*

3.8 La méthode symbolique II (objets étiquetés)

Idées :

1. Les objets sont constitués d'*atomes*, numérotés de 1 à n (pour un objet de taille n) ;
2. On utilise les FGEs.

Exemple.

1. *Permutations* $\mathcal{P} = \{\epsilon, 1, 12, 21, 123, 132, 213, 312, 321, \dots\}$

$$\textit{FGE de } \mathcal{P} \textit{ est } \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{x^{|p|}}{|p|!} = \sum_{n=0}^{\infty} n! \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{1-x}$$

2. *Cycles :* $(123) = (231) = (312)$

$$\mathcal{C} = \{(1), (12), (123), (321), \dots\}$$

Remarque. *Il y a $\frac{n!}{n} = (n-1)!$ cycles de taille $n \geq 1$ (et 0 cycles de taille 0).*

$$\Rightarrow \textit{FGE de } \mathcal{C} = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)! \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = \ln \frac{1}{1-x}$$

Pour deux classes $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ d'objets étiquetés on définit :

$\mathcal{A} + \mathcal{B}$ la somme disjointe de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, comme précédemment.

Mais $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ n'a plus vraiment de sens car si $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$ alors (a, b) aura des atomes répétés (ce qu'on ne veut pas).

Exemple. $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{C} =$ *classe des cycles étiquetés pour $a = (1)$, $b = (1, 2)$, on a $ab = (1)(1, 2)$*
On va plutôt définir un ensemble *d'objets obtenus à partir de a et b :* $(1)(2, 3), (2)(1, 3), (3)(1, 2)$.

En généralisant ceci, on définit $\mathcal{A} * \mathcal{B}$ comme la classe des objets étiquetés obtenus en combinant *toutes* les paires d'objets a, b avec $a \in \mathcal{A}$ et $b \in \mathcal{B}$, en *réétiquetant* de toutes les manières possibles (compatibles avec a et b).

Remarque. *Il y a* $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ *manières de faire ça pour un objet a de taille k et un objet b de taille $n-k$.*

Théorème. *$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ classes d'objets étiquetés*
Si $A(x)$ est la FGE de $\mathcal{A}$ et $B(x)$ est la FGE de $\mathcal{B}$, alors
- *$A(x) + B(x)$ est la FGE de $\mathcal{A} + \mathcal{B}$;*
- *$A(x)B(x)$ est la FGE de $\mathcal{A} * \mathcal{B}$;*
- *$\frac{1}{1-A(x)}$ est la FGE des suites d'objets de $\mathcal{A}$ (ordre important) ;*
- *$e^{A(x)}$ est la FGE des ensembles d'objets de $\mathcal{A}$.*

Exemple.

1. *$\mathcal{C}$ = classe des cycles (étiquetés)*

$$C(x) = \textit{FGE de } \mathcal{C} = \ln \frac{1}{1-x}$$
$$e^{C(x)} = e^{\ln \frac{1}{1-x}} = \frac{1}{1-x} = \textit{FGE de } (n!)_{n \in \mathbb{N}}$$

la FGE des ensembles de cycles étiquetés.

$$\{\{\}, \{(1)\}, \{(1), (2)\}, \{(1,2)\}, \{(1), (2), (3)\}, \{(1), (2,3)\}, \ldots\}$$

Il y a $n!$ ensembles de cycles sur $\{1, 2, \ldots, n\}$.
Toute permutation *de $\{1, 2, \ldots, n\}$ peut s'écrire de manière unique comme un ensemble de cycles :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \{(1,4,3), (2)\}$$

2. *Nombres de Stirling de la $1^{ère}$ espèce*

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} := \#\textit{permutations de } [n] \textit{ ayant exactement } k \textit{ cycles.}$$

FGE :

$$\frac{1}{k!} \underbrace{C(x) \cdot C(x) \cdot \ldots \cdot C(x)}_{k \text{ fois}} = \frac{1}{k!} \left(\ln \frac{1}{1-x} \right)^k$$

Ces nombres forment un triangle :

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 0 & & 1 & & & & \\ & & & 0 & & 1 & & 1 & & & \\ & & 0 & & 2 & & 3 & & 1 & & \\ & 0 & & 6 & & 11 & & 6 & & 1 & \\ 0 & & 24 & & 50 & & 35 & & 10 & & 1 \end{array}$$

3. *Nombres de Stirling de la $2^{ème}$ espèce*

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} := \#\textit{partitions de } [n] \textit{ en } k \textit{ sous-ensembles (non vides).}$$

- *x est la FGE de la classe $\{1\}$ (un objet de taille 1) ;*

- e^x *est la FGE de la classe* $\{\{\}, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \ldots\}$;
- $e^x - 1$ *est la FGE de la classe* $\{\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \ldots\}$;
- $\frac{1}{k!}(e^x-1)^k$ *est la FGE de la classe* $\{\{\{1\},\{2\}\}, \{\{1\},\{2,3\}\}, \{\{2\},\{1,3\}\}, \{\{3\},\{1,2\}\}, \ldots\}$ *(pour* $k=2$*).*

On obtient un triangle :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 0 & & 1 & & & & \\
 & & & 0 & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 0 & & 1 & & 3 & & 1 & & \\
 & 0 & & 1 & & 7 & & 6 & & 1 & \\
0 & & 1 & & 15 & & 25 & & 10 & & 1
\end{array}$$

3.9 Nombres de Bernouilli

Motivation : calculer la somme

$$S_t(n) = 0^t + 1^t + 2^t + \ldots + (n-1)^t = \sum_{k=0}^{n-1} k^t \qquad \forall t \in \mathbb{N}$$

Exemple. *Pour*

$$t=0,\ S_0(n) = 0^0 + 1^0 + 2^0 + \ldots + (n-1)^0 = n$$
$$t=1,\ S_1(n) = 0^1 + 1^1 + 2^1 + \ldots + (n-1)^1 = \frac{n(n-1)}{2}$$
$$etc.$$

Fixons $n \in \mathbb{N}$ et écrivons la FGE de $(S_0(n), S_1(n), \ldots, S_t(n), \ldots)$

$$\begin{aligned}
&\sum_{t=0}^{\infty} S_t(n) \cdot \frac{x^t}{t!} \\
&= \sum_{t=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} k^t \right) \frac{x^t}{t!} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{k^t \cdot x^t}{t!} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (e^x)^k \\
&= (e^x)^0 + (e^x)^1 + \ldots + (e^x)^{n-1} \\
&= \frac{(e^x)^n - 1}{e^x - 1} = \frac{e^{nx}-1}{e^x-1} \\
&= \frac{e^{nx}-1}{x} \cdot \frac{x}{e^x-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{e^{nx}-1}{x} &= \frac{1}{x}\left(nx + \frac{n^2x^2}{2} + \frac{n^3x^3}{6} + \ldots \right) \\
&= \left(n + \frac{n^2}{2}x + \frac{n^3}{3}\frac{x^2}{2} + \ldots \right) \\
&= \text{FGE de } \left(n, \frac{n^2}{2}, \frac{n^3}{3}, \ldots, \frac{n^{t+1}}{t+1}, \ldots \right)
\end{aligned}$$

Posons $B_t := t![x^t]\frac{x}{e^x-1}$ le $t^{\text{ème}}$ nombre de Bernouilli, c'est-à-dire

$$\frac{x}{e^x-1} \text{ est la FGE de } (B_0, B_1, B_2, \ldots, B_t, \ldots)$$

$$\Rightarrow \frac{e^{nx}-1}{x} \cdot \frac{x}{e^x-1} \text{ est la FGE de}$$
$$\left(B_0 n, B_0\frac{n^2}{2} + B_1 n, B_0\frac{n^3}{3} + 2B_1\frac{n^2}{2} + B_2 n, \ldots, \sum_{k=0}^{t}\binom{t}{k} B_k \cdot \frac{n^{t+1-k}}{t+1-k}, \ldots\right)$$
$$\Rightarrow S_t(n) = \sum_{k=0}^{t}\binom{t}{k} B_k \cdot \frac{n^{t+1-k}}{t+1-k}$$
$$= \frac{1}{t+1}\sum_{k=0}^{t}\frac{t!\cdot(t+1)}{k!(t-k)!} B_k \cdot \frac{n^{t+1-k}}{t+1-k}$$
$$\boxed{S_t(n) = \frac{1}{t+1}\sum_{k=0}^{t}\binom{t+1}{k} B_k \cdot n^{t+1-k}}$$

Comment calculer les B_k ?

$$B_0 + B_1 x + B_2\frac{x^2}{2} + B_3\frac{x^3}{6} + \ldots = \sum_{t=0}^{\infty} B_t\frac{x^t}{t!} = \frac{x}{e^x-1} = \frac{x}{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots}$$
$$\Leftrightarrow x = \left(B_0 + B_1 x + B_2\frac{x^2}{2} + B_3\frac{x^3}{6} + \ldots\right)\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \ldots\right)$$

Ceci donne
- coefficient de x^0 : $0 = 0$
- coefficient de x^1 : $1 = B_0$
- coefficient de x^2 : $0 = \frac{B_0}{2} + B_1 \Leftrightarrow B_1 = -\frac{1}{2}$
- coefficient de x^3 : $0 = \frac{B_0}{6} + \frac{B_1}{2} + \frac{B_2}{2} \Leftrightarrow B_2 = -B_1 - \frac{B_0}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$
- coefficient de x^4 : $0 = \frac{B_0}{24} + \frac{B_1}{6} + \frac{B_2}{4} + \frac{B_3}{6} \Leftrightarrow B_3 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 0$

Remarque. $B_k = 0$ *pour* k *impair,* $k \geq 3$.

$$(B_0, B_1, B_2, B_3, \ldots) = (1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0, *, 0, *, 0, \ldots)$$

Ceci donne

$$S_0(n) = \frac{1}{0+1}\left(\underbrace{\binom{0+1}{0}}_{=1}\underbrace{B_0}_{=1}\,n^{0+1-0}\right) = n$$

$$S_1(n) = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\binom{2}{0}B_0}_{=1}n^2 + \underbrace{\binom{2}{1}B_1}_{=-1}n\right) = \frac{1}{2}(n^2-n) = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$S_2(n) = \frac{1}{3}\left(\underbrace{\binom{3}{0}B_0}_{=1}n^3 + \underbrace{\binom{3}{1}B_1}_{=-\frac{3}{2}}n^2 + \underbrace{\binom{3}{2}B_2}_{=\frac{1}{2}}n\right) = \frac{1}{3}\left(n^3 - \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n\right)$$

$$\begin{aligned}S_3(n) &= \frac{1}{4}\left(\underbrace{\binom{4}{0}B_0}_{=1}n^4 + \underbrace{\binom{4}{1}B_1}_{=-2}n^3 + \underbrace{\binom{4}{2}B_2}_{=1}n^2 + \underbrace{\binom{4}{1}B_3}_{=0}n\right) = \frac{1}{4}(n^4-2n^3+n^2)\\ &= \frac{1}{4}n^2(n^2-2n+1) = \frac{1}{4}n^2(n-1)^2 = \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2\end{aligned}$$

Toujours

$$\begin{aligned}S_t(n) &= \frac{n^{t+1}}{t+1} + \underbrace{\ldots}_{\text{ordre inférieur}}\\ \Rightarrow S_t(n) &\sim \frac{n^{t+1}}{t+1}\end{aligned}$$

Chapitre 4

Comportements asymptotiques

4.1 Nombres harmoniques

$$H_0 = 0$$
$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \qquad \forall n \geq 1$$

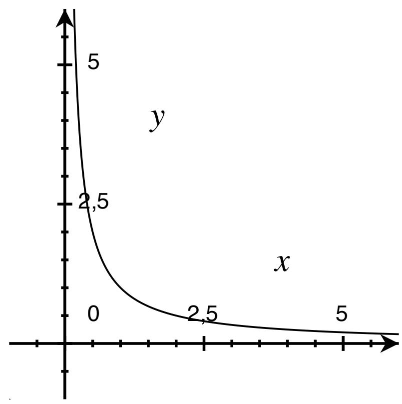
apparaissent à *plein* d'endroits.

Buts : montrer

(i) $H_n \sim \ln(n)$, c'est-à-dire que l'erreur *relative* quand on remplace H_n par $\ln(n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

(ii) $\lim_{n\to\infty} H_n - \ln(n) = \gamma$, c'est-à-dire que l'erreur *absolue* quand on remplace H_n par $\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \gamma \approx 0,577215$ (appelée *constante d'Euler*).

Remarque. $H_\infty = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty$, *c'est-à-dire* $\lim_{n\to\infty} H_n = \infty$



Nous pouvons distinguer 3 aires différentes :

1. L'aire des rectangles sous la courbe : $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = H_n - 1$;
2. L'aire sous la courbe : $\int_1^n \frac{1}{t} \mathrm{d}t = \ln(n)$;
3. L'aire des rectangles au-dessus de la courbe : $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1} = H_{n-1}$.

Donc

$$\begin{aligned} & H_n - 1 < \ln(n) < H_{n-1} \\ \Rightarrow\ & H_n - 1 < \ln(n) < H_n \\ \Rightarrow\ & \underbrace{\frac{H_n - 1}{H_n}}_{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1} < \frac{\ln(n)}{H_n} < \underbrace{\frac{H_n}{H_n}}_{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1} \\ \Rightarrow\ & \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{H_n} = 1 \end{aligned}$$

De plus : $\ln(n) < H_n < \ln(n) + 1$.

Corollaire. *La série harmonique diverge logarithmiquement.*

Exemple. *Pour avoir $H_n \approx 10$:*

$$\ln(n) < 10 < \ln(n) + 1$$

Prendre $e^9 < n < e^{10}$, c'est-à-dire $8104 < n < 22026$.

Posons

$$a_n := H_n - \ln(n) \qquad \text{[erreur absolue]}$$

On a

$$\left.\begin{array}{l} a_n > 0\ \forall n \text{ car } H_n > \ln(n) \\ a_n \text{ strictement décroissante} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \text{ existe, } \geq 0.$$

$a_n \searrow$ car

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= H_{n+1} - \ln(n+1) - H_n + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} - \underbrace{\ln(n+1) - \ln(n)}_{=\int_n^{n+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

On voit

$$\begin{aligned} & a_{n+1} - a_n < 0 \\ \Rightarrow\ & a_1 > a_2 > a_3 > \dots \\ \Rightarrow\ & a_n \searrow \end{aligned}$$

Posons

$$\gamma := \lim_{n\to\infty} \underbrace{(H_n - \ln(n))}_{a_n}$$

On peut calculer γ :

$$\gamma = 0,5772156649\dots$$

Remarque. *On peut montrer qu'en fait*

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} - \epsilon_n \qquad \textit{avec } 0 < \epsilon_n < \frac{1}{252n^6}$$

En particulier : $H_n = \ln(n) + \gamma + \theta(\frac{1}{n})$.

4.2 Factorielles

de Moivre $n! \sim C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ pour une constante C.
Stirling a obtenu ($\pm$ 1730) :

$$C = \sqrt{2\pi}$$

4.2.1 Formule de Wallis

$$\boxed{\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n)\cdot(2n)}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)}}$$

Démonstration.

$$I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \mathrm{d}x \qquad \forall m \in \mathbb{N}$$

$m = 0, 1$:

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin^0 x}_{=1} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^1 x \mathrm{d}x = \Big[-\cos x \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$m \geq 2$:

$$\begin{aligned}
I_m &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin^{m-1} x}_{=f(x)} \cdot \underbrace{\sin^1 x}_{=g'(x)} \mathrm{d}x \\
f'(x) &= (m-1)\sin^{m-2} x \cdot \cos x \\
g(x) &= -\cos x \\
\Rightarrow I_m &= \Big[\sin^{m-1} x \cdot (-\cos x) \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (m-1)\sin^{m-2} x(-1) \underbrace{\cos^2 x}_{=(1-\sin^2 x)} \mathrm{d}x \\
&= (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x \mathrm{d}x - (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \mathrm{d}x \\
\Leftrightarrow I_m &= (m-1)I_{m-2} - (m-1)I_m \\
\Leftrightarrow mI_m &= (m-1)I_{m-2}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2}}$$

Donc

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n}\cdot \ldots \cdot \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot \underbrace{I_0}_{=\frac{\pi}{2}}$$

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot \ldots \cdot \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot \underbrace{I_1}_{=1}$$

Pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}] : 0 \leq \sin x \leq 1$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \sin^{2n-1} x \geq \sin^{2n} x \geq \sin^{2n+1} x \\
&\Rightarrow I_{2n-1} \geq I_{2n} \geq I_{2n+1} \\
&\Rightarrow \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} \geq \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \geq \underbrace{\frac{I_{2n+1}}{I_{2n+1}}}_{=1}
\end{aligned}$$

Poser $m = 2n + 1$.

$$\frac{I_{m-2}}{I_m} = \frac{m}{m-1} = \frac{2n+1}{2n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1$$

C'est-à-dire

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)\cdot(2n-1)\cdot(2n-1)\cdot\ldots\cdot 5\cdot 5\cdot 3\cdot 3\cdot 1}{(2n)\cdot(2n)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 4\cdot 2\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}=1$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)\cdot(2n)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 4\cdot 2\cdot 2}{(2n+1)\cdot(2n-1)\cdot(2n-1)\cdot\ldots\cdot 5\cdot 5\cdot 3\cdot 3\cdot 1}=\frac{\pi}{2}$$

□

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{2} &= \lim_{n\to\infty}\frac{(2n)^4\cdot\ldots\cdot 4^4\cdot 2^4}{(2n+1)\cdot(2n)^2\cdot(2n-1)^2\cdot\ldots\cdot 5^2\cdot 4^2\cdot 3^2\cdot 2^2}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\,\frac{[\overbrace{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)}^{n\text{ facteurs pairs}}]^4}{[(2n)!]^2}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{2^{4n}}{2n+1}\cdot\frac{(n!)^4}{[(2n)!]^2}\\
\Rightarrow 1 &= \lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{2}{\pi}\cdot\frac{2^{4n}}{2n+1}}_{=a(n)}\cdot\underbrace{\frac{1}{\left[\frac{(2n)!}{n!n!}\right]^2}}_{=b(n)}
\end{aligned}$$
$$\Rightarrow a(n)\sim b(n)$$

C'est-à-dire

$$\binom{2n}{n}^2\sim\frac{2}{\pi}\cdot\frac{2^{4n}}{2n+1}\sim\frac{2}{\pi}\cdot\frac{2^{4n}}{2n}\sim\frac{2^{4n}}{\pi n}$$

On trouve

$$\binom{2n}{n}\sim\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$$

qui donne une approximation pour des coefficients binomiaux au centre du triangle de Pascal.

Remarque.

$$F_n\sim\frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n$$

Wallis donne

$$C_{n+1}=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}\sim\frac{4^n}{\sqrt{\pi}n^{\frac{3}{2}}}$$

On voit que

$$C_n\gg F_n\qquad\text{pour } n \text{ grand}$$

Comment obtenir la constante C de Stirling ?
Par Wallis :

$$\binom{2n}{n}\sim\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$$

Par de Moivre :

$$\binom{2n}{n}=\frac{(2n)!}{n!n!}\sim\frac{C\cdot\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{C^2\cdot n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}\sim\frac{1}{C}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}2^{2n}$$

Donc on doit avoir $\sqrt{2}\frac{1}{C}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ car $C=\sqrt{2\pi}$.

4.2.2 Formule de Stirling (et de de Moivre)

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Théorème.

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\epsilon_n} \qquad \text{où } \frac{1}{12n+1} < \epsilon_n < \frac{1}{12n}$$

C'est-à-dire

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n+1}} < n! < \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n}}$$

Remarque. *L'erreur relative commise en remplaçant* $n!$ *par* $\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ *vaut*

$$\left|\frac{n! - \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{n!}\right| \approx \frac{1}{12n} \qquad (\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0)$$

Exemple.

n	*Approximation de Stirling*	*Erreur absolue*	*Erreur relative*
1	$0,922\ldots$	$\approx 0,08$	$\approx 8\%$
2	$1,919\ldots$	$\approx 0,08$	$\approx 4\%$
5	$118,019\ldots$	≈ 2	$\approx 1,6\%$
100	$\approx 9,324 \cdot 10^{157}$	$\approx 1,7 \cdot 10^{155}$	$\approx 0,08\%$

4.3 Formule d'Euler-Maclaurin

On a vu :

1.

$$\begin{aligned} 0^t + 1^t + 2^t + \ldots + (n-1)^t &= \frac{n^{t+1}}{t+1} + \underbrace{\ldots}_{\substack{\text{nombres de}\\ \text{Bernouilli}}} \\ &= \frac{1}{t+1}\sum_{k=0}^{t}\binom{t+1}{k} B_k \cdot n^{t+1-k} \end{aligned}$$

2. Pour approximer

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

on utilise

$$\int_1^n \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \ln(n)$$

$$\boxed{\sum_{a\le k<b} f(k) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{m}\frac{B_k}{k!}\left[f^{\underline{k-1}}(x)\right]_a^b + \underbrace{R_m}_{\text{reste}} \qquad \text{où } R_m = (-1)^{m+1}\int_a^b \frac{B_m(\{x\})}{m!}\cdot f^{\underline{m}}(x)\mathrm{d}x}$$

$a, b \in \mathbb{Z}$, $a \le b$.
$m \in \mathbb{Z}$, $m \ge 1$.
f fonction telle que $f', f'', f''', \ldots, f^{\underline{m}}$ existent et sont continues sur $[a, b]$.
$B_m(x)$ est le $m^{\text{ème}}$ *polynôme de Bernouilli.*

$$B_m(x) = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k} B_k \cdot x^{m-k} \qquad \text{où les } B_k \text{ sont les nombres de Bernouilli}$$

$\{x\} := x - \lfloor x \rfloor$ est la partie fractionnaire de x.

4.3.1 Utilité

1. Généraliser $0^t + 1^t + 2^t + \ldots + (n-1)^t = \frac{n^{t+1}}{t+1} + \ldots$
2. Pour $f(k) = \frac{1}{k}$ et $a = 1$, $b = n$

$$\rightsquigarrow H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} + \text{erreur}$$

3. Pour $f(k) = \ln k$ et $a = 1$, $b = n$

$$\rightsquigarrow \ln(n-1)! = \sum_{1 \leq k < n} \ln k = n \ln n + \ldots$$

   on trouve (en particulier) la formule de Stirling.

"Preuve heuristique" :

	Calcul différentiel infinitésimal	Calcul différentiel discret
Opérateurs	$\int$ et D	$\sum$ et Δ

$$\begin{aligned} Df(x) &= f'(x) \\ \Delta f(x) &= f(x+1) - f(x) \end{aligned}$$

On a

$$\begin{gathered} \int D = D \int \Rightarrow D^{-1} = \int \\ \sum \Delta = \Delta \sum \Rightarrow \Delta^{-1} = \sum \end{gathered}$$

Par Taylor :

$$f(x+\epsilon) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}\epsilon + \frac{f''(x)}{2!}\epsilon^2 + \ldots$$

Prenons $\epsilon = 1$

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= f(x+1) - f(x) \\ &= \frac{f'(x)}{1!} + \frac{f''(x)}{2!} + \frac{f'''(x)}{3!} + \ldots \\ &= \left(\frac{D}{1!} + \frac{D^2}{2!} + \frac{D^3}{3!} + \ldots\right) f(x) \\ &= \left(e^D - 1\right) f(x) \end{aligned}$$

Vu que $\Delta = e^D - 1$ (égalité entre opérations) $\Rightarrow \sum = \Delta^{-1} = \frac{1}{e^D - 1}$.

$$\begin{aligned} \sum &= \frac{1}{D} \cdot \frac{D}{e^D - 1} \\ &= \frac{1}{D} \cdot \left(B_0 + \frac{B_1}{1!} D + \frac{B_2}{2!} D^2 + \ldots\right) \\ &= \frac{\overbrace{B_0}^{=1}}{D} + \frac{B_1}{1!} + \frac{B_2}{2!} D + \ldots \\ &= \int + \frac{B_1}{1!} + \frac{B_2}{2!} D + \ldots \end{aligned}$$

On trouve finalement

$$\sum = \int + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{k!} D^{k-1}$$

et

$$\sum_{a\leq k<b} f(k) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{B_k}{k!}f^{\underline{k-1}}(x)\right]_a^b$$

$$\Rightarrow \sum_{a\leq k<b} f(k) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{B_k}{k!}f^{\underline{k-1}}(x)\right]_a^b + \underbrace{R_m}_{\text{reste}}$$

4.3.2 Application : approximation de $\ln(n!)$

$f(x) = \ln x$, $a = 1$, $b = n$.
$m = 2p$ (pas trop grand).
Alors :

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int \ln(x)\mathrm{d}x = x\ln x - x + CST$$

Pour $k \geq 2$:

$$\frac{f^{\underline{k-1}}(x)}{k!} = \frac{1}{k!}(-1)^{k-2}(k-2)!\frac{1}{x^{k-1}} = (-1)^{k-2}\frac{1}{k(k-1)x^{k-1}}$$

$$\begin{aligned}\ln((n-1)!) &= \sum_{1\leq k<n}\ln(k)\\ &= \underbrace{\int_1^n \ln x\mathrm{d}x}_{=\left[x\ln x - x\right]_1^n} + \Big[\underbrace{B_1}_{=-\frac{1}{2}}\ln x\Big]_1^n + \sum_{k=2}^{m}\left[B_k\cdot(-1)^{k-2}\frac{1}{k(k-1)x^{k-1}}\right]_1^n + R_m\end{aligned}$$

Rappel. $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_3 = 0$, $B_4 = -\frac{1}{30}$ *(nombres de Bernouilli).*

On peut vérifier en utilisant
- $B_k = 0$ pour k impair, $k \geq 3$;
- Un *truc* pour évaluer R_m.

que

$$\ln((n-1)!) = n\ln n - n - \frac{\ln n}{2} + \sigma + \sum_{l=1}^{p}\frac{B_{2l}}{2l(2l-1)n^{2l-1}} + \varphi_{p,n}\frac{B_{2p+2}}{(2p+2)(2p+1)n^{2p+1}}$$

où $0 < \varphi_{p,n} < 1$ et σ est la constante de Stirling (on sait que $e^{\sigma} = \sqrt{2\pi}$ par Wallis).

$$\Rightarrow \ln(n!) = n\ln n - n + \frac{\ln n}{2} + \sigma + \sum_{l=1}^{p}\frac{B_{2l}}{2l(2l-1)n^{2l-1}} + \varphi_{p,n}\frac{B_{2p+2}}{(2p+2)(2p+1)n^{2p+1}}$$

Pour $p = 2$ ($m = 4$), on trouve :

$$\ln(n!) = n\ln n - n + \frac{\ln n}{2} + \sigma + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2(2-1)n^{2-1}} - \frac{1}{30}\cdot\frac{1}{4(4-1)n^{4-1}} + \underbrace{\text{reste}}_{O\left(\frac{1}{n^5}\right)}$$

$$\Rightarrow \ln(n!) = n\ln n - n + \frac{\ln n}{2} + \sigma + \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + O\left(\frac{1}{n^5}\right)$$

Remarque. *Ce n'est pas intéressant de prendre m grand car B_{2p+2} va augmenter au bout d'un moment.*

4.4 Méthodes analytiques

On peut tirer des informations sur une suite en ayant sa FG, en utilisant l'analyse (réelle ou complexe).

Un exemple : nombres de Bell ordonnés

$$\begin{aligned} b_n :&= \#\text{partitions ordonnées d'un ensemble de } n \text{ éléments (en classes non vides)} \\ &= \#\text{préordres totaux sur } [n] \end{aligned}$$

Exemple.

$$\begin{aligned} b_1 &= 1 && (\{1\}) \\ b_2 &= 3 && (\{1,2\}),(\{1\},\{2\}),(\{2\},\{1\}) \\ b_3 &= 13 && (\{1,2,3\}),(\{1\},\{2,3\}),\ldots,(\{2,3\},\{1\}),(\{1\},\{2\},\{3\}),\ldots,(\{3\},\{2\},\{1\}) \end{aligned}$$

Problème : *pas de formule exacte.*

La FGE de b_n est $B(x) = \frac{1}{1-E(x)}$ où $E(x)$ est la FGE de la classe des $\mathcal{E}$ des ensembles non vides, c'est-à-dire $\mathcal{E} = \{\{1\},\{1,2\},\{1,2,3\},\ldots\}$

Donc

$$E(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 1 \cdot \frac{x^n}{n!} = e^x - 1$$

et

$$B(x) = \frac{1}{1-E(x)} = \frac{1}{1-(e^x-1)}$$
$$\Rightarrow \boxed{B(x) = \frac{1}{2-e^x}}$$

$$\frac{1}{1-E(x)} = \underbrace{1}_{\substack{\text{ensemble}\\\text{vide}}} + \underbrace{E(x)}_{\substack{\text{partition}\\\text{en 1 classe}}} + \underbrace{E^2(x)}_{\substack{\text{partition}\\\text{en 2 classes}}} + \underbrace{E^3(x)}_{\substack{\text{partition}\\\text{en 3 classes}}} + \ldots$$

$E^2(x)$ est la FGE de $\mathcal{E} * \mathcal{E}$.

On va considérer la fonction *complexe*

$$B(z) = \frac{1}{2-e^z}$$

Propriétés de cette fonction ?

1. Holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{z \in \mathbb{C} \mid e^z = 2\} = \mathbb{C}\backslash\{z \in \mathbb{C} \mid z = \ln 2 + 2\pi k \cdot i\}$ où $k \in \mathbb{Z}$;
2. Singularité la plus proche de 0 est $\ln 2$.

Série de Laurent pour $B(z)$ autour de $z_0 = \ln 2$.

$$B(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - \ln 2)^n$$

Montrons :

$$\begin{aligned} a_{-1} &= -\frac{1}{2} \\ a_{-2} &= a_{-3} = \ldots = 0 \\ a_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C(\ln 2,\epsilon)} B(z)(z-\ln 2)^{-n-1}\mathrm{d}z \end{aligned}$$

Posons $w = z - \ln 2$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,\epsilon)} B(w+\ln 2)w^{-n-1}\mathrm{d}w$$

Or

$$\begin{aligned}
B(w+\ln 2) &= \frac{1}{2-e^{w+\ln 2}} = \frac{1}{2-2\cdot e^{w}} \\
&= \frac{1}{2-2\left(1+w+\frac{w^2}{2!}+\frac{w^3}{3!}+\dots\right)} \\
&= \frac{1}{-2w\left(1+\frac{w}{2!}+\frac{w^2}{3!}+\dots\right)} \\
&= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{w\cdot f(w)} \qquad \text{où } f(w) \text{ est holomorphe sur } \mathbb{C}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,\epsilon)} \underbrace{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{f(w)}}_{\substack{\text{fonction holomorphe}\\ \text{en 0, et qui vaut}\\ -\frac{1}{2} \text{ quand } w=0}} \cdot w^{-n-2}\mathrm{d}w$$

coefficient de w^{n+1} dans la série de Laurent de $-\frac{1}{2}\frac{1}{f(w)}$ autour de 0.

Si $\underbrace{-n-2\geq 0}_{n\leq -2}$, on a : $a_n=0$.

Si $\underbrace{-n-2=-1}_{n=-1}$, on a : $a_n=-\frac{1}{2}\frac{1}{f(0)}$.

$\rightsquigarrow$ On peut écrire :

$$B(z) = \underbrace{\left(B(z)-\frac{-\frac{1}{2}}{z-\ln 2}\right)}_{=\hat{B}(z)=\sqrt{(\ln 2)^2+(2\pi)^2}=6{,}321\ldots>6{,}321} + \underbrace{\frac{-\frac{1}{2}}{z-\ln 2}}_{\text{fonction bien connue}}$$

avec $\hat{B}(z)$ holomorphe en $\ln 2$ et $\hat{m}$ sur un disque ouvert de centre 0 et de rayon $|\ln 2+2\pi i|$.

1. On peut écrire

$$\hat{B}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{b_n}\cdot z^n$$

avec certains coefficients $\hat{b_n}$ tels que

$$\hat{b_n} = O\left(\left(\frac{1}{6{,}321}\right)^n\right) = O((0,16)^n)$$

2.

$$\begin{aligned}
[z^n]\frac{-\frac{1}{2}}{z-\ln 2} &= [z^n]\frac{\frac{1}{2\ln 2}}{1-\frac{z}{\ln 2}} \\
&= [z^n]\frac{1}{2\ln 2}\left(1+\frac{z}{\ln 2}+\left(\frac{2}{\ln 2}\right)^2+\dots\right) \\
&= \frac{1}{2\ln 2}\left(\frac{1}{\ln 2}\right)^n \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\ln 2}\right)^{n+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n &= n![z^n]B(z) \\
&= n!\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\ln 2}\right)^{n+1}+O((0,16)^n)\right) \\
&= \frac{n!}{2}(\lg e)^{n+1}+O(n!(0,16)^n)
\end{aligned}$$

Remarque. $\frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\log_e 2} = \log_2 e = \lg e = 1,44\ldots$

$$b_n \sim \frac{n!}{2}(\lg e)^{n+1}$$

Exemple. *Le résultat est* extrêmement *bon.*

n	1	2	3	5	10
b_n	1	3	13	541	10224763
$\frac{n!}{2}(\lg e)^{n+1}$	$\approx 1,04$	$\approx 3,002$	$\approx 12,997$	$\approx 541,002$	≈ 10224763

Chapitre 5

Entropie

5.1 Introduction

Soient V un ensemble fini et p une distribution de probabilités sur V (p_v = probabilité de l'élément $v \in V$).

L'entropie de p est

$$H(p) = -\sum_{v \in V} p_v \lg p_v$$

Interprétation :

$$H(p) = \sum_v p_v \lg \frac{1}{p_v}$$

$\to H(p)$ est une moyenne pondérée des quantités $\lg \frac{1}{p_v}$.

L'entropie est une mesure de l'incertitude associée à la distribution de probabilités.

Exemple.

$$V = \{pile,\ face\}$$

1.

$$P_{pile} = P_{face} = \frac{1}{2}$$
$$H(p) = -\frac{1}{2} \lg \left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \lg \left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

2.

$$P_{pile} = \frac{1}{4}, P_{face} = \frac{3}{4}$$
$$H(p) = -\frac{1}{4} \lg \left(\frac{1}{4}\right) - \frac{3}{4} \lg \left(\frac{3}{4}\right) = \lg 4 - \frac{3}{4} \lg 3 \approx 0,811$$

Remarque. $H(p) \geq 0$.

Soit $n := |V|$

Lemme. $H(p) \leq \lg n$.

p uniforme $\Rightarrow H(p) = -\sum \frac{1}{n} \lg \frac{1}{n} = \lg n$

Démonstration.

$$
\begin{aligned}
\lg n - H(p) &= -\sum_v \underbrace{\frac{1}{n}}_{=p_v} \lg \frac{1}{n} + \sum_v p_v \lg p_v \qquad \text{car uniforme} \\
&= -\sum_v p_v \lg \frac{1}{np_v} \\
&= \frac{-1}{\ln 2} \sum_v p_v \ln \frac{1}{np_v} \\
&\geq \frac{-1}{\ln 2} \sum_v p_v \left(\frac{1}{np_v} - 1\right) \qquad \text{car } \ln x \leq x - 1 \qquad \forall x \\
&= \frac{-1}{\ln 2} \left(\underbrace{\sum_v \frac{1}{n}}_{=1} - \underbrace{\sum_v p_v}_{=1} \right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

□

Rappel. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$.

5.2 Applications

5.2.1 Compression de données

Soient Σ un alphabet fini et M un mot (*un texte*) sur Σ.

Question : comment choisir des codes binaires pour les symboles dans Σ de sorte à ce que la taille de l'encodage résultant de M soit minimum ?

Attention : les codes doivent être *sans préfixes*, c'est-à-dire que le code d'un symbole ne peut être un préfixe du code d'un autre symbole.

Exemple. $\Sigma = \{i, m, p, s\}$, $M =$ *mississipi.*

$$
\begin{aligned}
C(i) &= 1 \\
C(m) &= 010 \\
C(p) &= 011 \\
C(s) &= 00
\end{aligned}
$$

$$|C(M)| = 4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 = 18 \qquad \textit{(code optimal)}$$

Pour $v \in \Sigma$, soit p_v la fréquence relative de v dans M.

$$\rightarrow |C(M)| = |M| \cdot \underbrace{\sum_{v \in \Sigma} p_v |C(v)|}_{=\#\text{moyen de bits par symbole dans le code } C}$$

Limite fondamentale :

Théorème (Shannon, 1948). *Pour tout code C, le #moyen de bits par symbole est toujours $\geq H(p)$.*

C'est-à-dire :

$$|C(M)| \geq |M|H(p) \qquad \forall C$$

Pour notre exemple, on a

$$H(p) \approx 1,72$$

On a donc bien

$$|C(M)| \geq 10 \cdot 1,72 = 17,2$$

18 est bien la taille minimale que l'on peut avoir.

5.2.2 Arbres de Huffman

On construit itérativement un arbre comme suit :
- Au début, une racine par symbole dans Σ, pondéré par sa probabilité respective ;
- Tant qu'il existe au moins deux racines :
  - Prendre les deux racines v, w de plus petite probabilité ;
  - Ajouter une nouvelle racine z, qui devient le père de v et w, et poser $p_z = p_v + p_w$.

Le code de $v \in \Sigma$ est obtenu en parcourant l'arbre de la racine jusqu'à la feuille contenant v ; à chaque fois que l'on descend dans le fils gauche, on ajoute un 0 ; à chaque fois que l'on descend dans un fils droit, on ajoute 1.

Théorème. *Si C est un code de Huffman, alors #moyen de bits par symbole est $\leq H(p) + 1$.*

C'est-à-dire $|C(M)| \leq |M|(H(p) + 1)$.