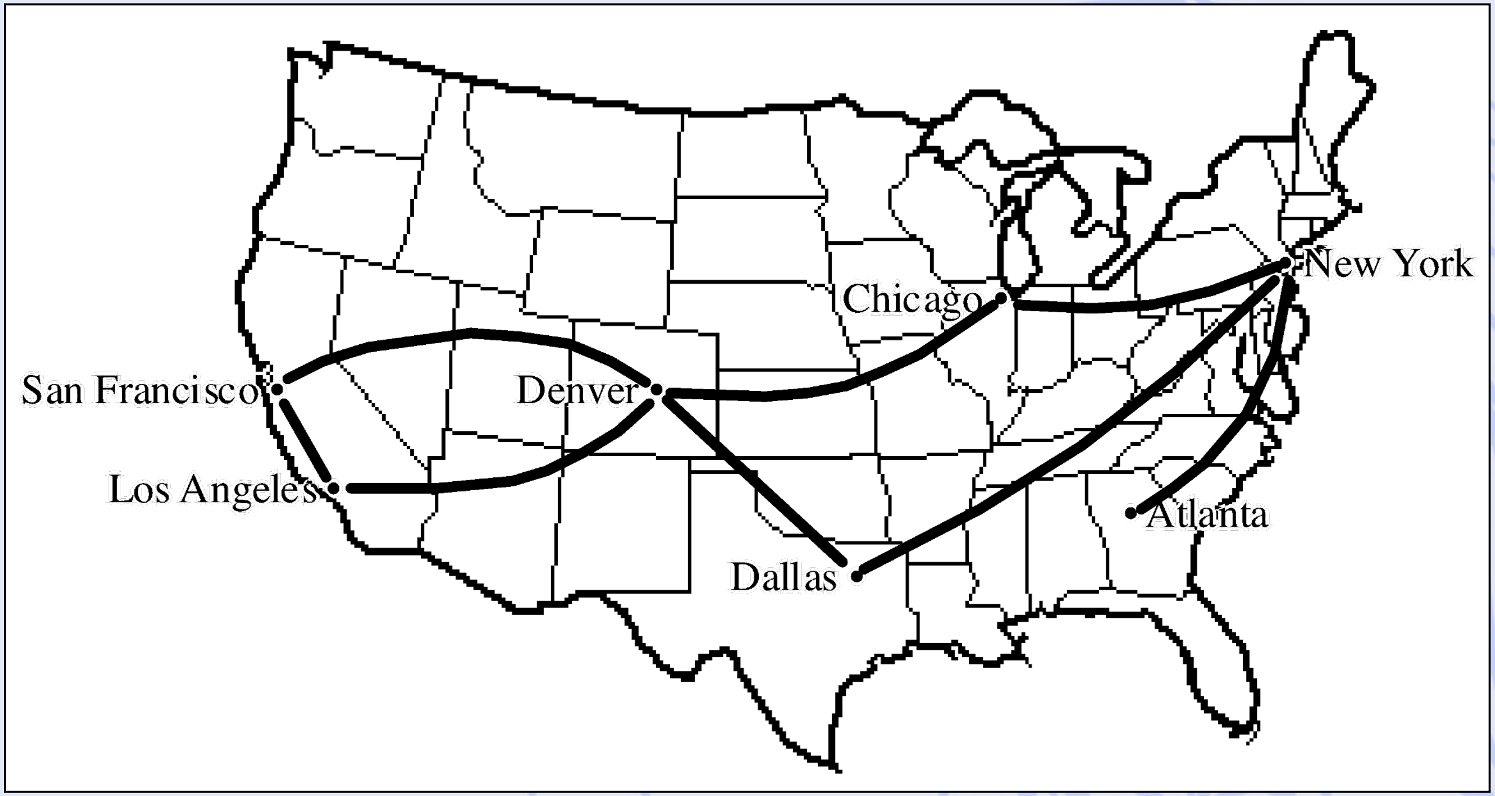
Plan du cours

1. Introduction
   - Contenu du cours
2. Logique mathématique
   - Calcul propositionnel
   - Calcul des prédicats
   - Logique floue et aide à la décision
3. Induction
4. Analyse d'algorithmes
   - Comparaison asymptotique de fonctions
   - Complexité
5. Récurrence
6. Mathématique de la gestion
   - Théorie des graphes
   - Optimisation

1. Graphe ?

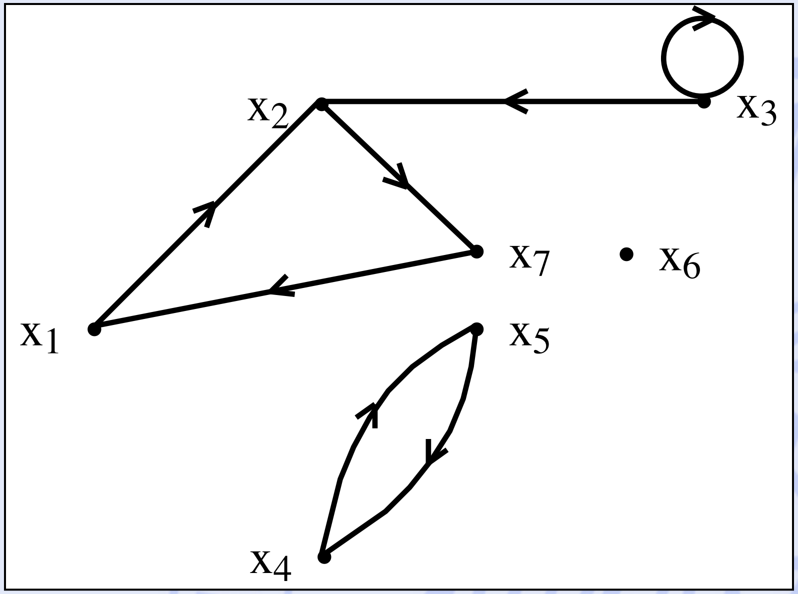

New York
Chicago
San Francisco
Denver
Los Angeles
Atlanta
Dallas

Graphe orienté

$$G = (X, U)$$

- X : ensemble fini d'éléments appelés **sommets**,
- U : sous-ensemble de $X \times X$ (couples de sommets) dont les éléments sont appelés **arcs**.

Exemple 1



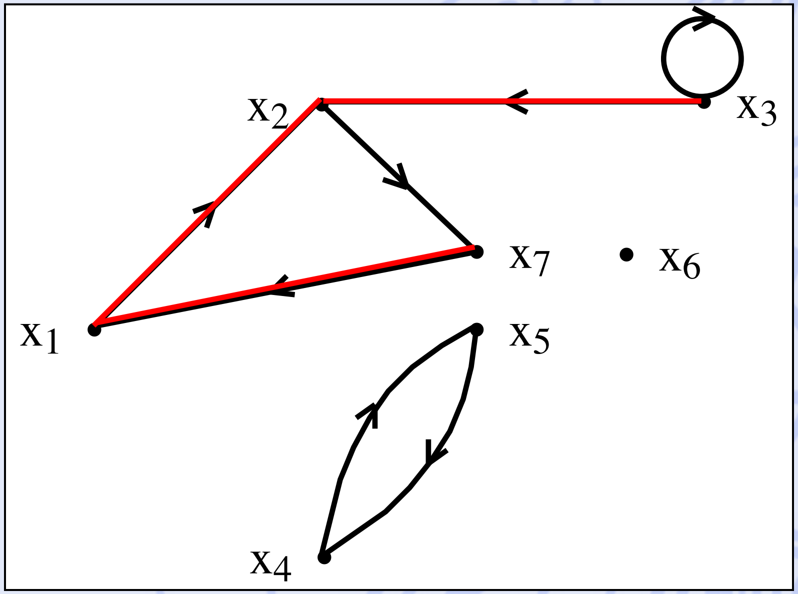
- $X = \{ x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , x_5 , x_6 , x_7 \}$
- $U = \{ (x_1,x_2) , (x_2,x_7) , (x_3,x_3) , (x_3,x_2) , (x_4,x_5) , (x_5,x_4) , (x_7,x_1) \}$

Terminologie

- **Chaîne** : Suite de sommets telle que si x_k et x_l sont deux sommets consécutifs de cette suite, alors (x_k,x_l) ou $(x_l,x_k) \in U$.
- **Chemin** : Suite de sommets telle que si x_k et x_l sont deux sommets consécutifs de cette suite, alors $(x_k,x_l) \in U$.
- **Cycle** : Chaîne dont le dernier sommet coïncide avec le premier.
- **Circuit** : Chemin dont le dernier sommet coïncide avec le premier.

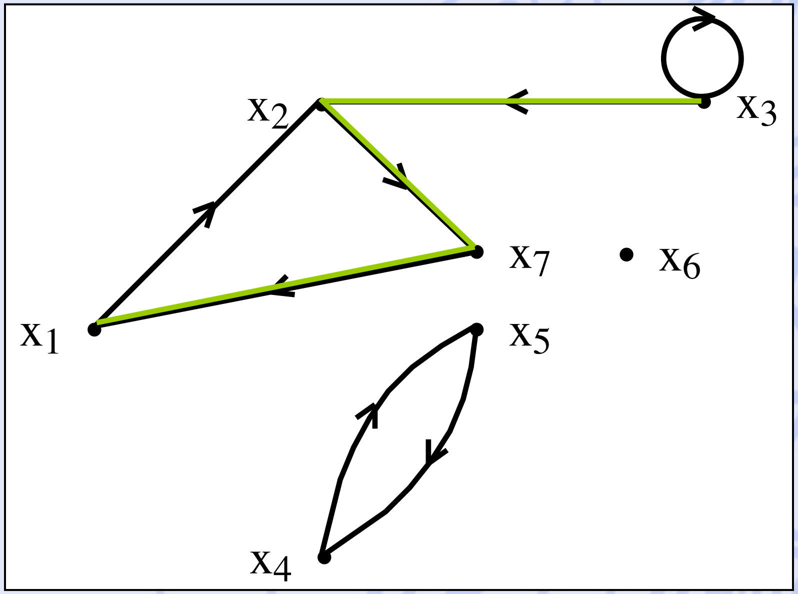
Exemple 1

Chaîne

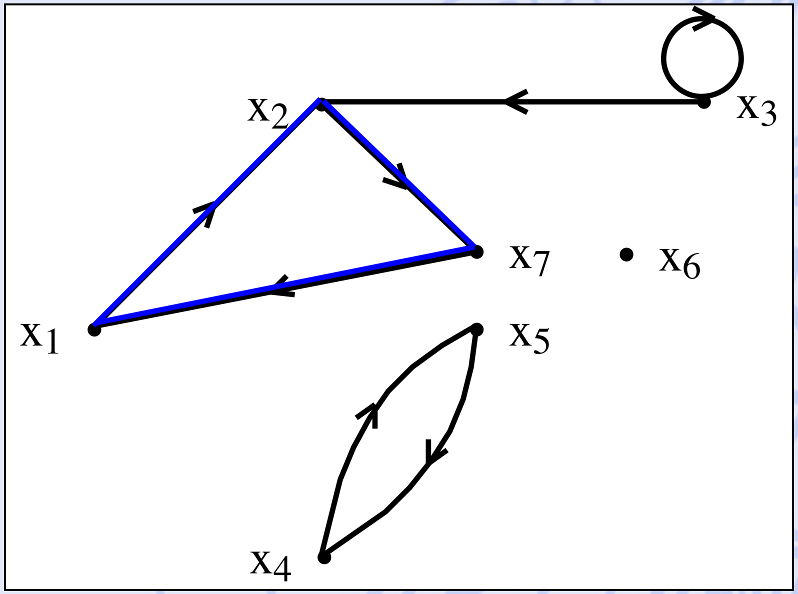


Exemple 1

Chemin



Exemple 1



Circuit

Terminologie (2)

- Circuits particuliers :
  - Circuit élémentaire,
  - Circuit hamiltonien (1! par chaque sommet),
  - Circuit eulérien (1! par chaque arc).
- **Graphe connexe** :
  $\forall$ x,y $\in X$ avec x $\neq$ y $\exists$ chaîne entre x et y.
- **Graphe fortement connexe** :
  $\forall$ x,y $\in X$ avec x $\neq$ y $\exists$ chemin de x vers y.

Terminologie (3)

- **Sous-graphe** : engendré par $Y \subset X$: graphe (Y , U_Y) où $U_Y \subset U$ représente les arcs de U qui ont leurs extrémités dans Y.
- **Graphe partiel** : engendré par $V \subset U$: graphe (X , V).
- **Matrice d'adjacence** : $\mathbf{A} = (a_{ij}) \quad n \times n$

$$\begin{cases} a_{ij} = 1 \quad \text{ssi} \quad (x_i, x_j) \in U \\ a_{ij} = 0 \quad \text{ssi} \quad (x_i, x_j) \notin U \end{cases}$$

Exemple 1

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\
\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Terminologie (4)

- Ensemble des **successeurs** de $x \in X$:

$$\Gamma^{+}(x) = \{ y \in X \mid (x, y) \in U \}$$

- Ensemble des **prédécesseurs** de $x \in X$:

$$\Gamma^{-}(x) = \{ y \in X \mid (y, x) \in U \}$$

- **Graphe valué** : à chaque arc est associée une valeur (nombre).

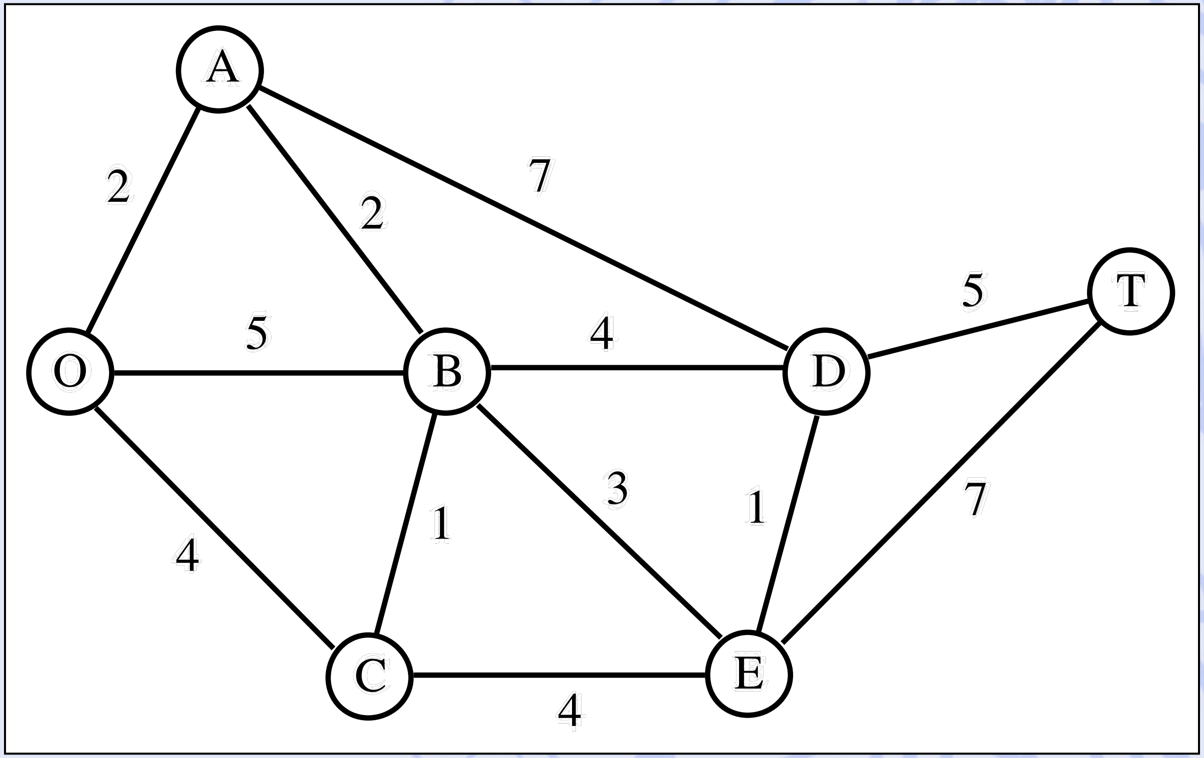
Graphe non orienté

$$G = (X, E)$$

- X : ensemble fini d'éléments appelés **sommets**,
- E : ensemble de paires de sommets dont les éléments sont appelés **arêtes.**
- **Graphe simple :**
  - Au plus une arête entre deux sommets,
  - Pas de boucles.
- Graphe orienté symétrique.

Exemple 2

- Dans une réserve naturelle :
  - Sommets : Postes de surveillance/attractions (O: entrée).
  - Arêtes : Routes.
  - Valeurs : Longueurs des routes (km).



2. Niveaux, rangs et circuits

- Dans un graphe orienté.
- Niveaux :

$$\begin{cases} X(0) = \left\{x \in X : \Gamma^{+}(x) = \varnothing\right\} \\ X(1) = \left\{x \in X \setminus X(0) : \Gamma^{+}(x) \subseteq X(0)\right\} \\ X(2) = \left\{x \in X \setminus \left(X(0) \cup X(1)\right) : \Gamma^{+}(x) \subseteq X(0) \cup X(1)\right\} \\ \vdots \\ X(k) = \left\{x \in X \setminus \left(X(0) \cup \cdots \cup X(k-1)\right) : \Gamma^{+}(x) \subseteq X(0) \cup \cdots \cup X(k-1)\right\} \\ \vdots \end{cases}$$

Propriétés des niveaux

- Disjoints 2 à 2.
- Réunion = X ssi graphe sans circuits.
- $x \in X(k)$ ssi le plus long chemin issu de x est de longueur k (longueur = nombre d'arcs).

Algorithme pour l'obtention des niveaux

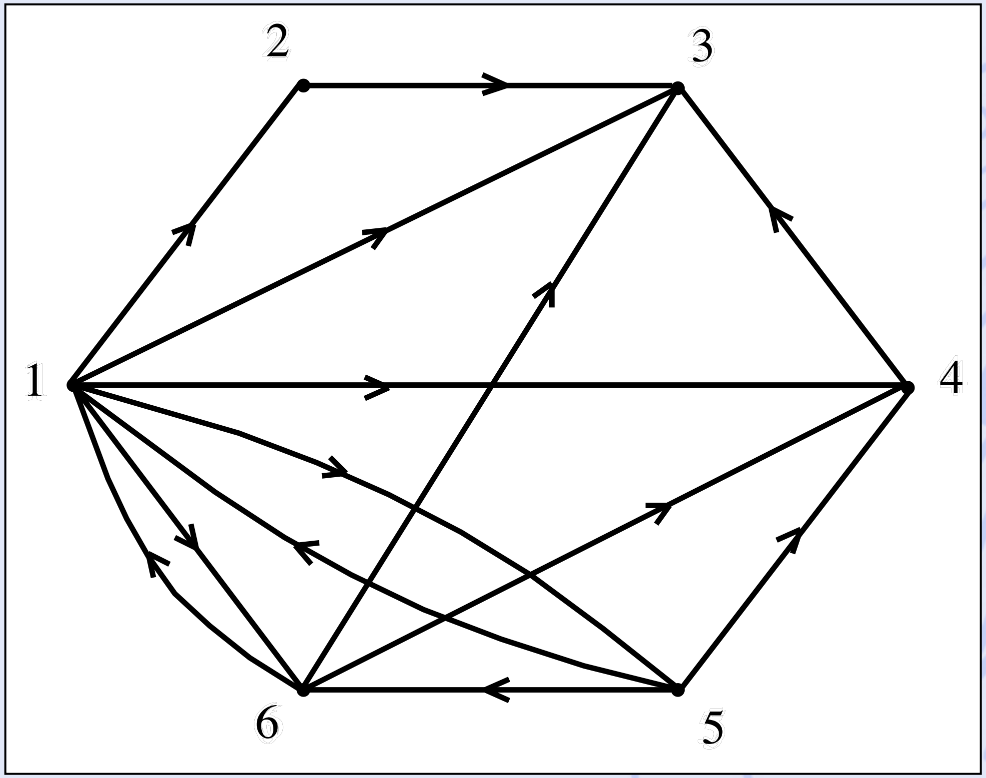
1. Ecrire la matrice d'adjacence et poser $k = 0$.
2. $X(k)$ = { sommets correspondants aux lignes non barrées ne contenant que des 0 ou des 1 barrés }
   - Si $X(k) = \emptyset$, aller en 4.
   - Sinon, barrer les lignes et colonnes correspondant à $X(k)$.
3. $k := k + 1$ et retourner en 2.
4. $X(0), X(1), \ldots, X(k\text{-}1)$ sont les k niveaux du graphe.

Détection des circuits

- Si toutes les lignes ne sont pas barrées à la fin de l'algorithme, il existe au moins un circuit passant par les sommets non barrés.

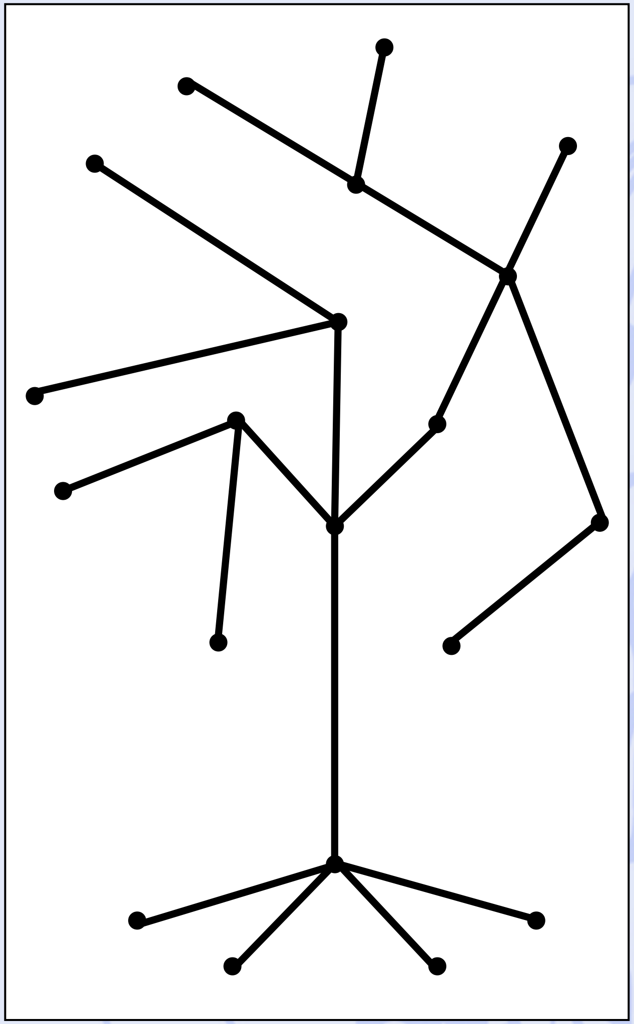
- **Rangs** : Comme pour les niveaux mais en considérant les prédécesseurs.

Exemple 3



$$
\begin{array}{c}
 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

3. L'arbre partiel minimum



Arbre

- Définition : Un arbre est un graphe simple sans cycle et tel qu'il existe une chaîne entre toute paire de sommets.
- Propriétés :
  1. $\exists$ au moins un sommet se trouvant sur une seule arête.
  2. n sommets $\leftrightarrow$ n-1 arêtes.
  3. Addition d'une arête $\leftrightarrow$ création d'un et un seul cycle.
  4. Chaque paire de sommets est reliée par un et une seule chaîne. Devient faux si l'on enlève une arête.

Arbre partiel minimum

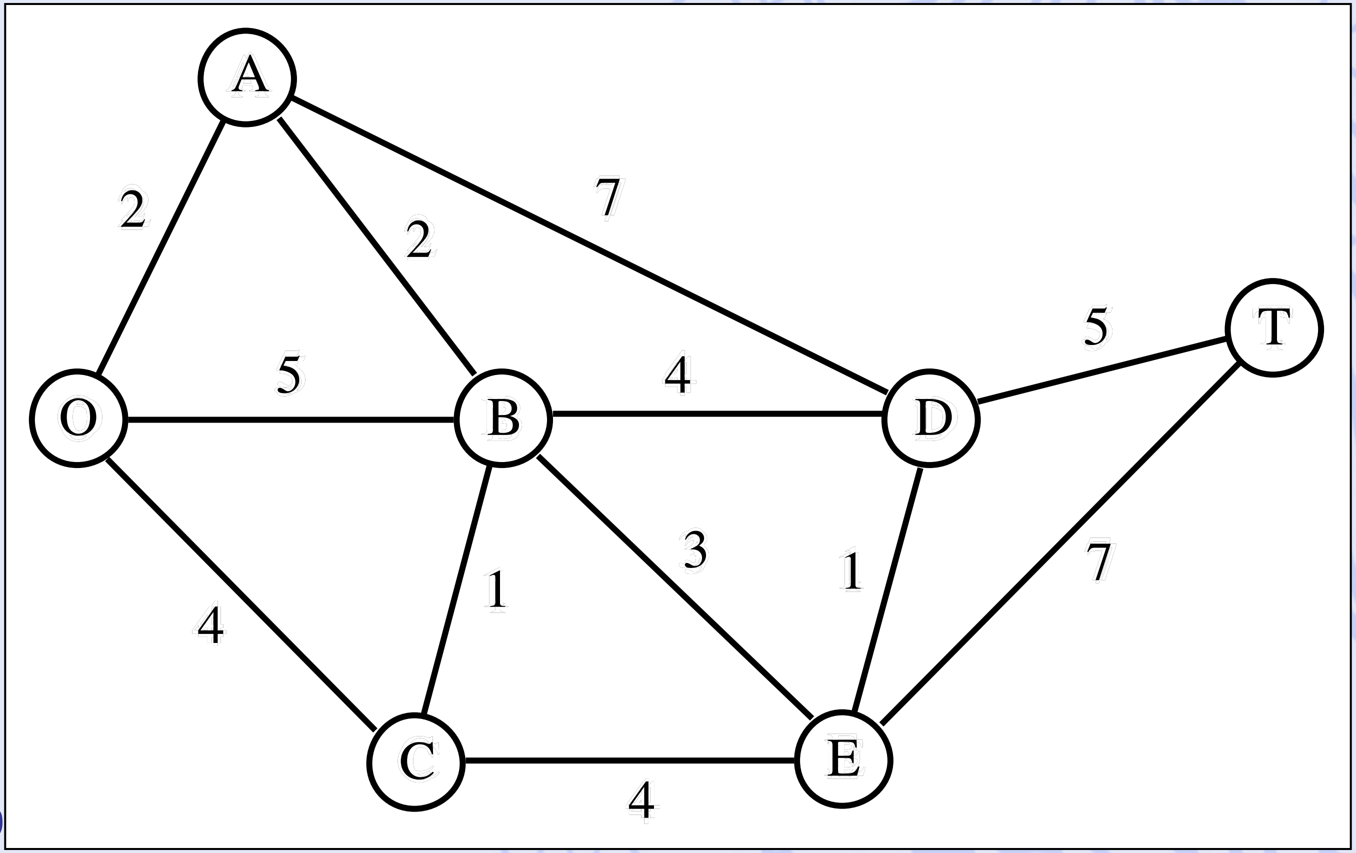
- Dans un graphe simple valué.
- Graphe partiel tel que :
  - Arbre,
  - Somme des valeurs des arêtes est minimum.
- Théorème de base :
  - Suppositions : graphe complet, arêtes de valeurs toutes différentes.
  - Enoncé : $\forall\ A \subset X$, soit E_A = { arêtes ayant une extrémité dans A et l'autre dans $X \backslash A$ } : l'arête de E_A de valeur minimum appartient à l'arbre partiel minimum.

Algorithme de Prim

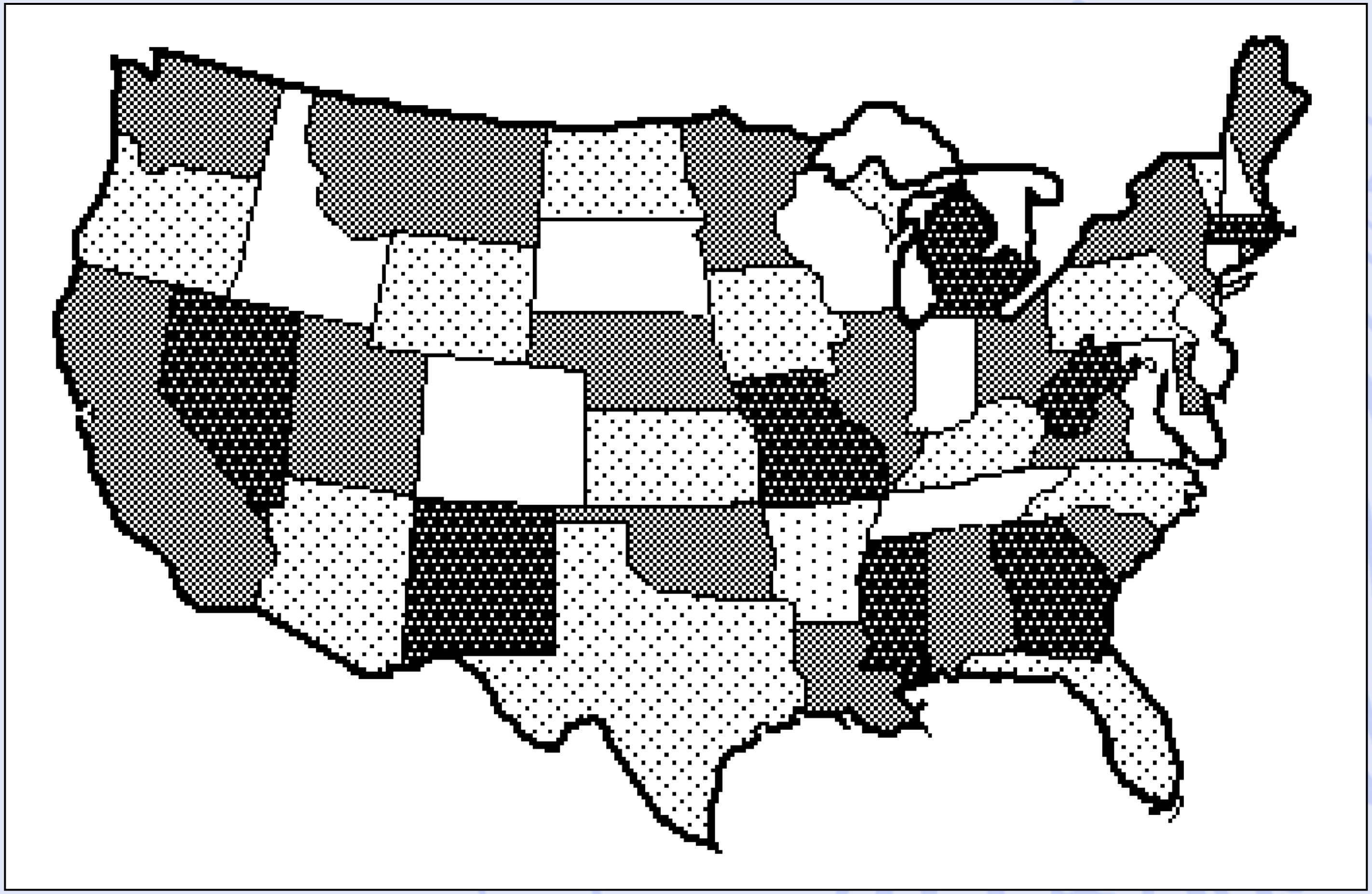
1. Choisir un sommet arbitrairement et marquer l'arête de valeur minimum issue de ce sommet.
2. Soit $A = \{$ sommets extrémités des arêtes marquées $\}$
   Si $A = X$, aller en 4.
3. Marquer l'arête de valeur minimum joignant un sommet de A à un sommet de $X \setminus A$ et aller en 2.
4. L'ensemble des arêtes marquées constitue un arbre partiel minimum.

Exemple 2

- Relier les 7 postes du parc en réseau.
- Minimiser la longueur du câblage.



4. Problèmes de coloration



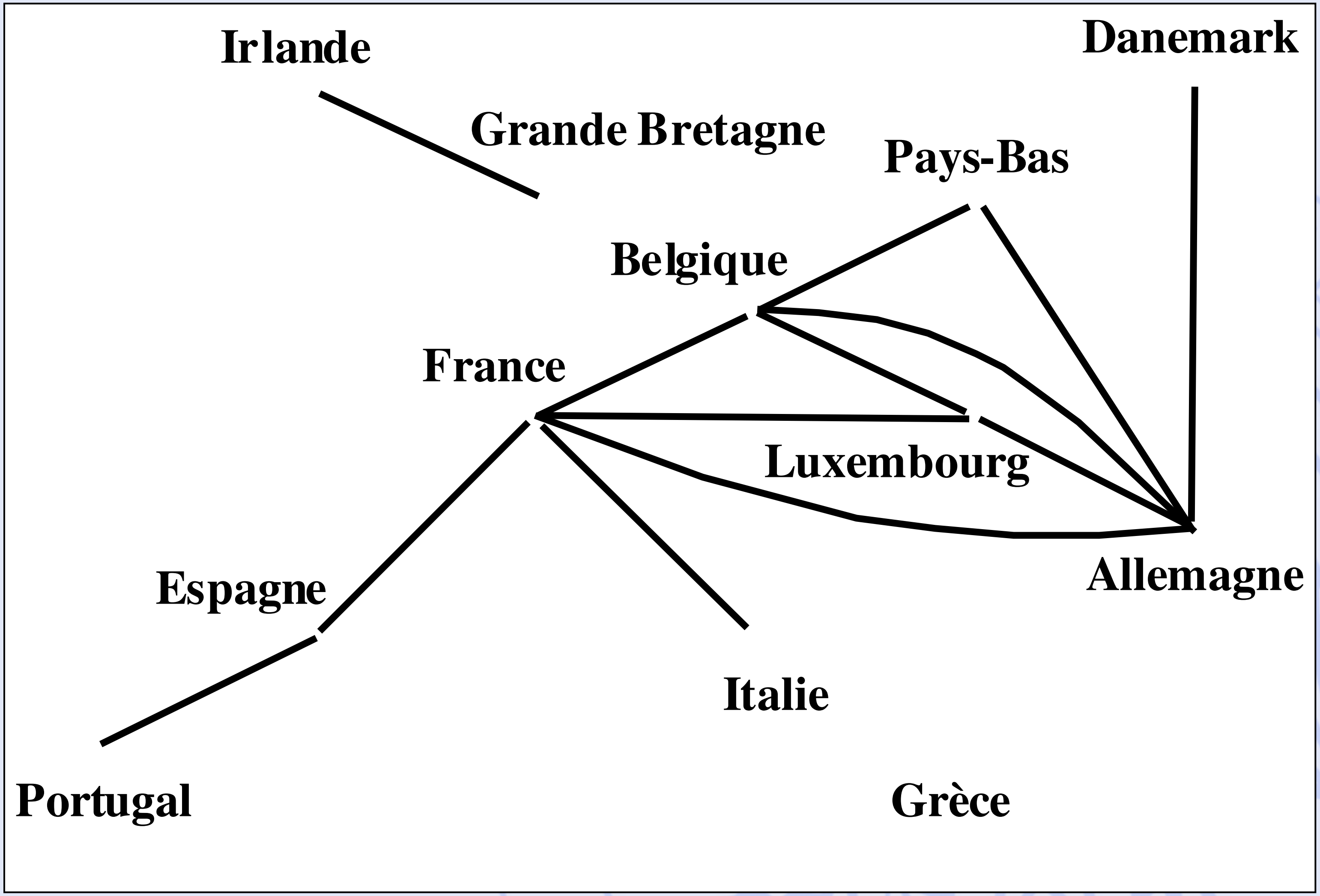
Coloration des sommets d’un graphe

- Attribution d’une couleur à chaque sommet de telle sorte que deux sommets adjacents aient des couleurs différentes.
- **Nombre chromatique** : Nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorer un graphe.
  - Obtention :
    problème difficile $\rightarrow$ heuristiques.

Algorithme de Welsh et Powell

1. Numéroter les sommets par ordre décroissant de leur degré
   (degré = nombre d'arêtes issues d'un sommet).
   Poser $i = 1$ (couleur) et $N = X$ (sommets non encore colorés).
2. Donner la couleur i au sommet de N qui a le plus petit numéro.
3. Soit $N_i = \{$ sommets non colorés non adjacents à un sommet de couleur i $\}$.
   Si $N_i \neq \emptyset$, poser $N = N_i$ et aller en 2.
4. Poser $N = \{$ sommets non encore colorés $\}$.
   Si $N \neq \emptyset$, poser $i := i+1$ (couleur suivante) et aller en 2.
   Sinon, on a une coloration en i couleurs.

Exemple 4


Irlande
Danemark
Grande Bretagne
Pays-Bas
Belgique
France
Luxembourg
Espagne
Allemagne
Italie
Portugal
Grèce

Applications

- Coloration de cartes.
- Problèmes d’horaires.
- Chargement de camions.
- Allocation de ressources.

Chemins les plus courts et les plus longs dans un graphe valué

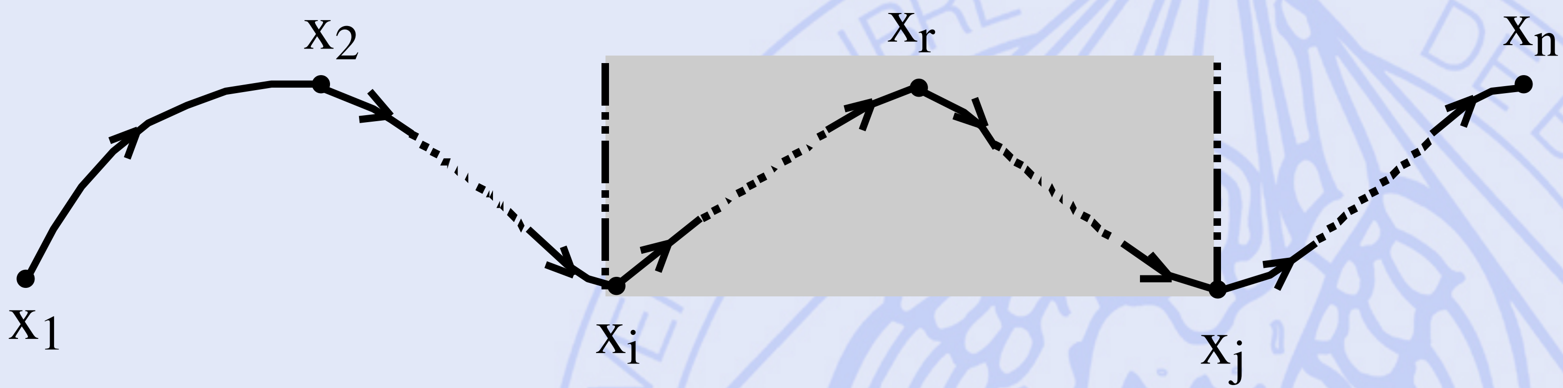
- Graphe orienté valué.
  - Valeurs : longueurs, coûts, durées, délais, …
- Problème : Chercher un chemin d'un sommet x_1 vers un sommet x_n de telle sorte que la somme des valeurs des arcs qui composent ce chemin ('longueur du chemin') soit minimum (ou maximum).

Hypothèses

- Pour un problème à maximum, pas de circuits de valeur positive.
- Pour un problème à minimum, pas de circuits de valeur négative.
- Notations :
  - arc $(x_i,x_j) \leftrightarrow$ valeur c_{ij}
  - Pour un problème à maximum : $\begin{cases} c_{ij} = -\infty & \text{si } (x_i, x_j) \notin U \text{ et } i \neq j \\ c_{ii} = 0 & \forall i \end{cases}$
  - Pour un problème à minimum : $\begin{cases} c_{ij} = +\infty & \text{si } (x_i, x_j) \notin U \text{ et } i \neq j \\ c_{ii} = 0 & \forall i \end{cases}$
  - Passage de minimum à maximum : $c'_{ij} = -c_{ij} \quad , \quad \forall i,j$

5. Algorithme de Bellman-Kalaba

- Principe d'optimalité de Bellman :



- Si le chemin (x_1 , x_2 , … , x_i , … , x_r , … , x_j , … , xn) est optimal entre x1 et xn , alors le chemin (x_i , … , x_r , … , x_j) est optimal entre x_i et x_j.

Algorithme de Bellman-Kalaba

- $\lambda_i(k)$ = valeur du chemin optimal de x_1 à x_i en au plus k arcs.

1. $$\begin{cases} \lambda_1(1) = 0 \\ \lambda_i(1) = c_{1i} \quad i = 2,\ldots,n \end{cases}$$
2. Pour $k = 2, 3, \ldots$
$$\begin{cases} \lambda_1(k) = 0 \\ \lambda_i(k) = \min\limits_{j \in \{1,2,\ldots,n\}} \left\{\lambda_j(k-1) + c_{ji}\right\} \end{cases}$$
3. Arrêt de l'algorithme quand : $\lambda_i(k) = \lambda_i(k-1) \quad \forall\ i$

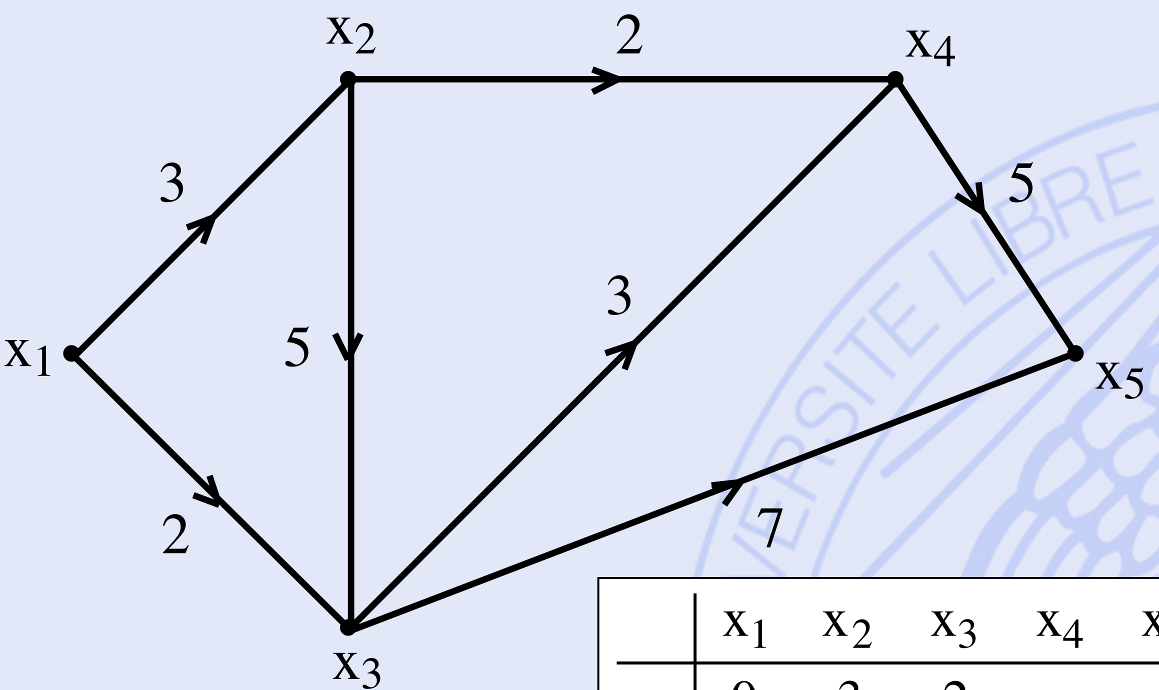
Algorithme de Bellman-Kalaba

- Convergence :
  Arrêt de l'algorithme après au plus n-1 étapes.

- Recherche de chemins les plus longs :
  Adaptation du point 2 :

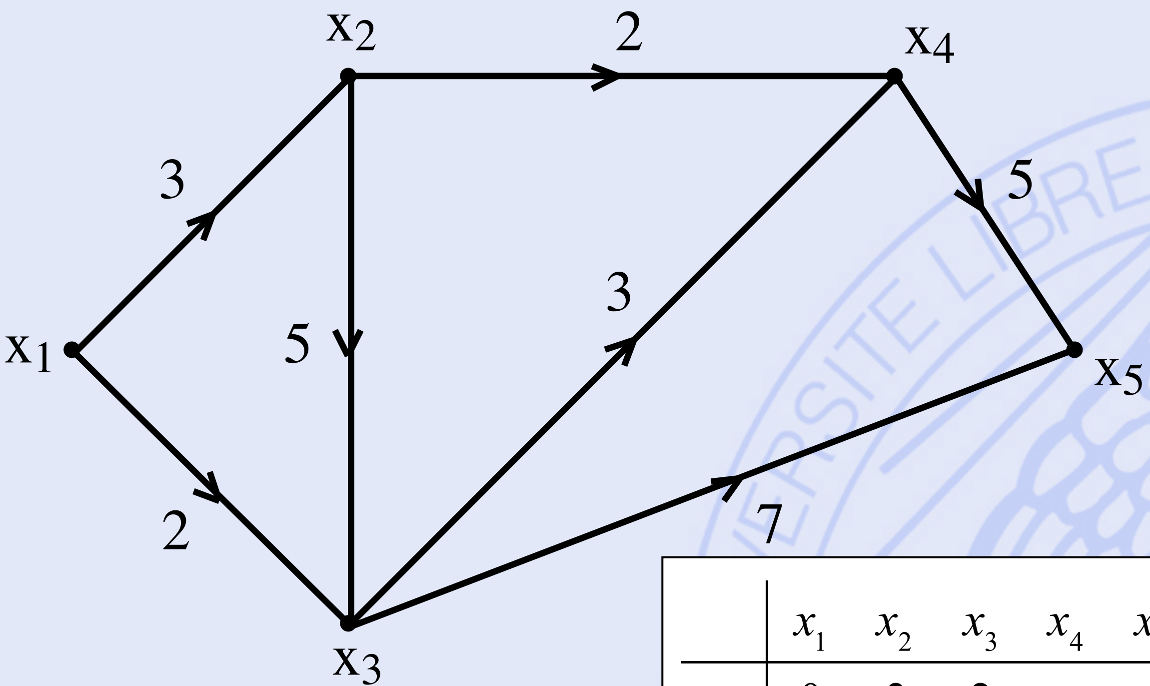
$$\lambda_i(k) = \max_j \left\{ \lambda_j(k-1) + c_{ji} \right\}$$

Exemple 5



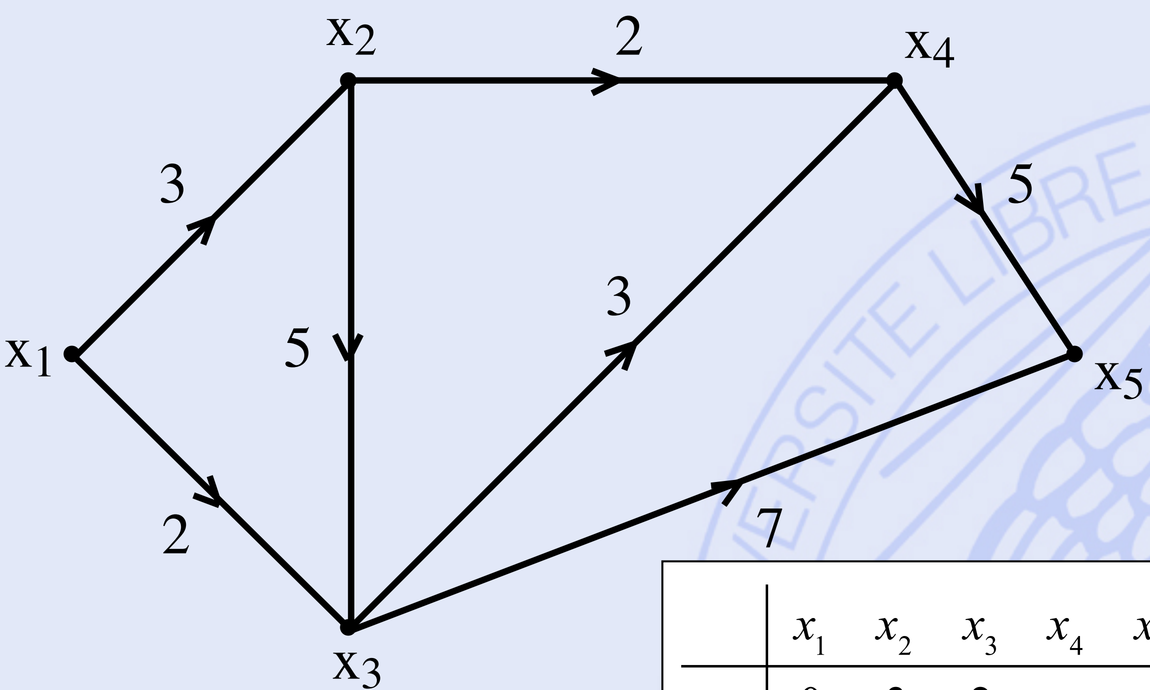
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\lambda_i(1)$	$\lambda_i(2)$	$\lambda_i(3)$
x_1	0	3	2	∞	∞			
x_2	∞	0	5	2	∞			
x_3	∞	∞	0	3	7			
x_4	∞	∞	∞	0	5			
x_5	∞	∞	∞	∞	0			

Exemple 3



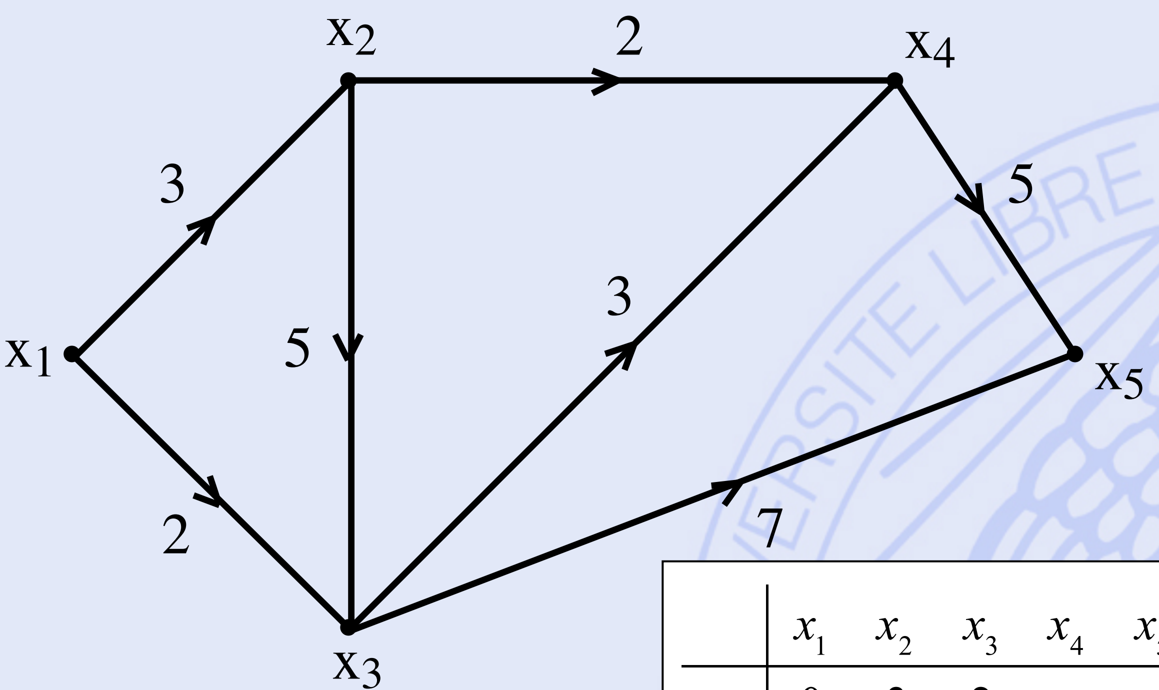
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\lambda_i(1)$	$\lambda_i(2)$	$\lambda_i(3)$
x_1	0	3	2	∞	∞	0		
x_2	∞	0	5	2	∞	3		
x_3	∞	∞	0	3	7	2		
x_4	∞	∞	∞	0	5	∞		
x_5	∞	∞	∞	∞	0	∞		

Exemple 3



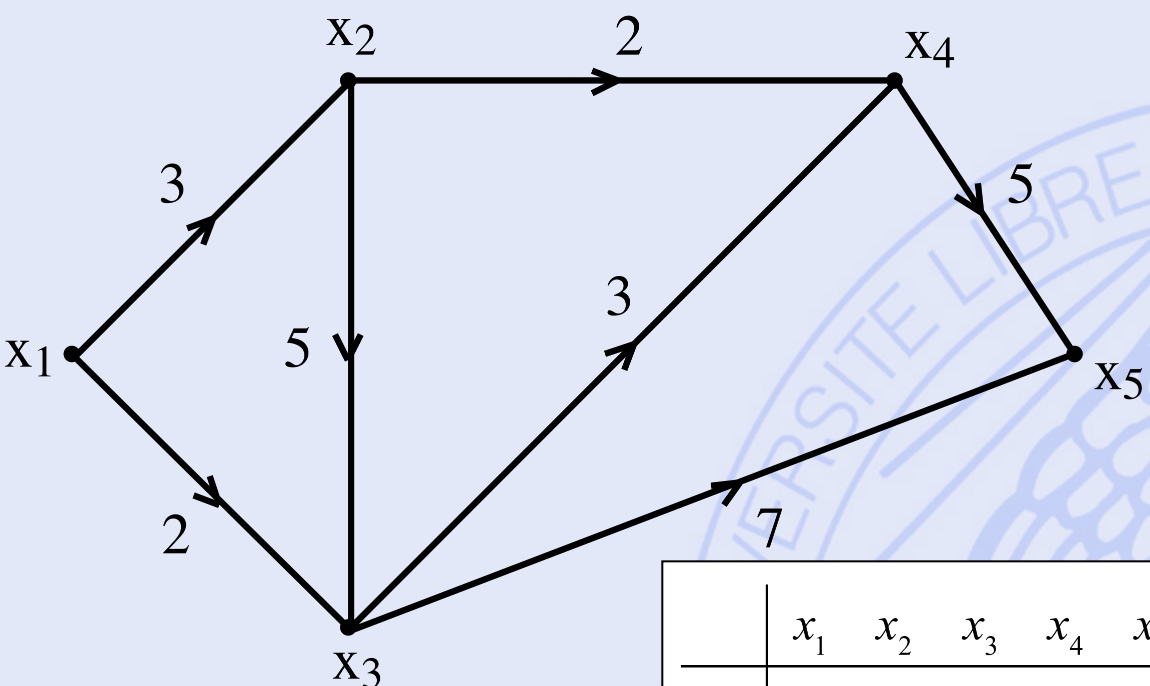
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\lambda_i(1)$	$\lambda_i(2)$	$\lambda_i(3)$
x_1	0	3	2	∞	∞	0	0	
x_2	∞	0	5	2	∞	3		
x_3	∞	∞	0	3	7	2		
x_4	∞	∞	∞	0	5	∞		
x_5	∞	∞	∞	∞	0	∞		

Exemple 3



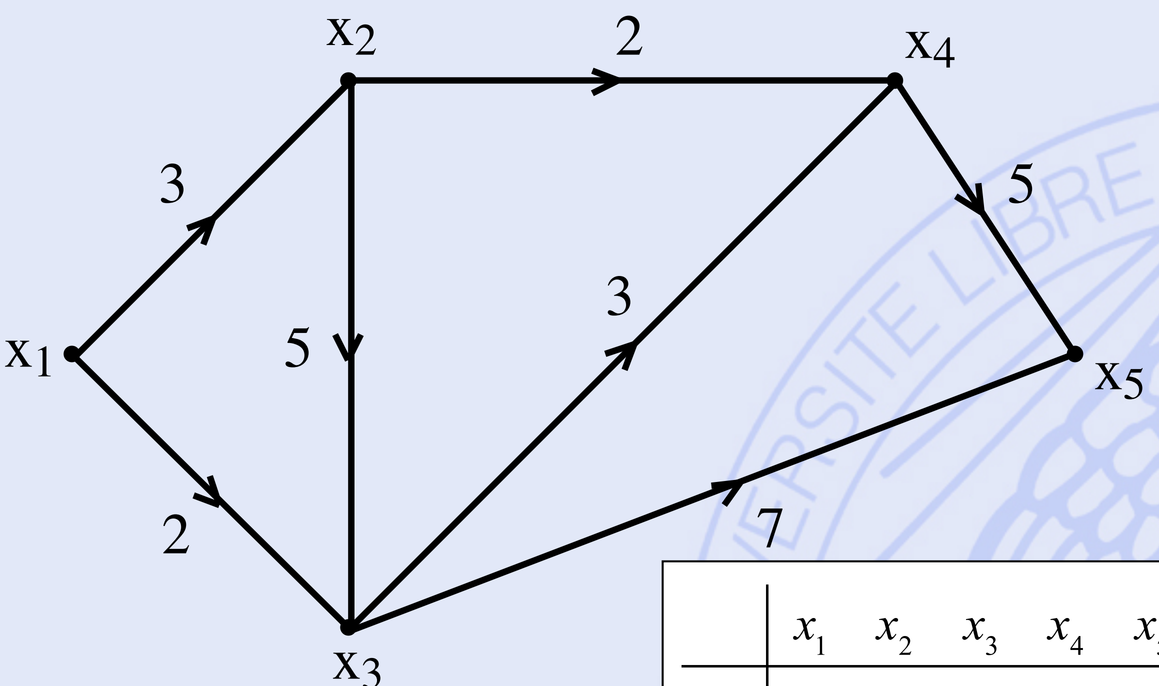
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\lambda_i(1)$	$\lambda_i(2)$	$\lambda_i(3)$
x_1	0	3	2	∞	∞	0	0	
x_2	∞	0	5	2	∞	3	3	
x_3	∞	∞	0	3	7	2	2	
x_4	∞	∞	∞	0	5	∞		
x_5	∞	∞	∞	∞	0	∞		

Exemple 3



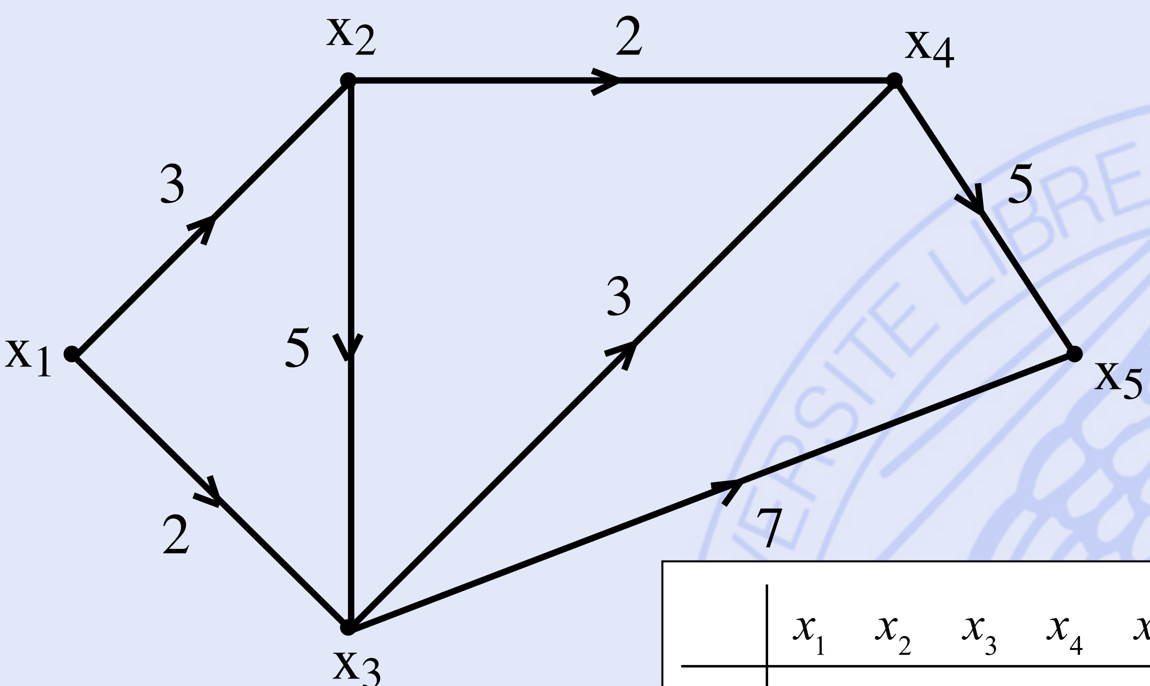
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\lambda_i(1)$	$\lambda_i(2)$	$\lambda_i(3)$
x_1	0	3	2	∞	∞	0	0	
x_2	∞	0	5	2	∞	3	3	
x_3	∞	∞	0	3	7	2	2	
x_4	∞	∞	∞	0	5	∞	5	
x_5	∞	∞	∞	∞	0	∞		

Exemple 3



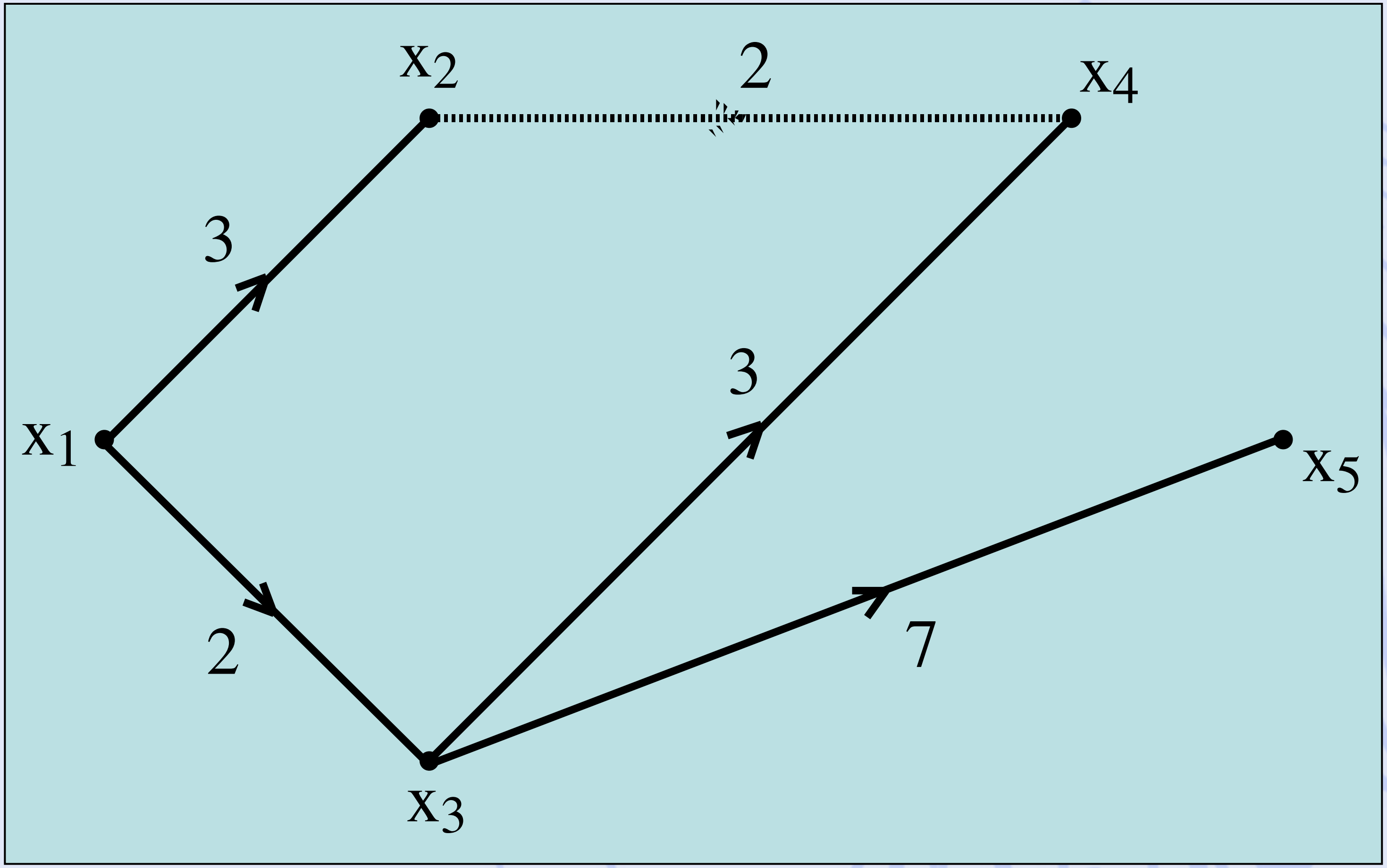
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\lambda_i(1)$	$\lambda_i(2)$	$\lambda_i(3)$
x_1	0	3	2	∞	∞	0	0	0
x_2	∞	0	5	2	∞	3	3	
x_3	∞	∞	0	3	7	2	2	
x_4	∞	∞	∞	0	5	∞	5	
x_5	∞	∞	∞	∞	0	∞	9	

Exemple 3



	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\lambda_i(1)$	$\lambda_i(2)$	$\lambda_i(3)$
x_1	0	3	2	∞	∞	0	0	0
x_2	∞	0	5	2	∞	3	3	3
x_3	∞	∞	0	3	7	2	2	2
x_4	∞	∞	∞	0	5	∞	5	5
x_5	∞	∞	∞	∞	0	∞	9	9

Arborescence des chemins les plus courts



6. Algorithme de Dijkstra

- Uniquement pour des valeurs positives !
- Terminologie :
  - $\lambda_i(k)$: marque du sommet i à l'étape k,
  - λ_i° : marque définitive du sommet i,
  - $M(k)$: ensemble des sommets marqués définitivement à la fin de l'étape k,
  - n_k : numéro du sommet marqué définitivement à l'étape k.

Algorithme de Dijkstra

1. Etape 1 : (initialisation)

$$\begin{cases} \lambda_i(1) = \infty, \quad \forall i \neq 1 \\ \lambda_1(1) = 0 = \lambda_1{}^\circ \\ n_1 = 1 \\ M(1) = \{1\} \end{cases}$$

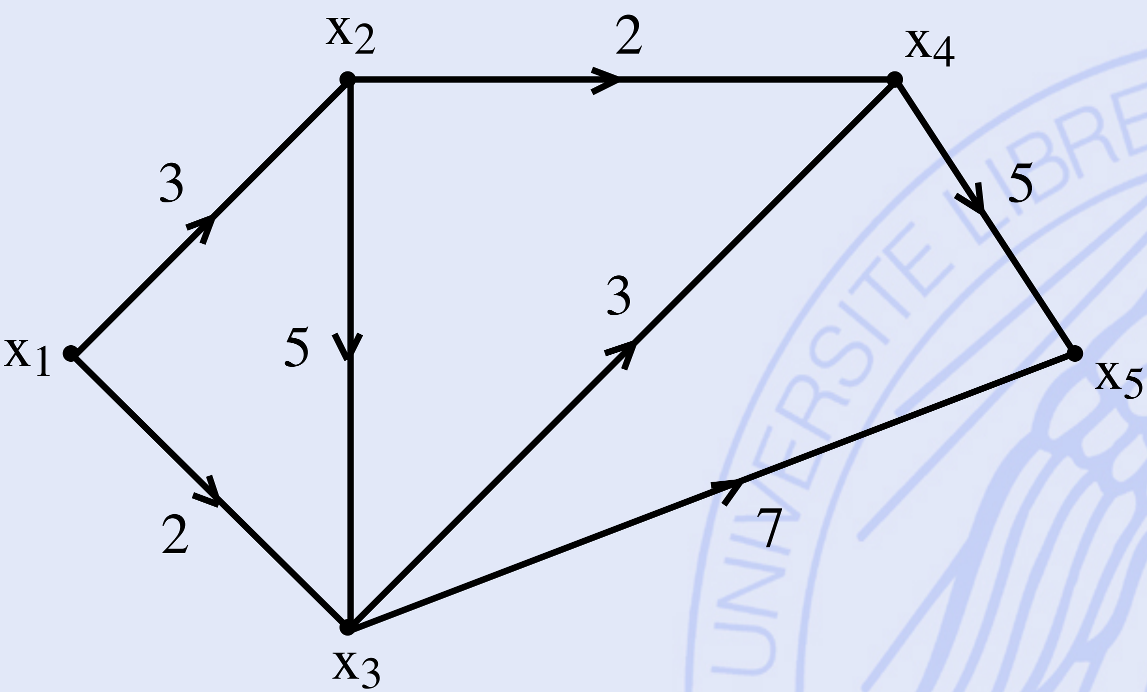
2. Etape k+1 : (k = 1,2,…)

$$\begin{cases} \lambda_i(k+1) = \min\left\{\lambda_i(k)\ ,\ \lambda_{n_k}{}^\circ + c_{n_k i}\right\}, \quad \forall i \notin M(k) \\ \lambda_{n_{k+1}}{}^\circ = \min\limits_i \lambda_i(k+1) \\ M(k+1) = M(k) \cup \{n_{k+1}\} \end{cases}$$

Algorithme de Dijkstra

- Fin de l'algorithme quand tous les sommets sont définitivement marqués.
- Convergence : en au maximum n étapes.
- Propositions :
  - $\lambda_i(k)$ = valeur du chemin optimal de x_1 à x_i ne passant que par des sommets de $M(k-1)$.
  - $\lambda_{nk}°$ = valeur du chemin optimal de x_1 à x_{nk} (ce chemin ne passe que par des sommets de $M(k-1)$).

Exemple 5

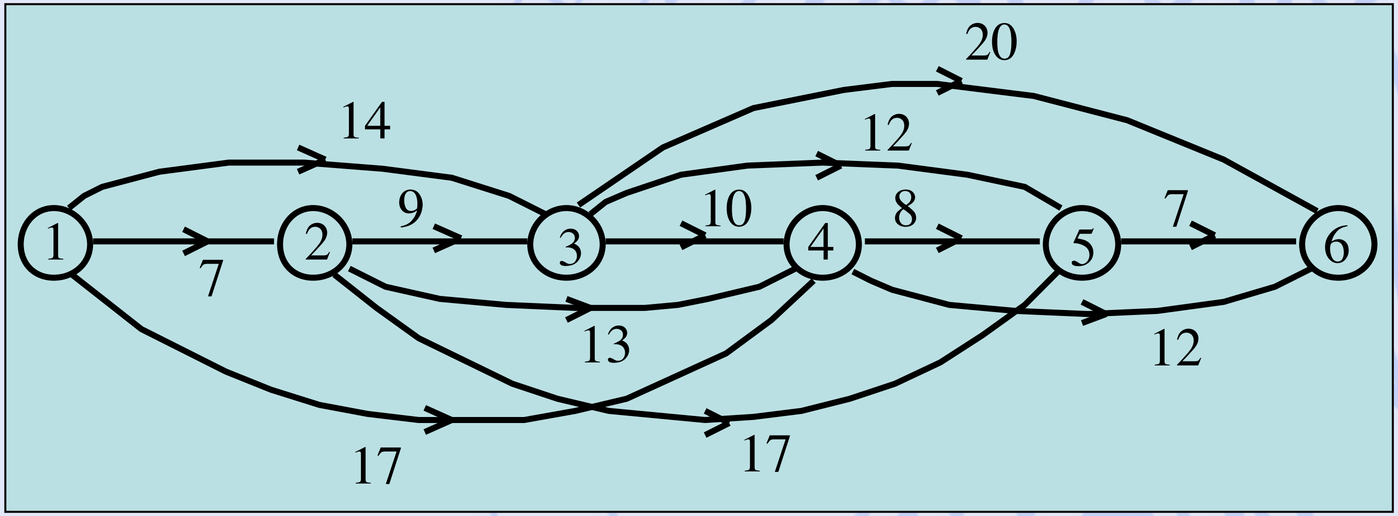


	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	0	3	2	∞	∞	
x_2	∞	0	5	2	∞	
x_3	∞	∞	0	3	7	
x_4	∞	∞	∞	0	5	
x_5	∞	∞	∞	∞	0	
	$\underline{0}$	3	2	∞	∞	$\lambda_i(1)$
		3	$\underline{2}$	∞	∞	$\lambda_i(2)$
		$\underline{3}$		5	9	$\lambda_i(3)$
				$\underline{5}$	9	$\lambda_i(4)$
					$\underline{9}$	$\lambda_i(5)$

Application

- Renouvellement d'un équipement : optimisation de la politique d'achat sur 5 ans.

C_{ij} = coût d'un équipement acheté au début de l'année i et revendu au début de l'année j.



Solution optimale : 1 - 4 - 6   coût = 29

Plan du cours

1. Introduction
   - Historique, modélisation
2. Quelques problèmes de la théorie des graphes
   - Définitions, terminologie
   - Arbre partiel minimum, Coloration
   - Chemins les plus courts et les plus longs
3. Problèmes d'ordonnancement
   - Méthode du chemin critique
   - Contraintes cumulatives
   - Méthode PERT
4. Réseaux de transport
   - Flot maximum et coupe minimum
   - Cas particuliers et variantes
5. Problème du voyageur de commerce

A. Définition du problème

- **Réalisation en un temps minimum** d'un **projet** comportant un certain nombre de **tâches** à effectuer, en tenant compte de **contraintes** éventuelles sur l'enchaînement des tâches ou sur les moyens à mettre en oeuvre.
- Exemples :
  - Construction d'une maison, chantier, campagne publicitaire, lancement d'un nouveau produit, …

Un exemple simple pas à pas

- Organisation de la fête de fin d’année.
- Sept tâches à réaliser :
  - A : Elaborer la recette du gâteau (2 jours)
  - B : Préparer le gâteau (1 jour, après A)
  - C : Répéter la chanson (chorale, 5 jours)
  - D : Réserver une salle (3 jours)
  - E : Décorer la salle (4 jours, après D)
  - F : choisir un DJ (2 jours, après D)
  - G : installation DJ (1 jour, après F)

Questions ?

- Si la fête est prévue le 22 décembre, combien de jours à l'avance faut-il s'y prendre ?
- Quel calendrier (ordonnancement des tâches) faut-il suivre pour être prêts le 22 décembre ?
- Peut-on se permettre de prendre du retard sur certaines tâches sans compromettre la date de la fête ?

Ordonnancement

- Déterminer la date de début de chaque tâche (c-à-d un ordonnancement).
- Notations :
  - Tâches : i $i = 1, 2, \ldots, n$
  - Durées : $d(i)$
  - Dates de début : $t(i)$
- Prise en compte de contraintes temporelles et cumulatives.

Contraintes temporelles

- Postériorité stricte $$t(j) \geq t(i) + d(i)$$
- Postériorité avec délai $$t(j) \geq t(i) + d(i) + f(i,j)$$
- Postériorité partielle $$t(j) \geq t(i) + \alpha(i,j)d(i)$$
- Localisation temporelle $$t(i) \geq a(i)$$
- Continuité $$t(j) \leq t(i) + t(i,j)$$

Contraintes cumulatives

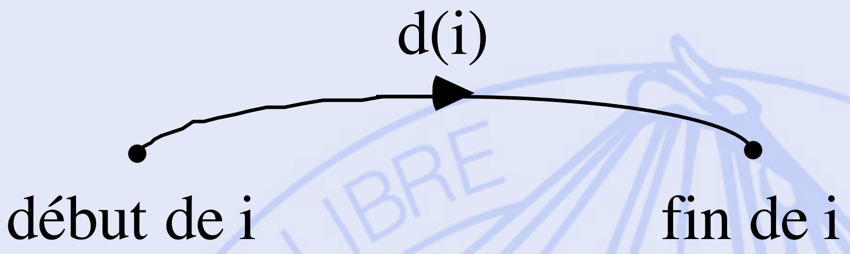
- Limites sur les ressources disponibles pendant la réalisation du projet :
  - Matériel,
  - Budget,
  - Main-d'œuvre.
- Fixes ou variables au cours du temps.

B. Méthode du chemin critique

- Contraintes temporelles uniquement.
- Durées des tâches connues avec certitude.
- Représentation sous forme de graphe valué :
  - Tâches représentées par des arcs.
  - Sommets correspondant à des étapes du projet.

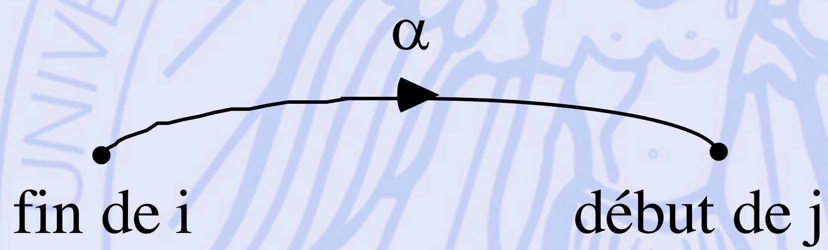
Elaboration du graphe

- Tâche i :



- Contrainte :

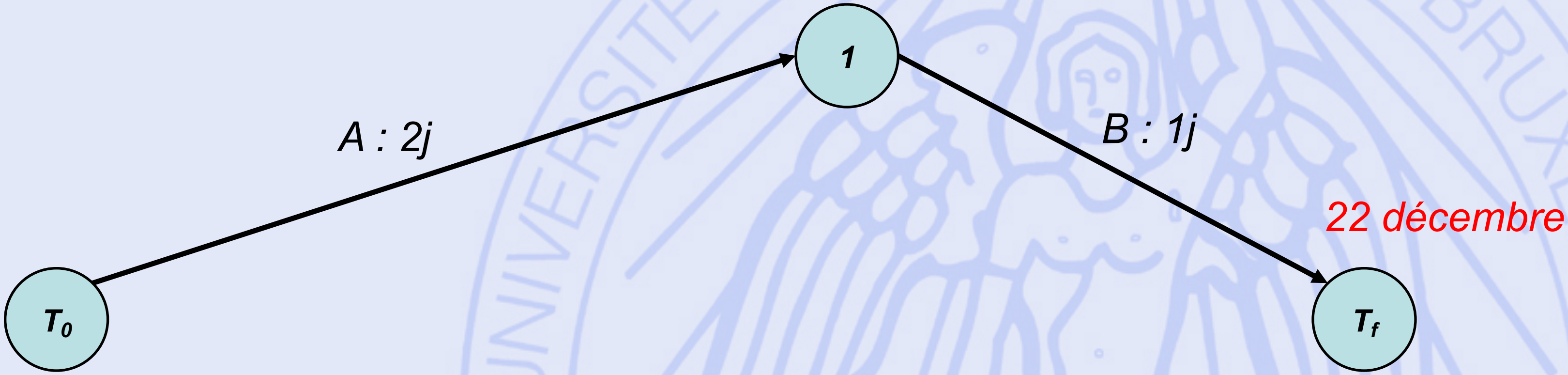
$$t(j) \geq t(i) + d(i) + \alpha$$



- Deux sommets particuliers :
  - Début du projet - étape 0,
  - Fin du projet - étape n+1.

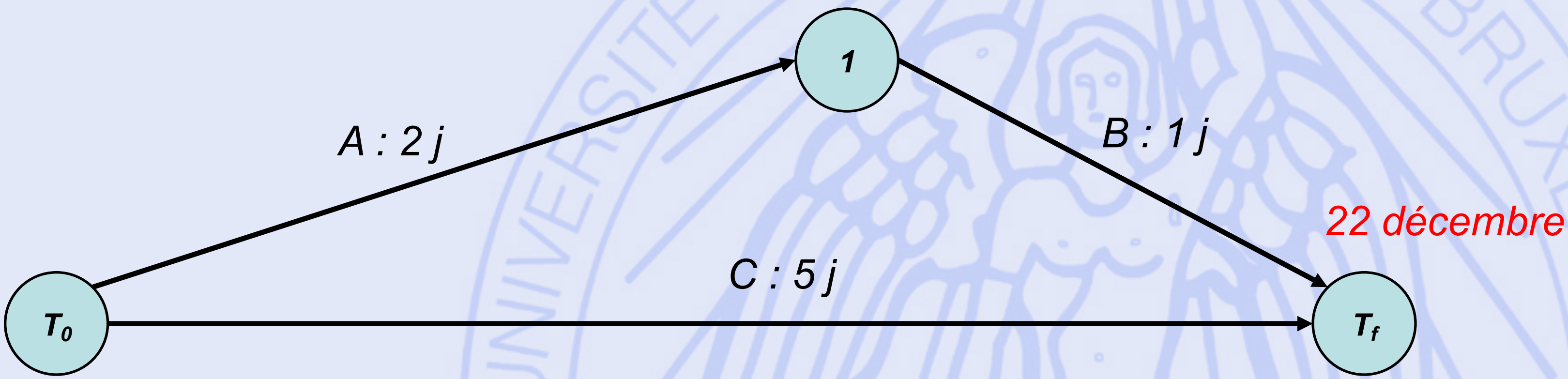
Exemple (1)

- B (prépa. gâteau, 1 jour) après A (recette, 2 jours)
- Temps minimum nécessaire : 3 jours



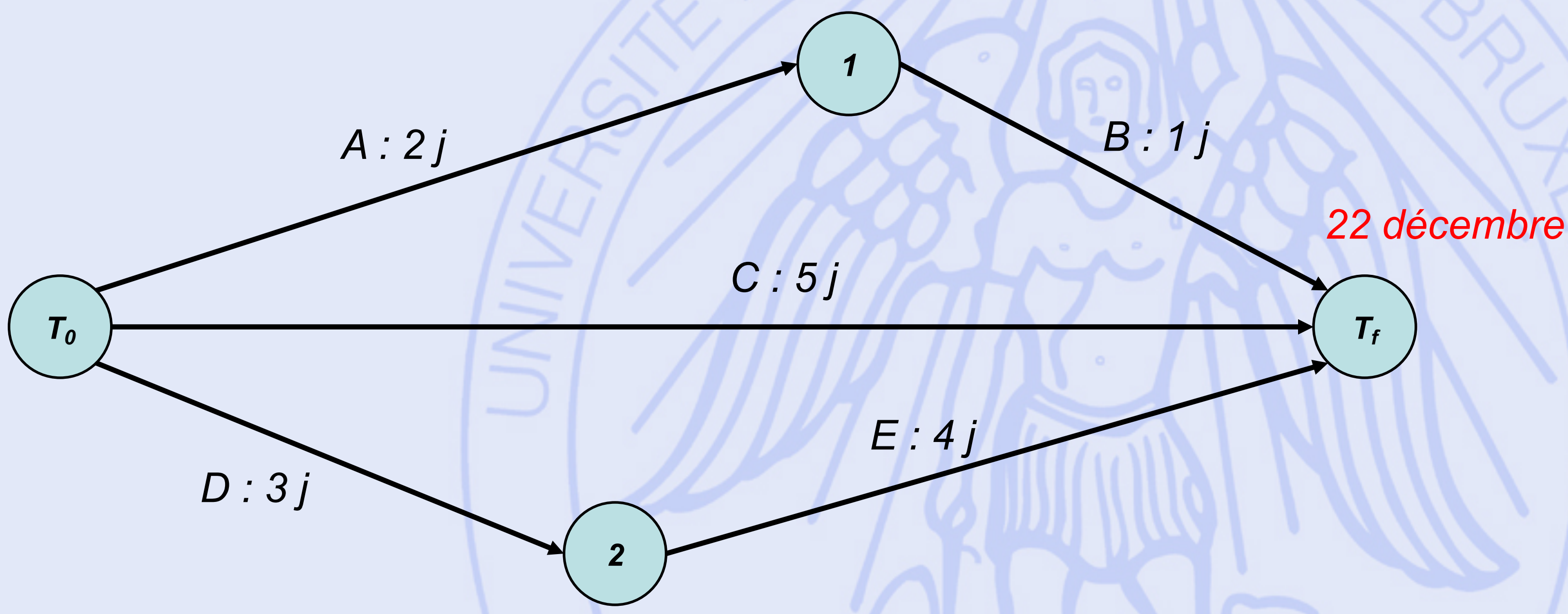
Exemple (2)

- C (répétition chorale, 5 jours)
- Temps minimum nécessaire : 5 jours



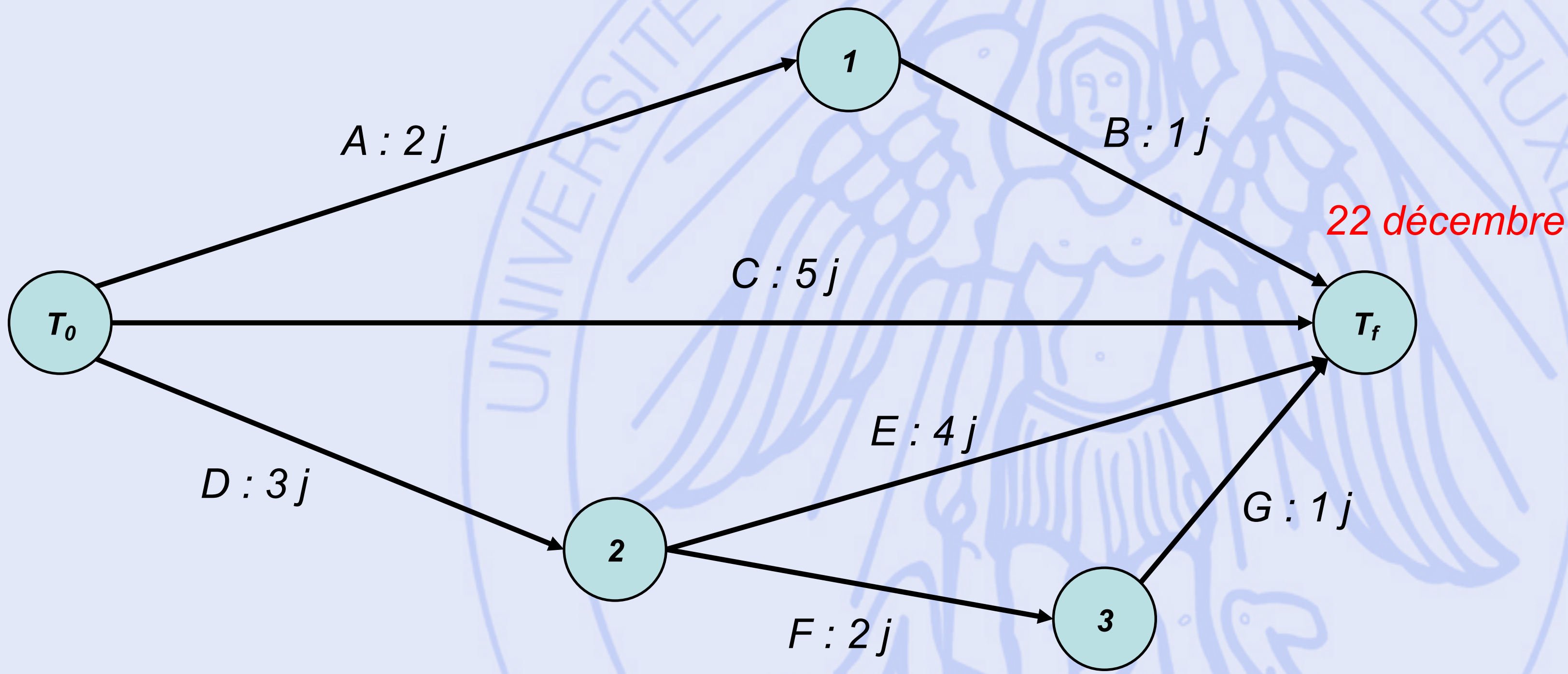
Exemple (3)

- E (déco. salle, 4 jours) après D (rés. salle, 3 jours)
- Temps minimum nécessaire : 7 jours



Exemple (4)

- G (inst. DJ, 1 jour) après F (choix DJ, 2 jours), après D (rés. Salle, 3 jours)
- Temps minimum nécessaire : 7 jours



Ordonnancement au plus tôt

- **ES(i)** = date de début au plus tôt de la tâche i

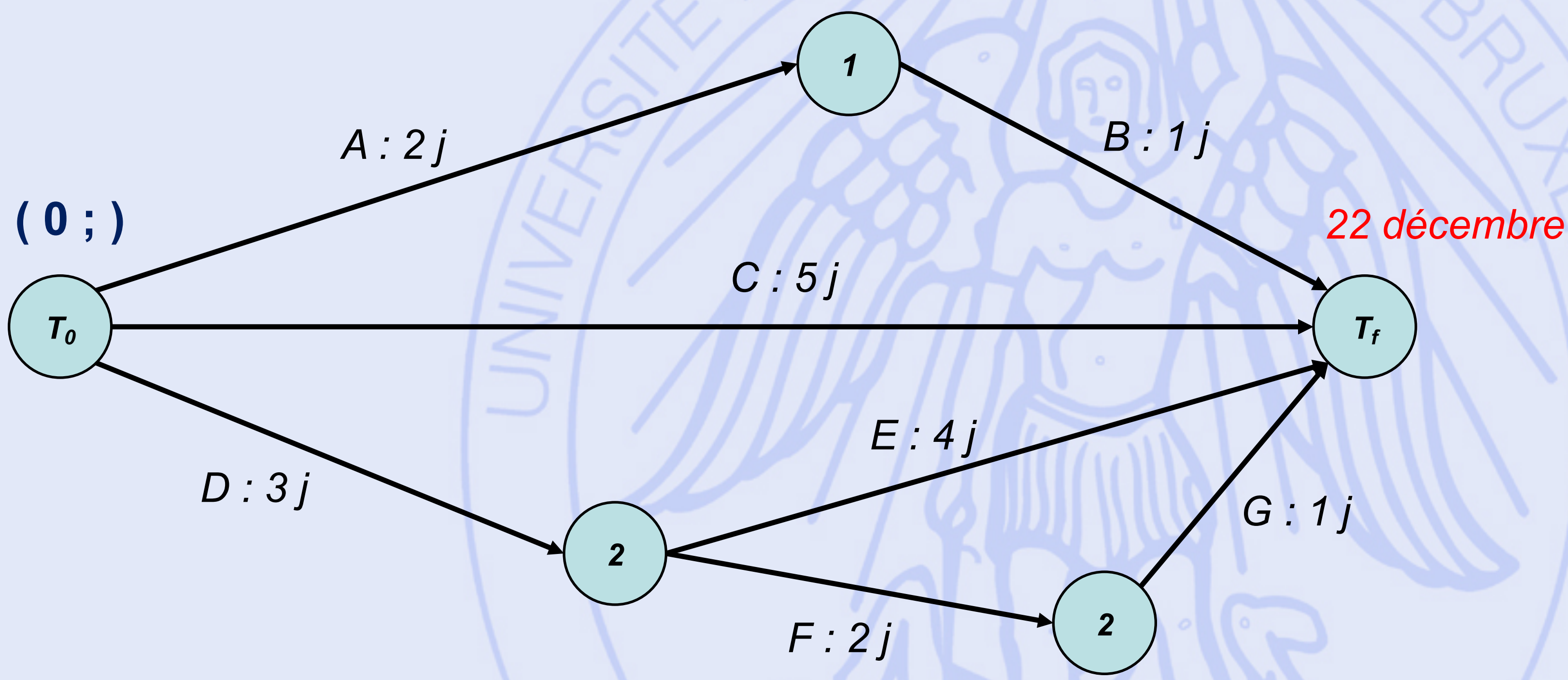
= longueur du chemin le plus long de 0 au début de i

- ES(n+1) = T = durée minimale de réalisation du projet.

- **EF(i)** = date de fin au plus tôt de la tâche i = ES(i) + d(i)

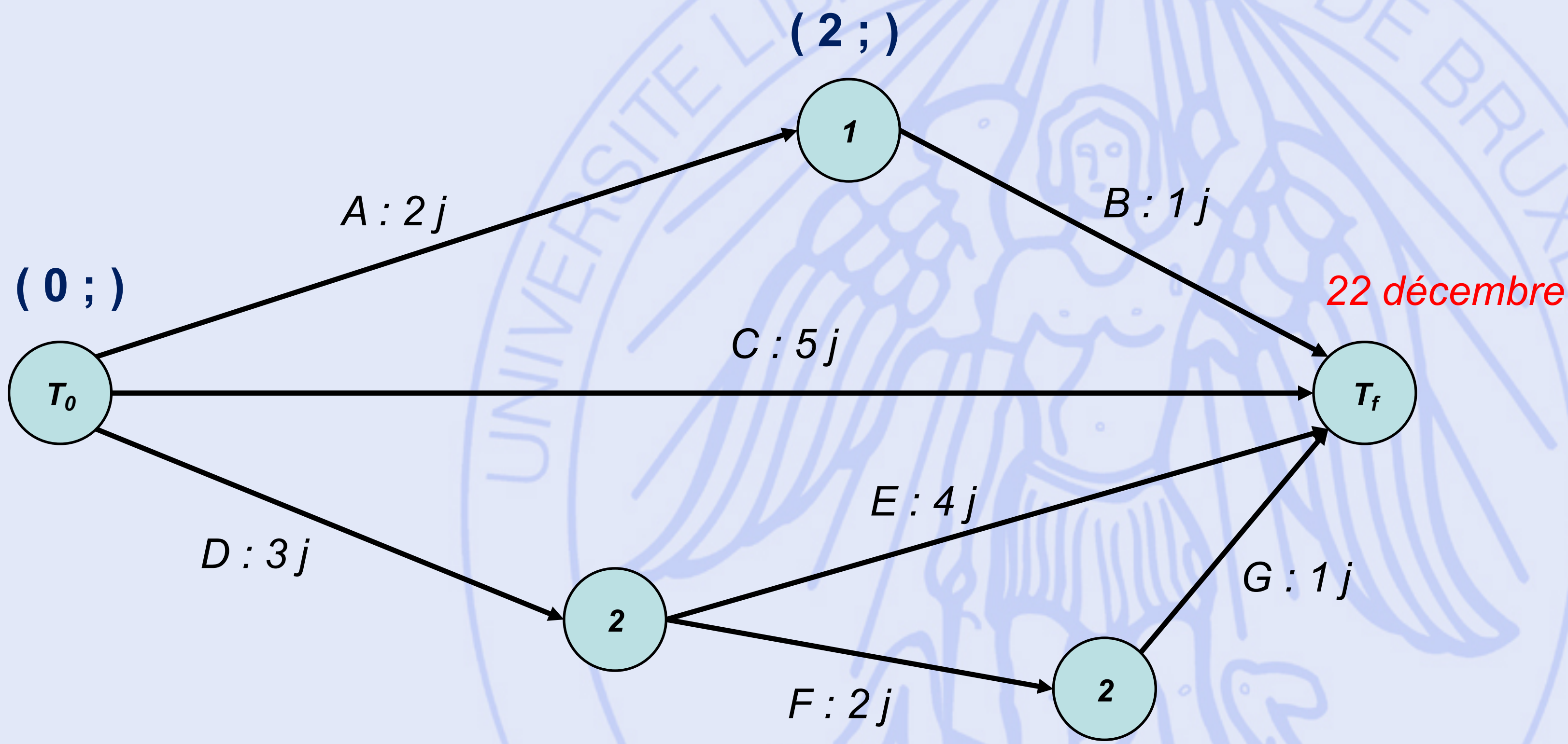
Exemple

- Date au plus tôt pour chaque sommet.
- $T_0 = 0$



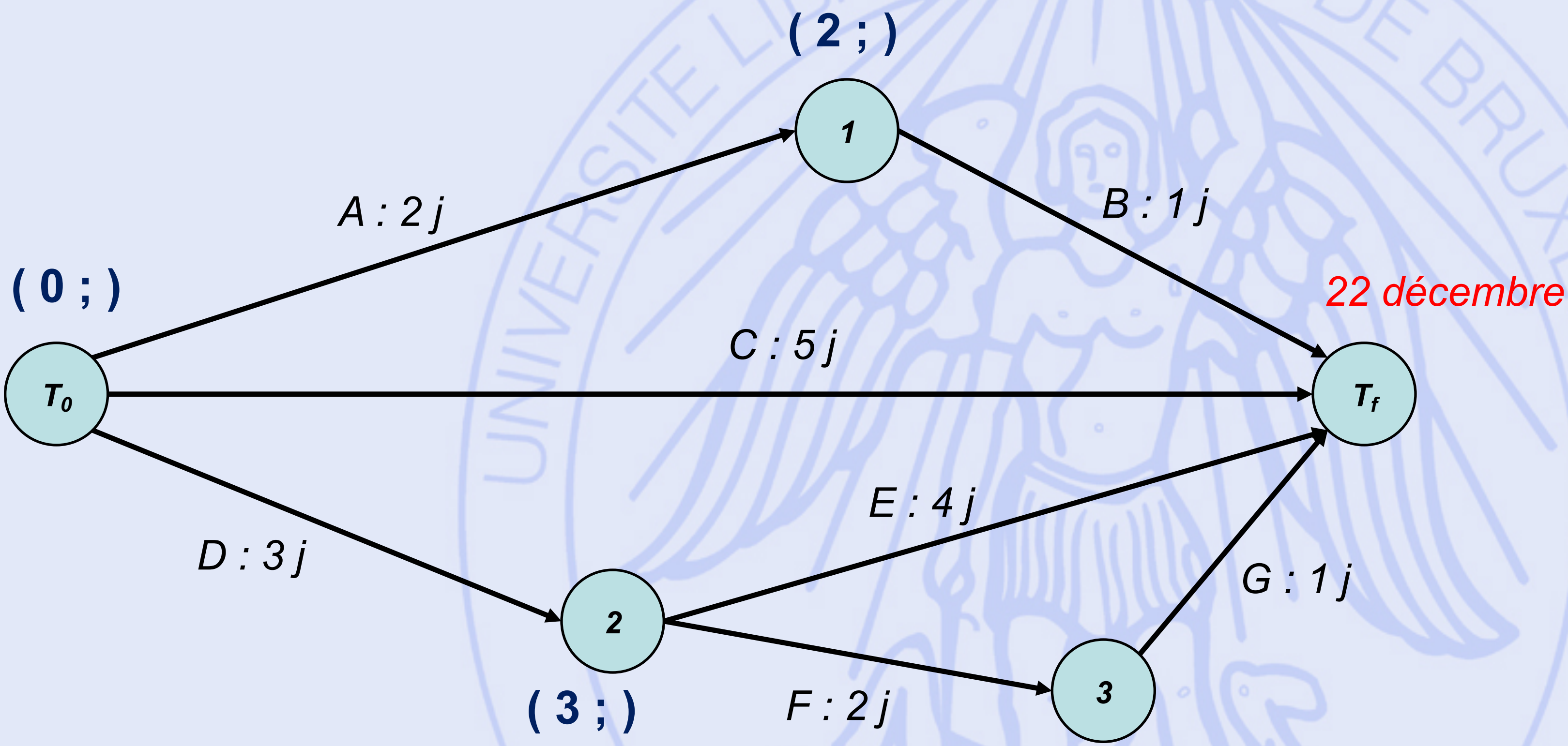
Exemple

- Date au plus tôt pour chaque sommet.
- $T_0 = 0$



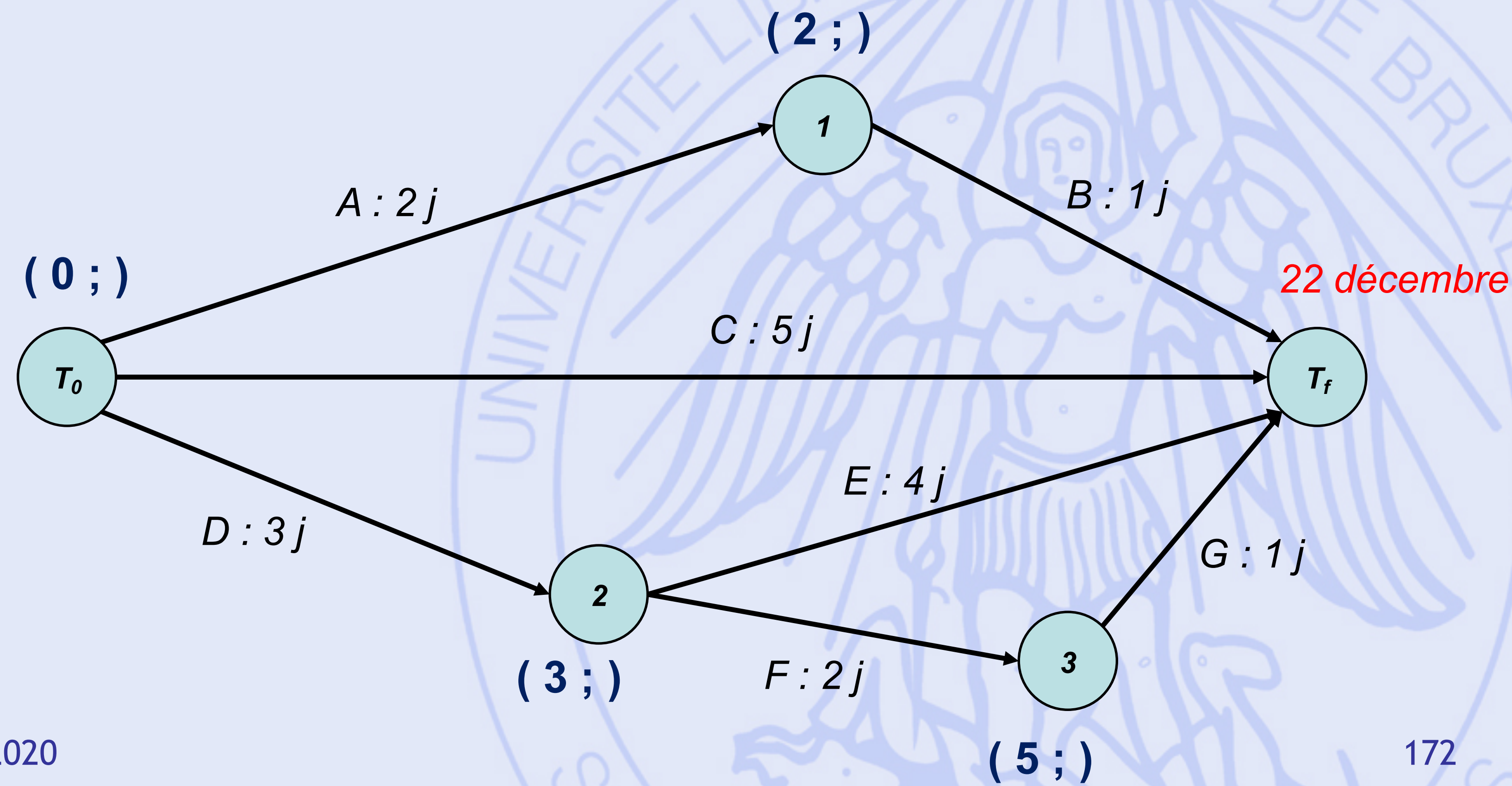
Exemple

- Date au plus tôt pour chaque sommet.
- $T_0 = 0$



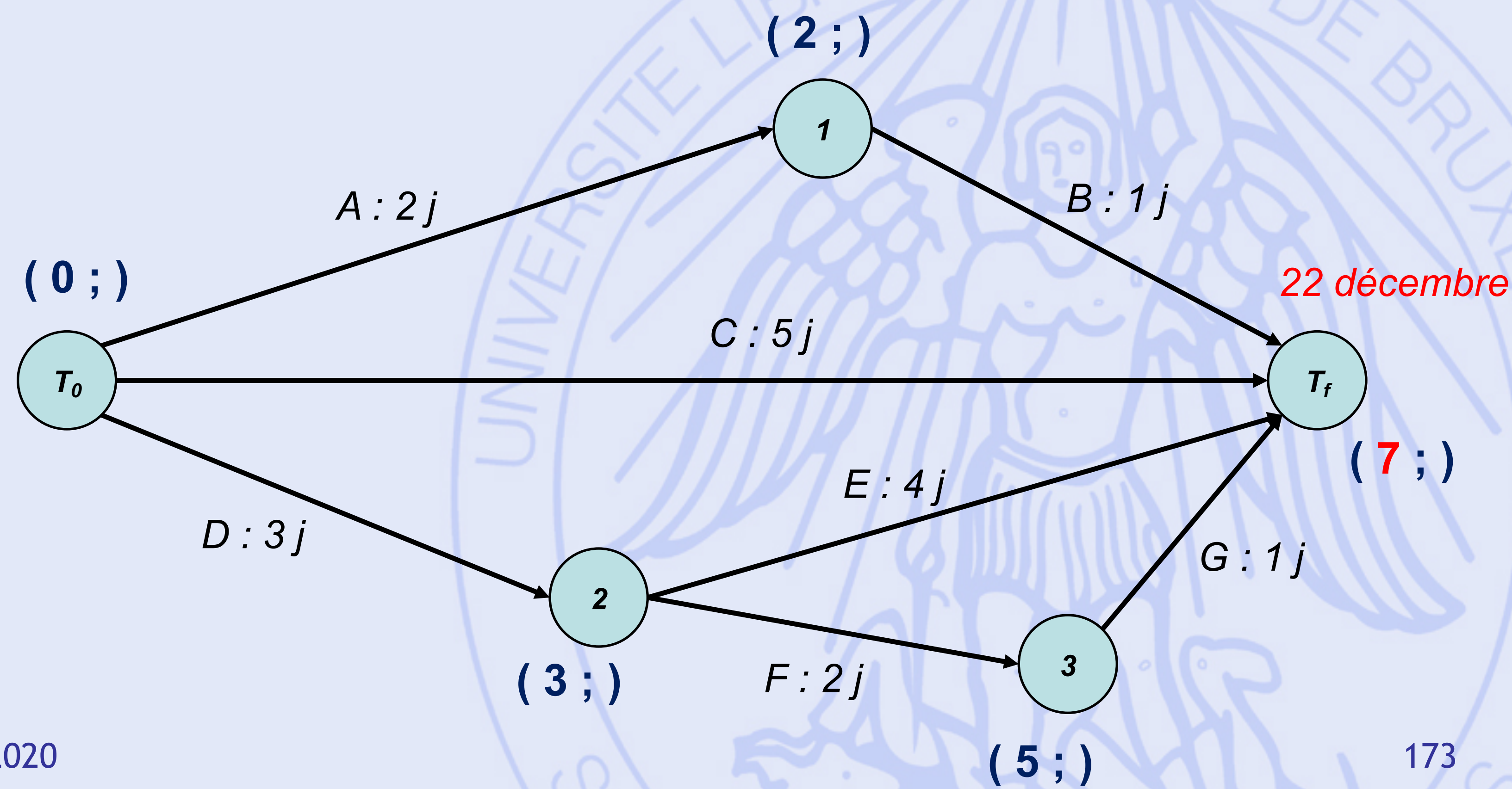
Exemple

- Date au plus tôt pour chaque sommet.
- $T_0 = 0$



Exemple

- Date au plus tôt pour chaque sommet.
- $T_0 = 0$



Ordonnancement au plus tard

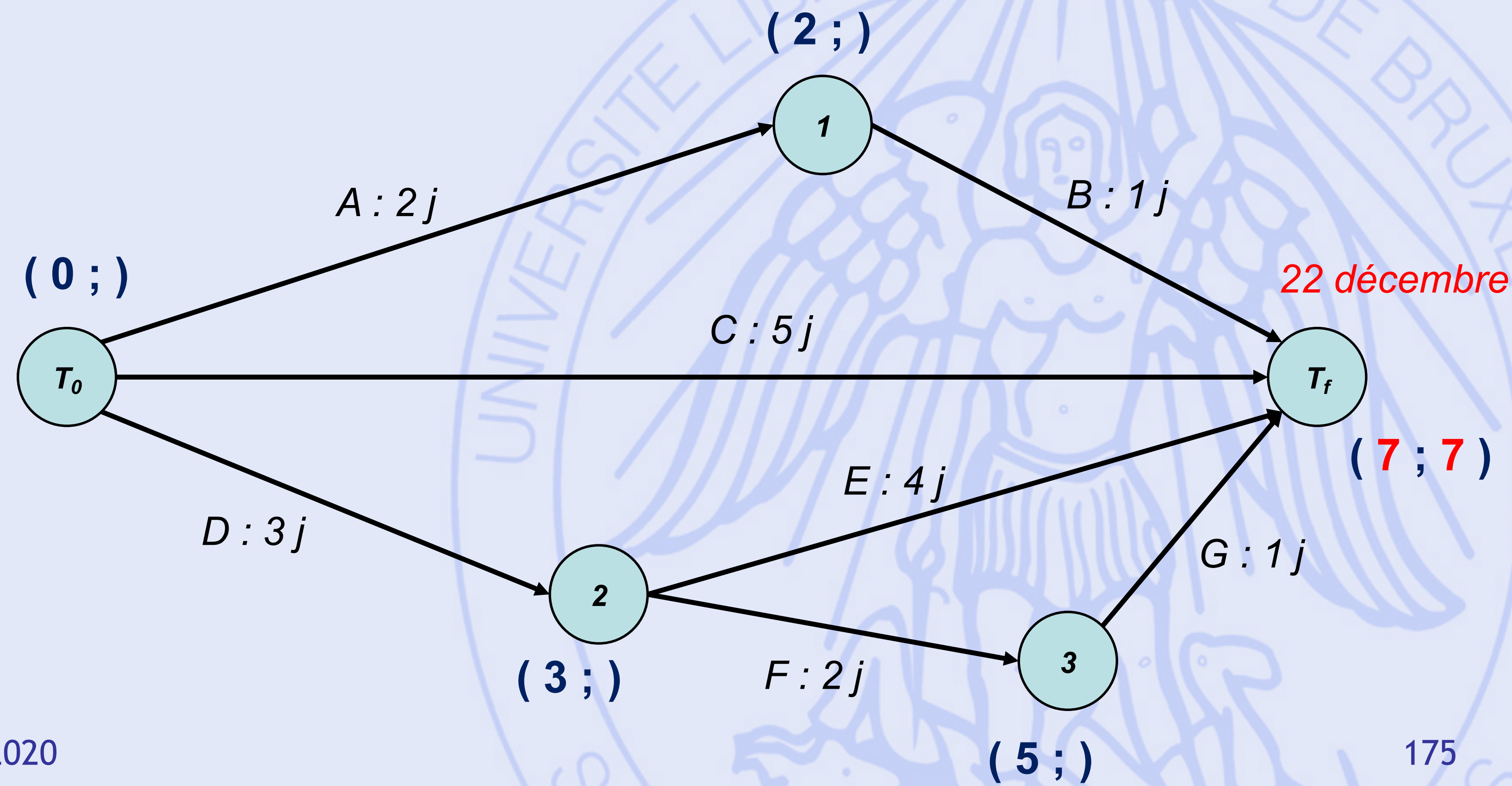
- **LF(i)** = date de fin au plus tard de la tâche i
  (*sans allonger la durée de réalisation T*)

= T – valeur du chemin de valeur maximum de la fin de i à la fin des travaux

- **LS(i)** = date de début au plus tard de la tâche i = LF(i) – d(i)

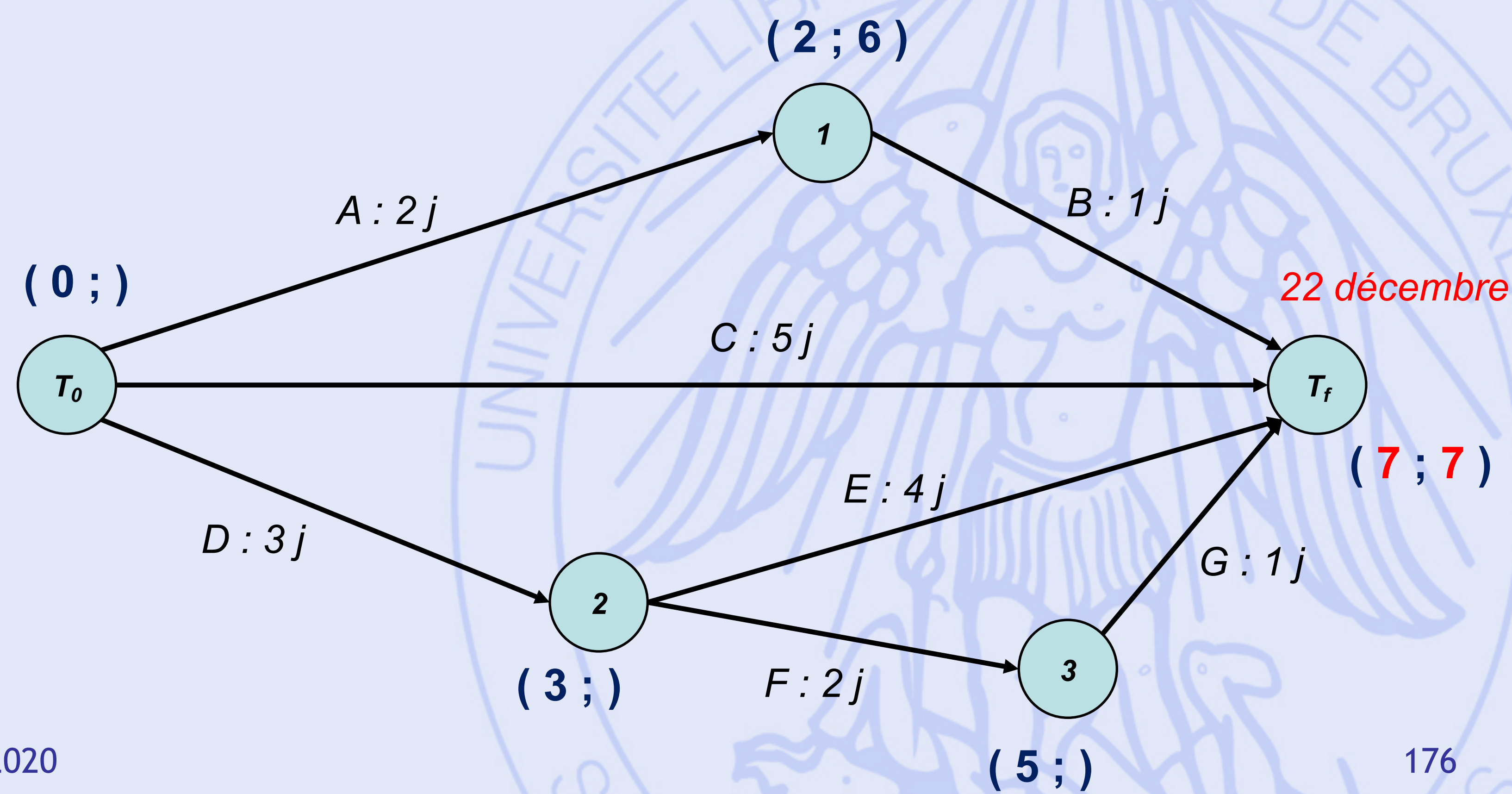
Exemple

- Date au plus tôt pour chaque sommet.
- $T_0 = 0$ - $T_f = 7$



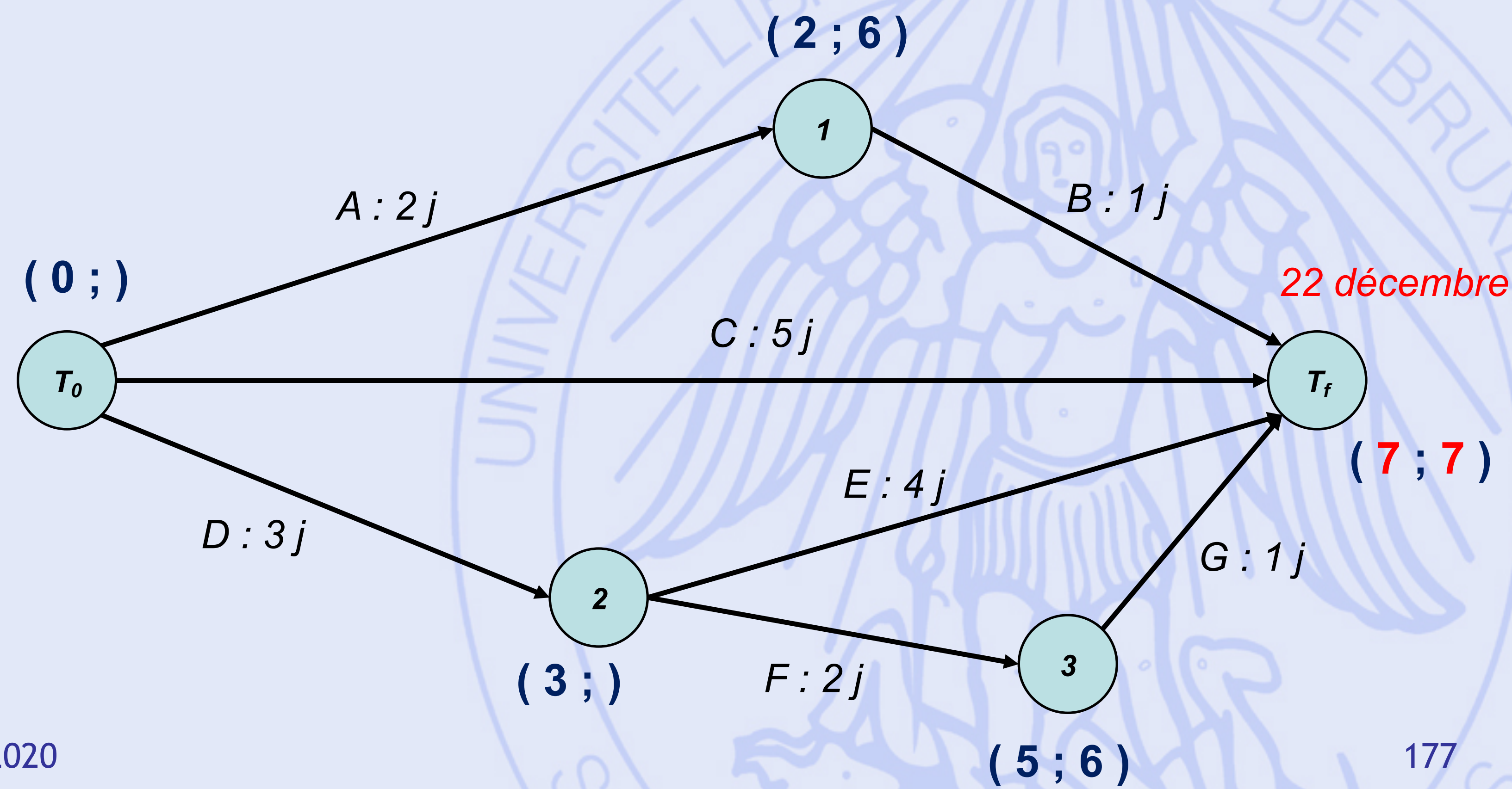
Exemple

- Date au plus tard pour chaque sommet.
- $T_0 = 0$ - $T_f = 7$



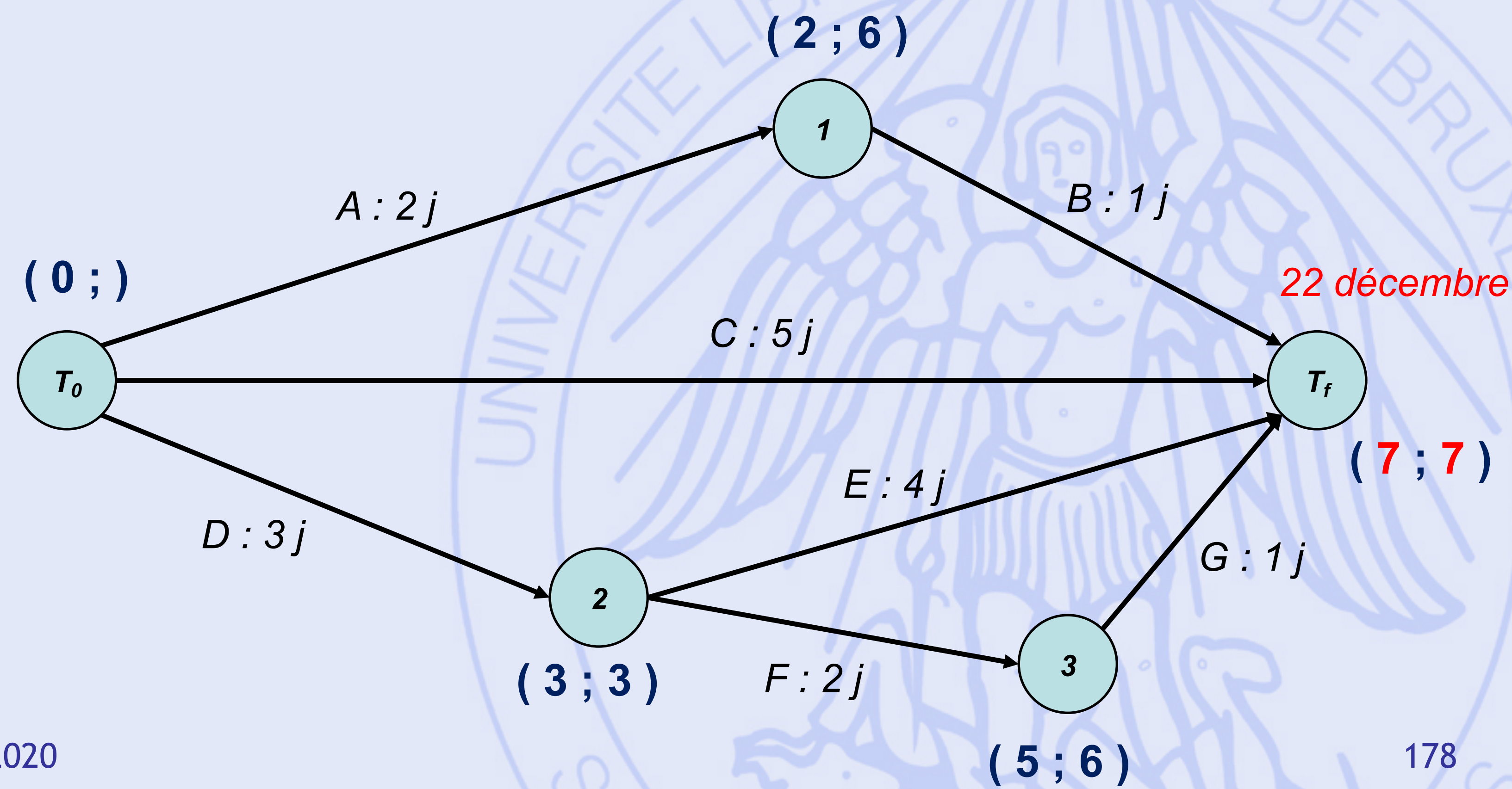
Exemple

- Date au plus tard pour chaque sommet.
- $T_0 = 0$ - $T_f = 7$



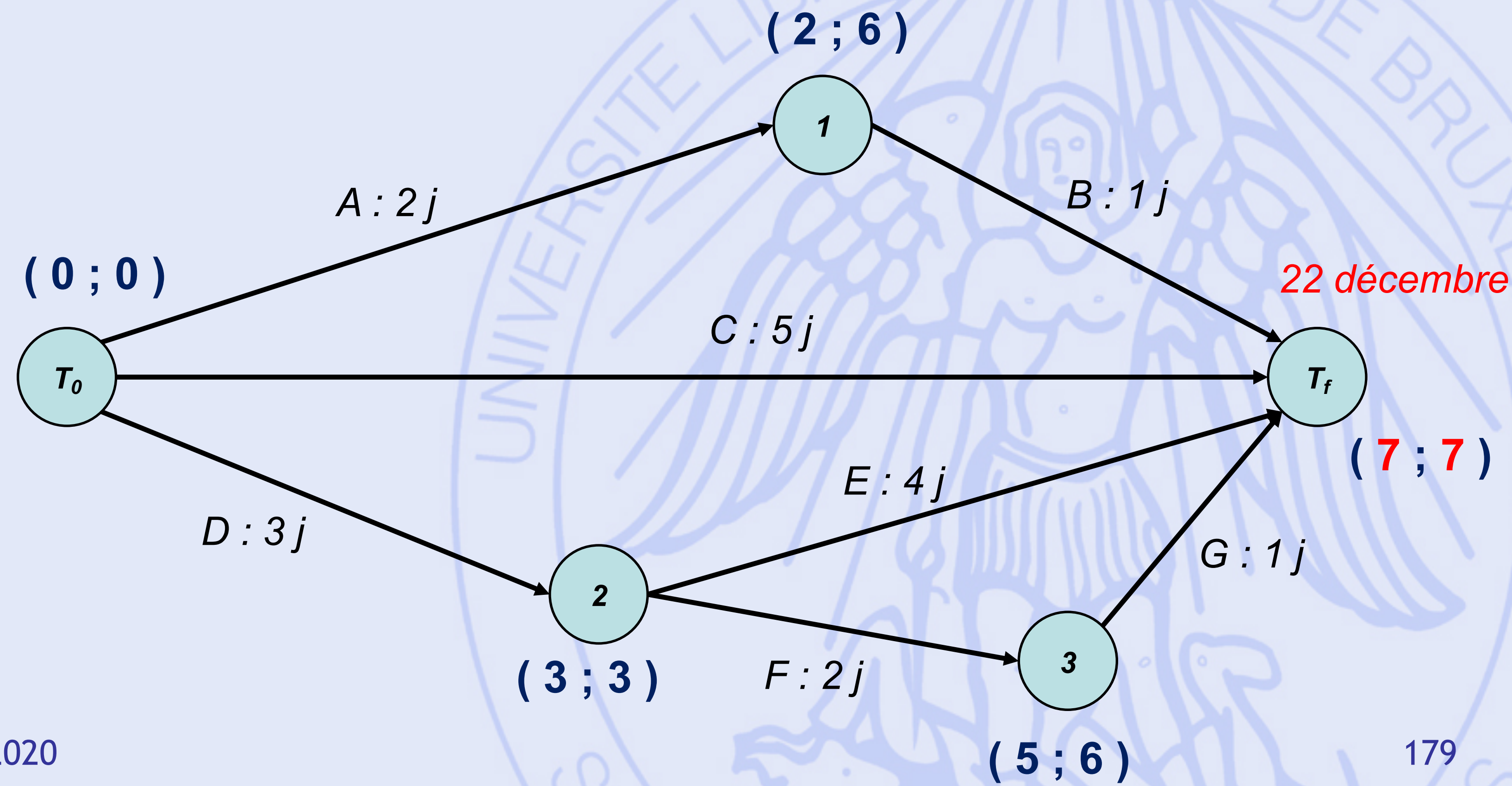
Exemple

- Date au plus tard pour chaque sommet.
- $T_0 = 0$ - $T_f = 7$



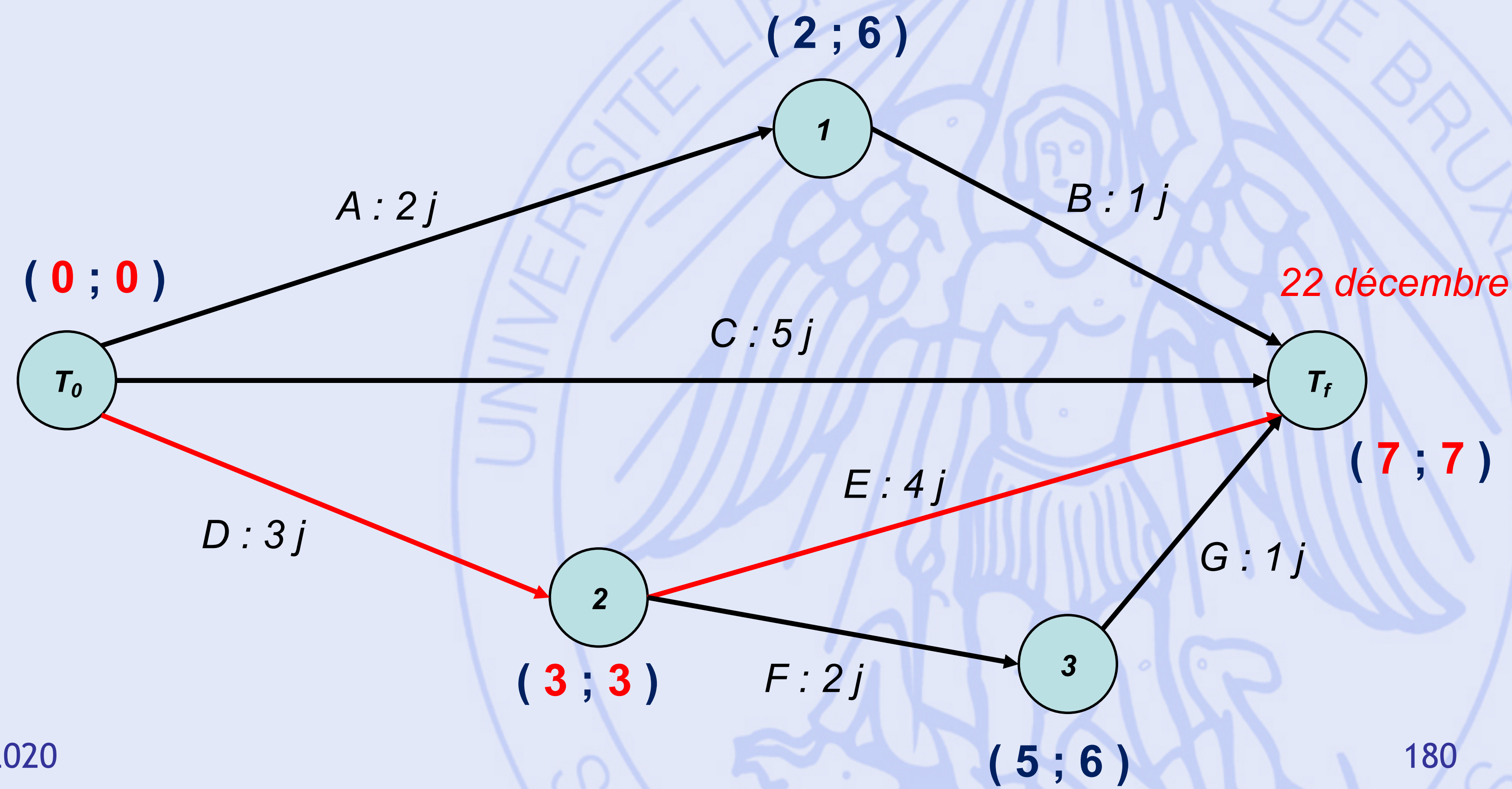
Exemple

- Date au plus tard pour chaque sommet.
- $T_0 = 0$ - $T_f = 7$



Exemple

- Date au plus tard pour chaque sommet.
- $T_0 = 0$ - $T_f = 7$



Calcul

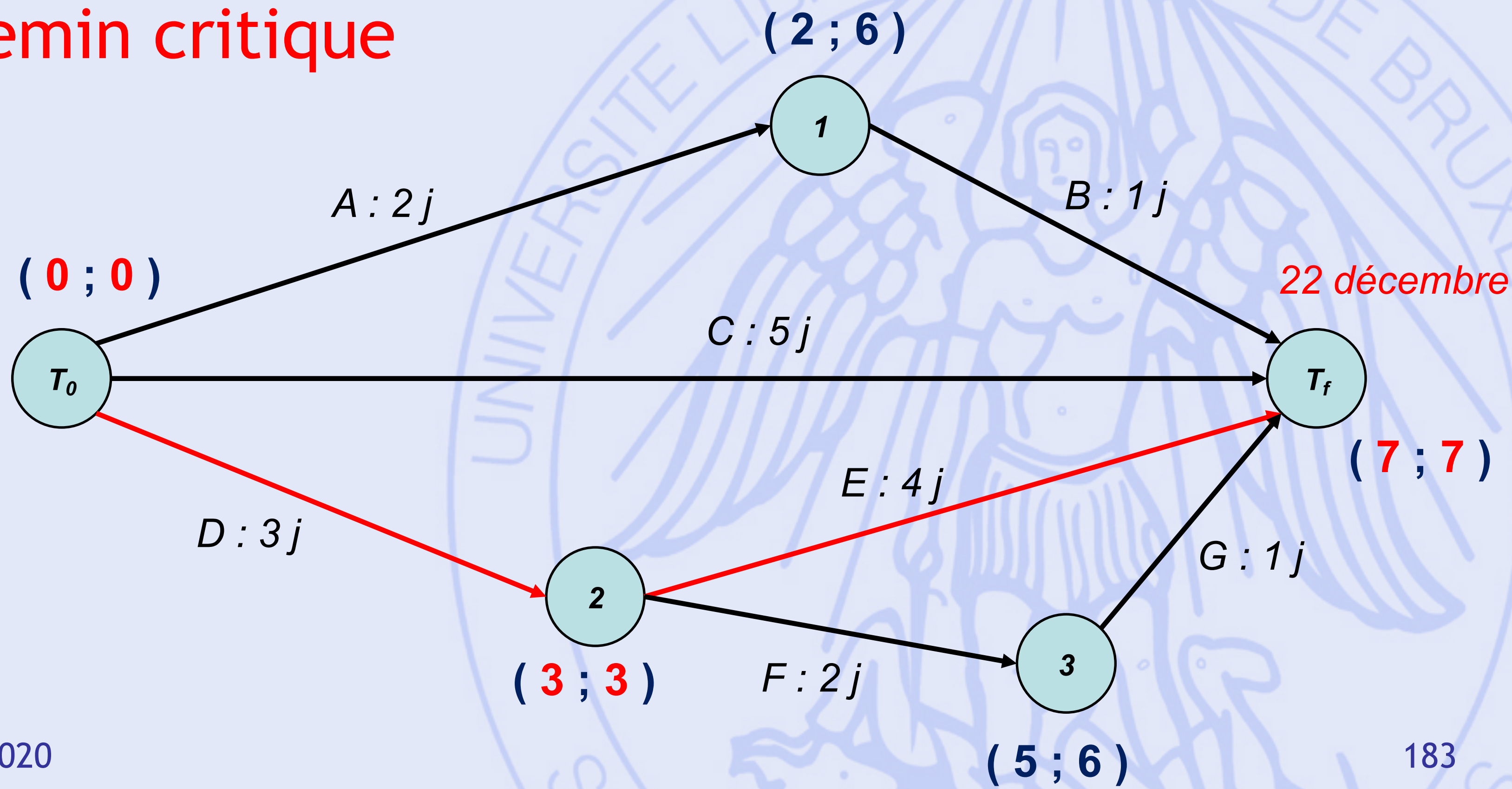
- Forme simplifiée de l'algorithme de Bellman-Kalaba pour un graphe sans circuits.
- Classement des sommets en k niveaux.
- Calcul des dates de début au plus tôt pour les sommets, par niveau décroissant, depuis le début des travaux :
  - $ES(0) = 0$
  - ensuite : $ES(i) = \max \{ ES(j) + c_{ji} \mid j \in \Gamma^{-}(i) \}$
- Puis calcul des dates au plus tard en repartant de la fin des travaux.

Chemin critique

- Le chemin critique est le chemin le plus long entre le début et la fin des travaux.
- Tâches critiques :
  - Tâches situées sur le chemin critique.
  - Tout retard sur une tâche critique rallonge d'autant la durée minimale de réalisation du projet.

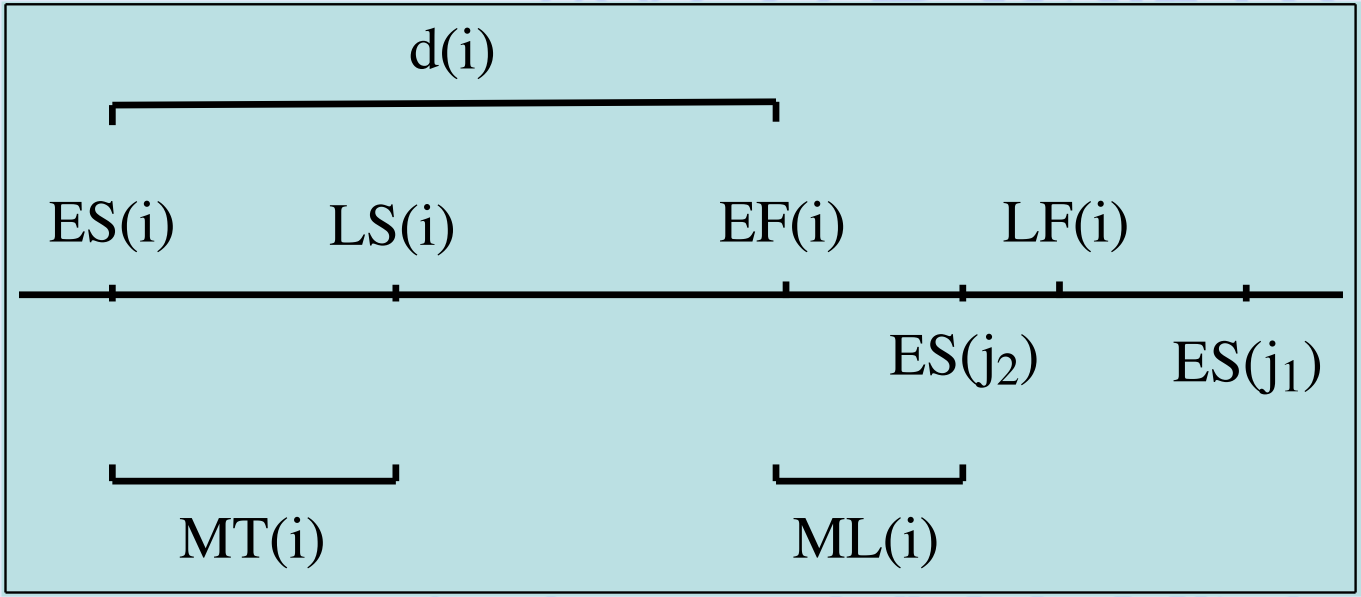
Exemple

- Date au plus tôt pour chaque sommet.
- $T_0 = 0$ - $T_f = 7$
- Chemin critique



Marges

- Retards possibles sur les tâches non-critiques, sans augmenter T ?



Marges

- Marge totale de la tâche i :

  $\mathbf{MT(i)} = LS(i) - ES(i)$

➢ Retard maximum sans augmenter T.

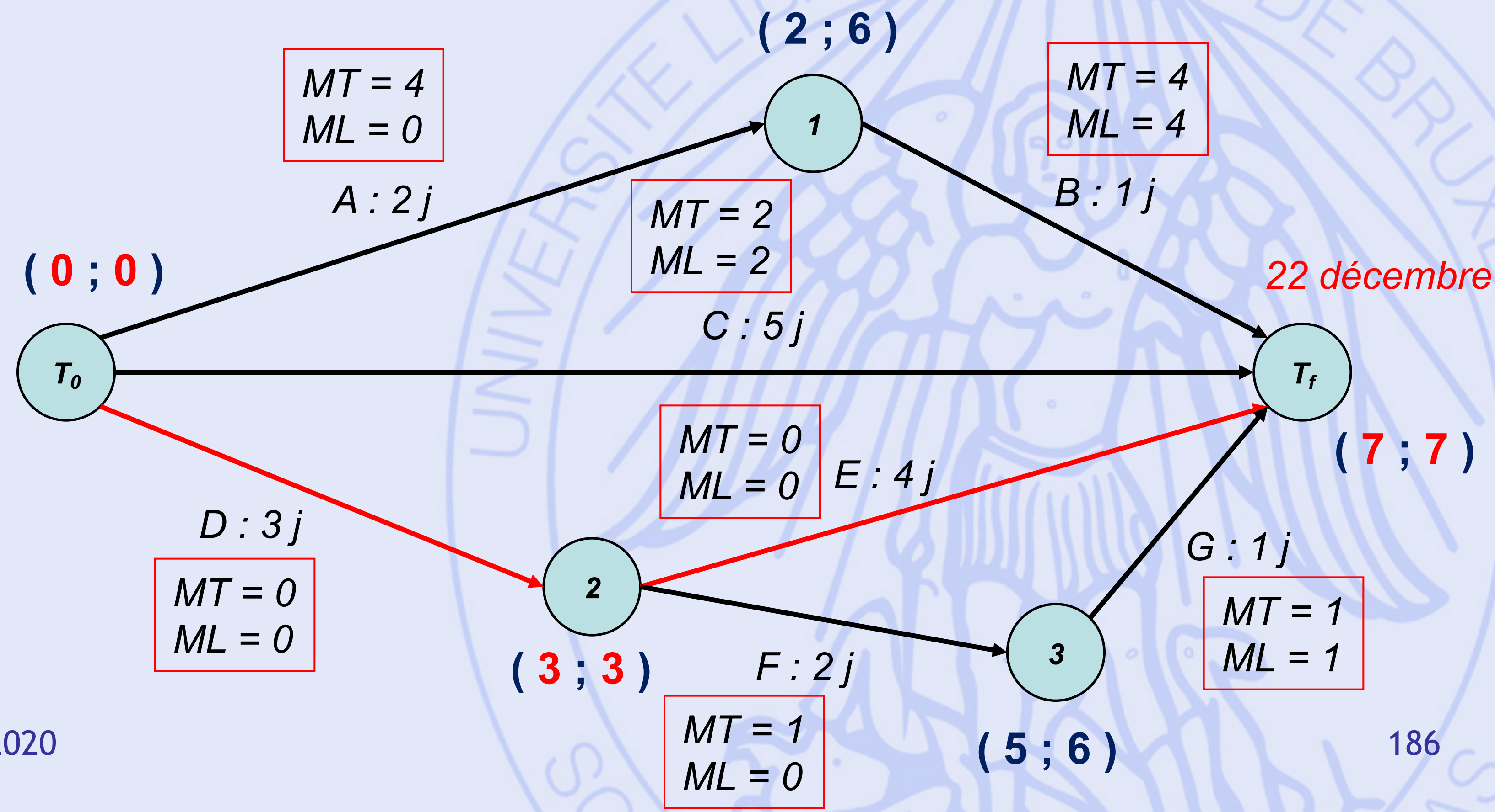
- Marge libre de la tâche i :

  $\mathbf{ML(i)} = \min \{ ES(j) - EF(i) \mid j \text{ suit } i \}$

➢ Retard maximum sans perturber les dates au plus tôt.

Exemple

- Date au plus tôt pour chaque sommet.
- $T_0 = 0$ - $T_f = 7$



Exemple 2 - Exploitation minière

- En vue de l’exploitation d’une mine, on construit :
  - un port sur un canal proche du site d’extraction,
  - ainsi qu’une route et une voie de chemin de fer qui relient la mine au port.
- Au total, il y a 10 tâches à effectuer (durées exprimées en mois).
- Contraintes temporelles uniquement (dans un premier temps).

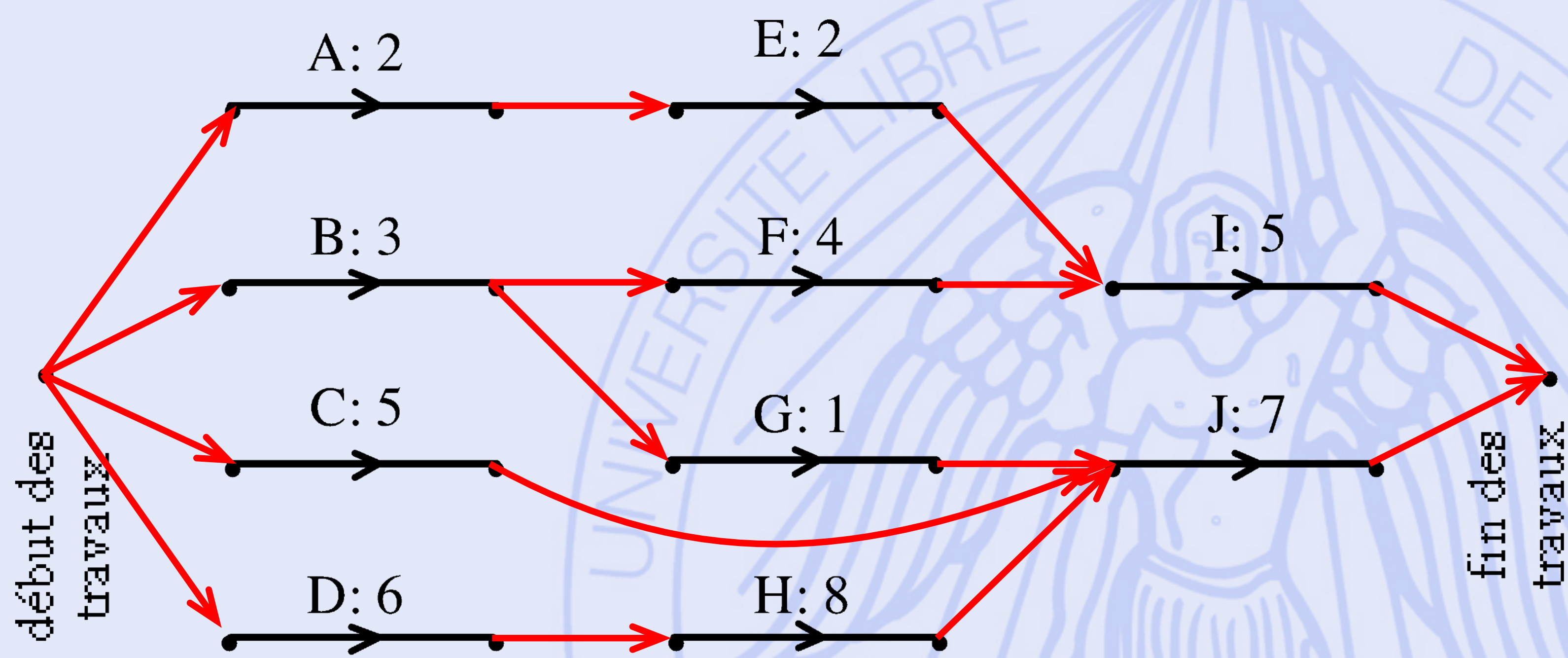
Exemple 2 - Liste des tâches

Tâches	Durées	Contraintes
A: Construction d'un port provisoire	2	-
B: Déblai pour route et voie ferrée	3	-
C: Commande du matériel minier	5	-
D: Commande du matériel portuaire	6	-
E: Implantation du port définitif	2	Après A.
F: Construction de la route	4	Après B.
G: Pose de la voie ferrée	1	Après B.
H: Installation portuaire	8	Après D.
I : Construction d'une cité	5	Après A,B,E,F.
J: Installation minière	7	Après B,C,D,G,H.

Exemple 2 – Questions

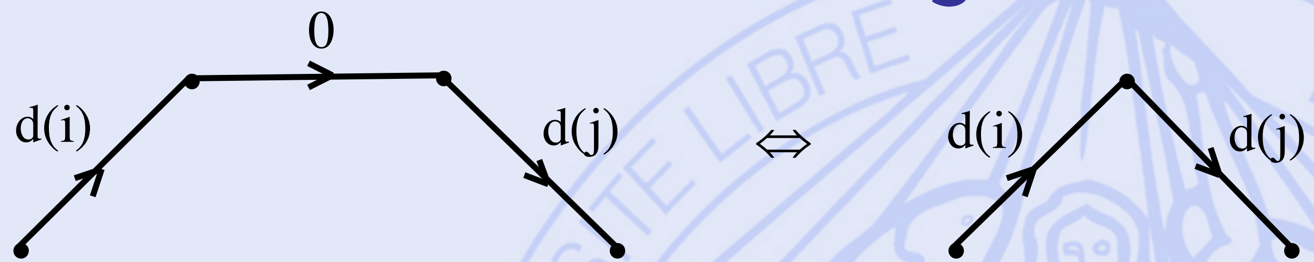
- Quelle est la durée de réalisation minimale des travaux, en tenant compte des contraintes ?
- Quel est le calendrier d'exécution des différentes tâches correspondant ?
- On pourrait aussi prendre en compte le nombre d'ouvriers disponibles et leurs qualifications, …

Exemple 2 - graphe

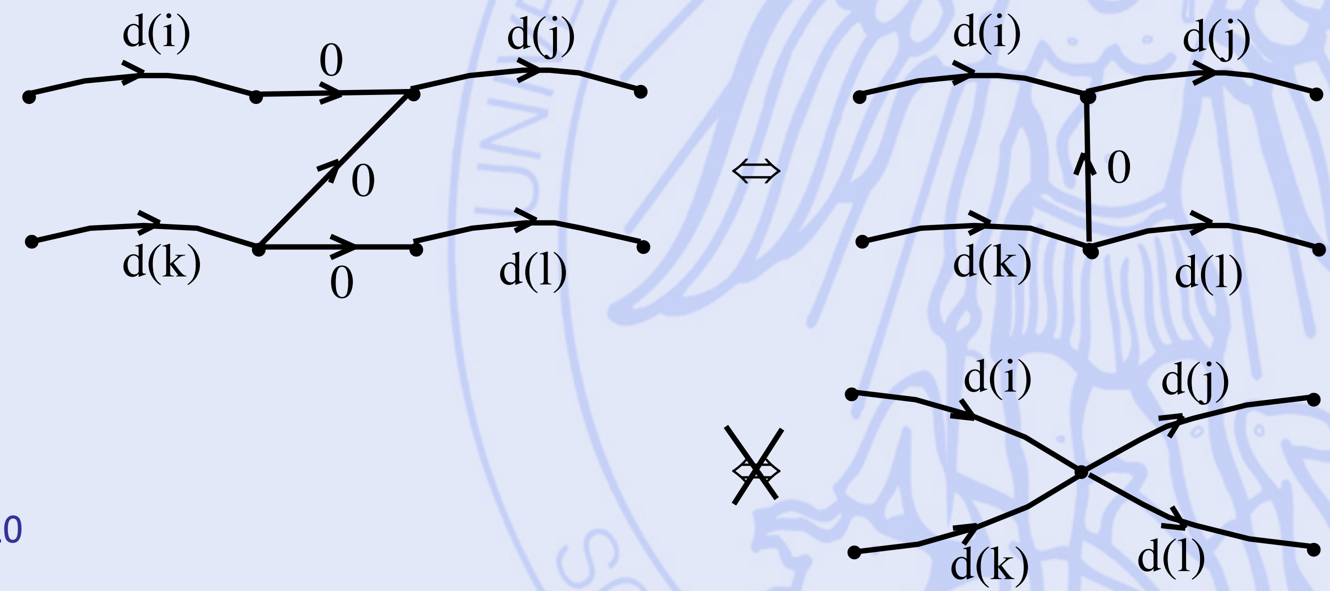


Simplification du graphe

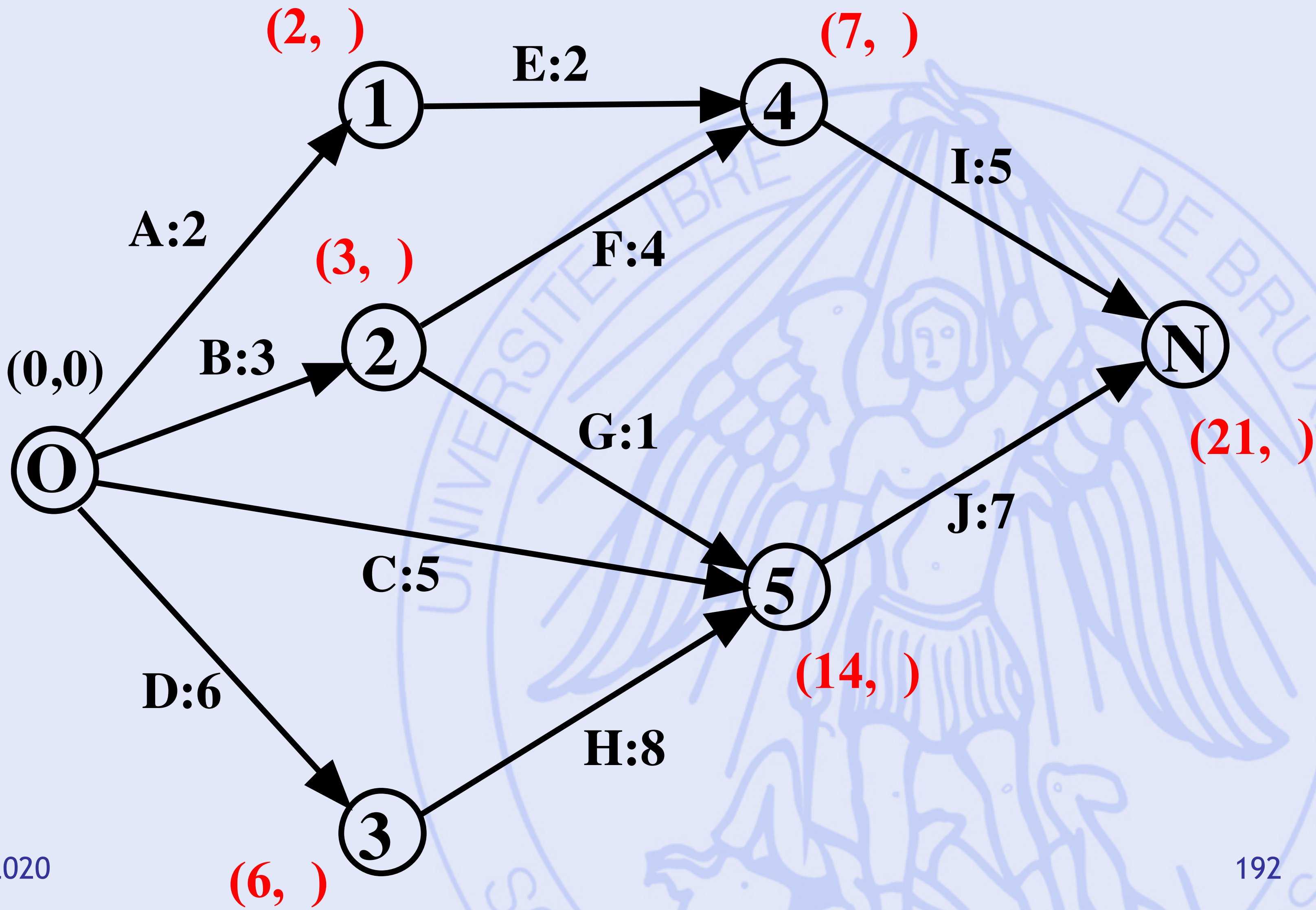
- Elimination des arcs de longueur nulle :



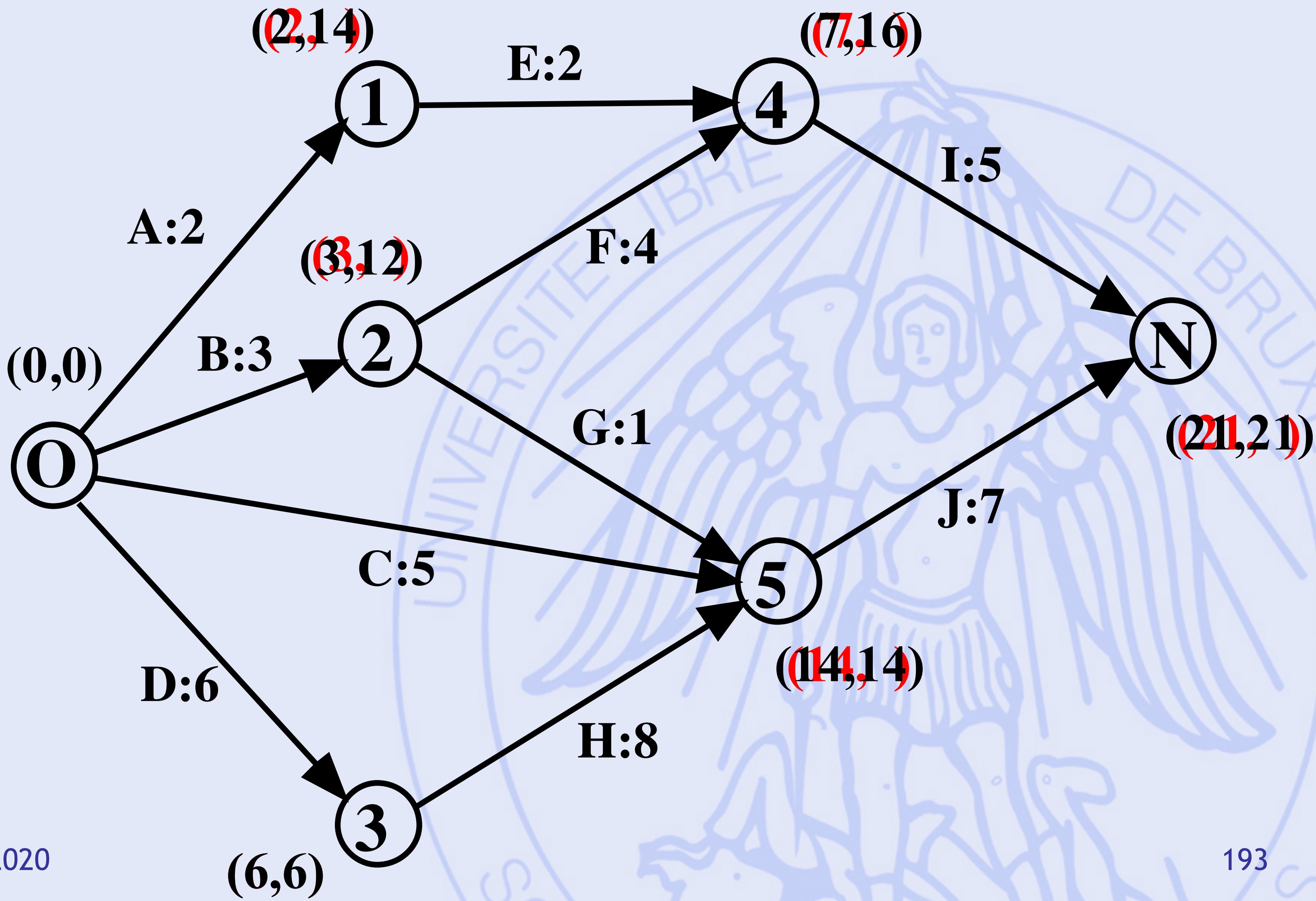
- Attention :



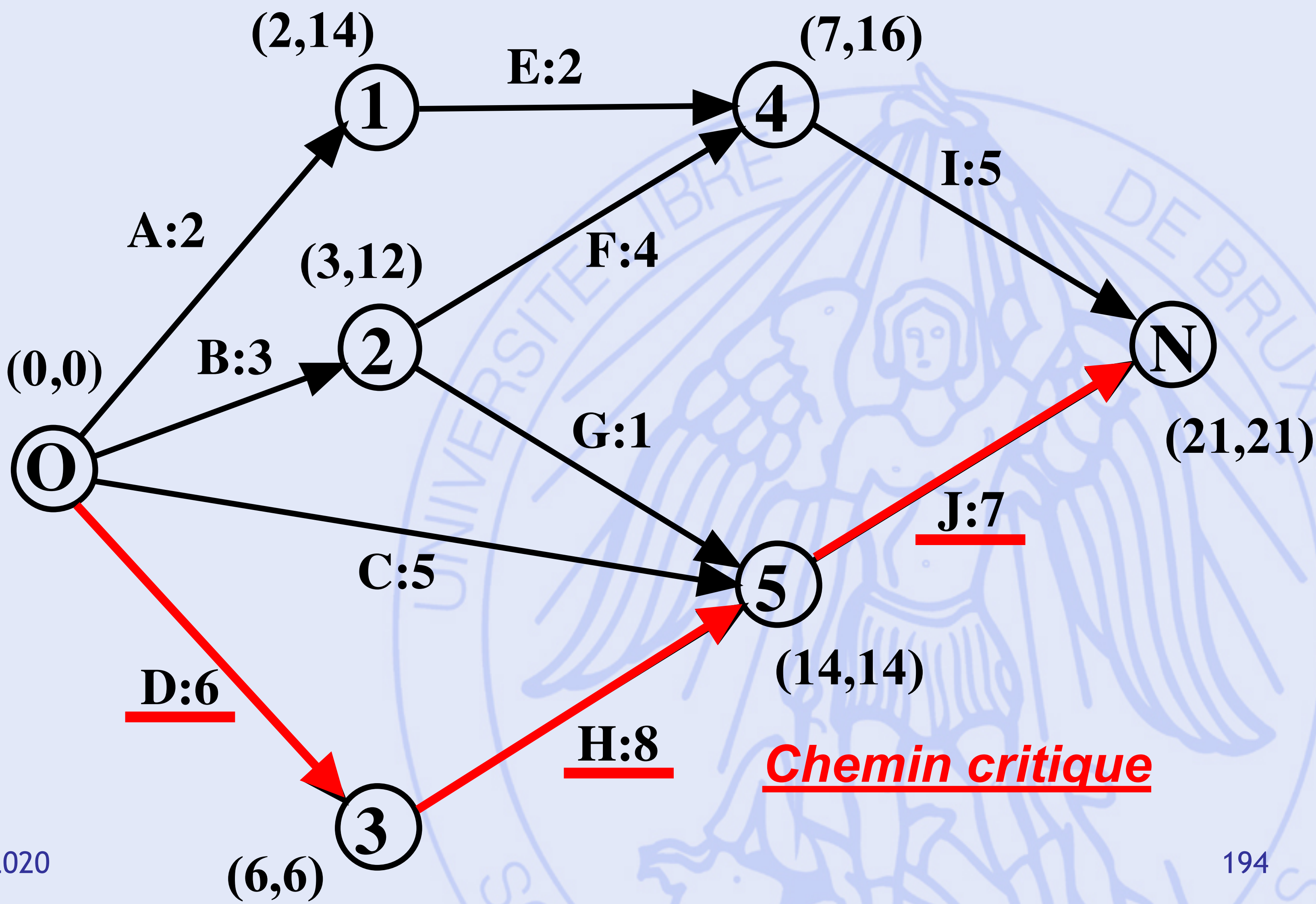
Exemple 2 – graphe simplifié



Exemple 2 – graphe simplifié



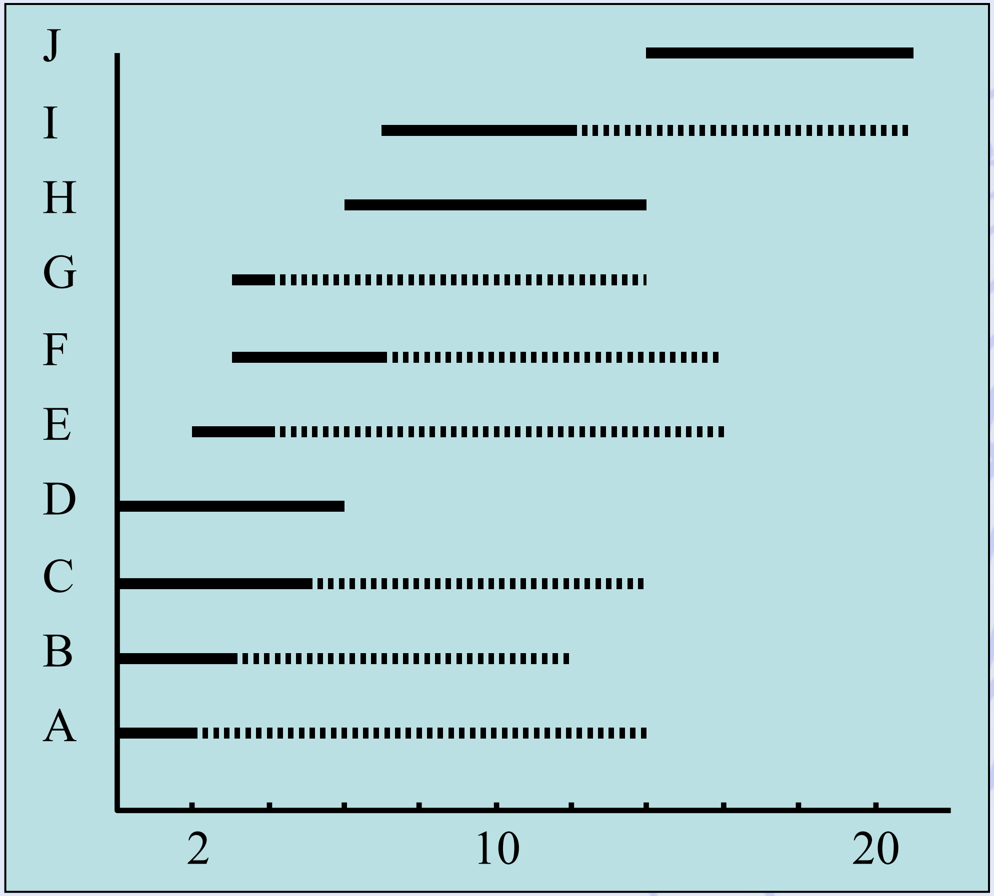
Exemple 2 - graphe simplifié



Exemple 2 - résultats

Tâche	Durée	Après	ES	EF	LS	LF	ML	MT
A	2	-	0	2	12	14	0	12
B	3	-	0	3	9	12	0	9
C	5	-	0	5	9	14	9	9
D	6	-	**0**	**6**	**0**	**6**	**0**	**0**
E	2	A	2	4	14	16	3	12
F	4	B	3	7	12	16	0	9
G	1	B	3	4	13	14	10	10
H	8	D	**6**	**14**	**6**	**14**	**0**	**0**
I	5	A,B,E,F	7	12	16	21	9	9
J	7	B,C,D,G,H	**14**	**21**	**14**	**21**	**0**	**0**

Diagramme de Gantt



- Trait plein :
  - Ordonnancement au plus tôt.
- Pointillés :
  - Marge totale.

Contraintes cumulatives

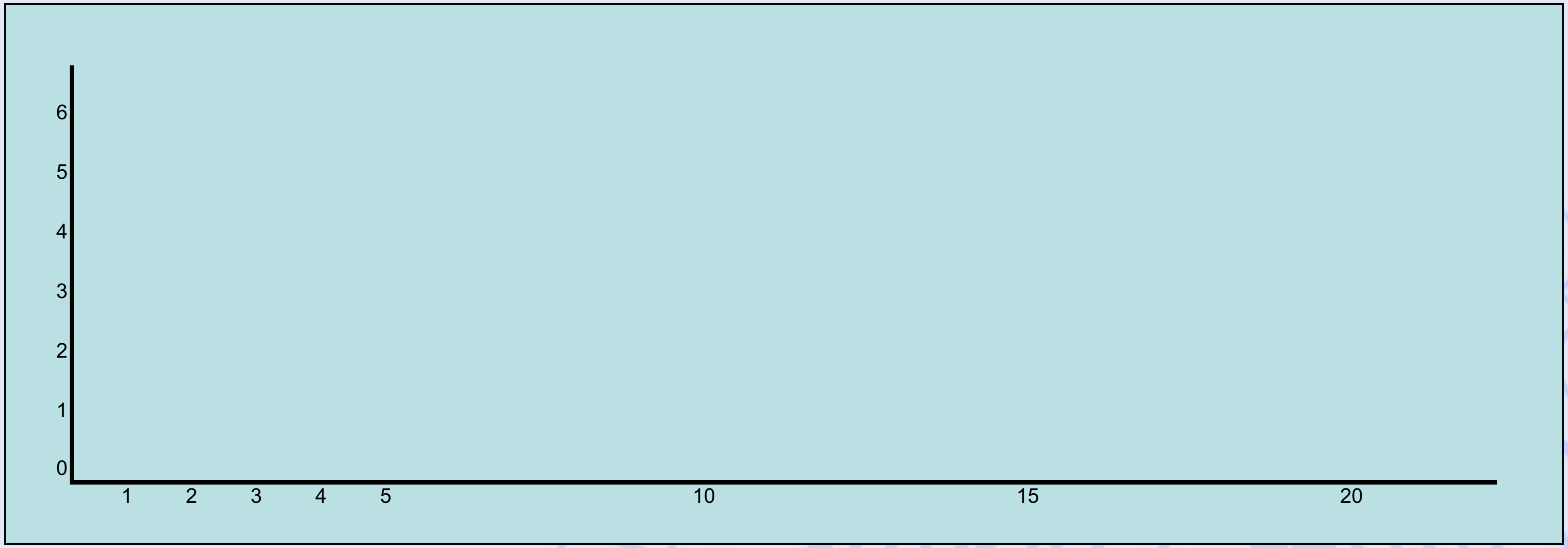
- Origine :
  - Utilisation de ressources disponibles en quantités limitées :
    outils, matières premières, ouvriers, budget, …
- Courbe de charge :
  - Pour un type de ressource et pour un ordonnancement donné : quantités cumulées nécessaires en fonction du temps.
- Problèmes :
  - Respecter un profil maximum pour la courbe de charge (contrainte).
  - Lisser la courbe de charge (éviter les pics).

Exemple 2

- Ressource : 3 équipes d'ouvriers disponibles.
- Equipes nécessaires par tâche :
  (pendant toute la durée de la tâche)

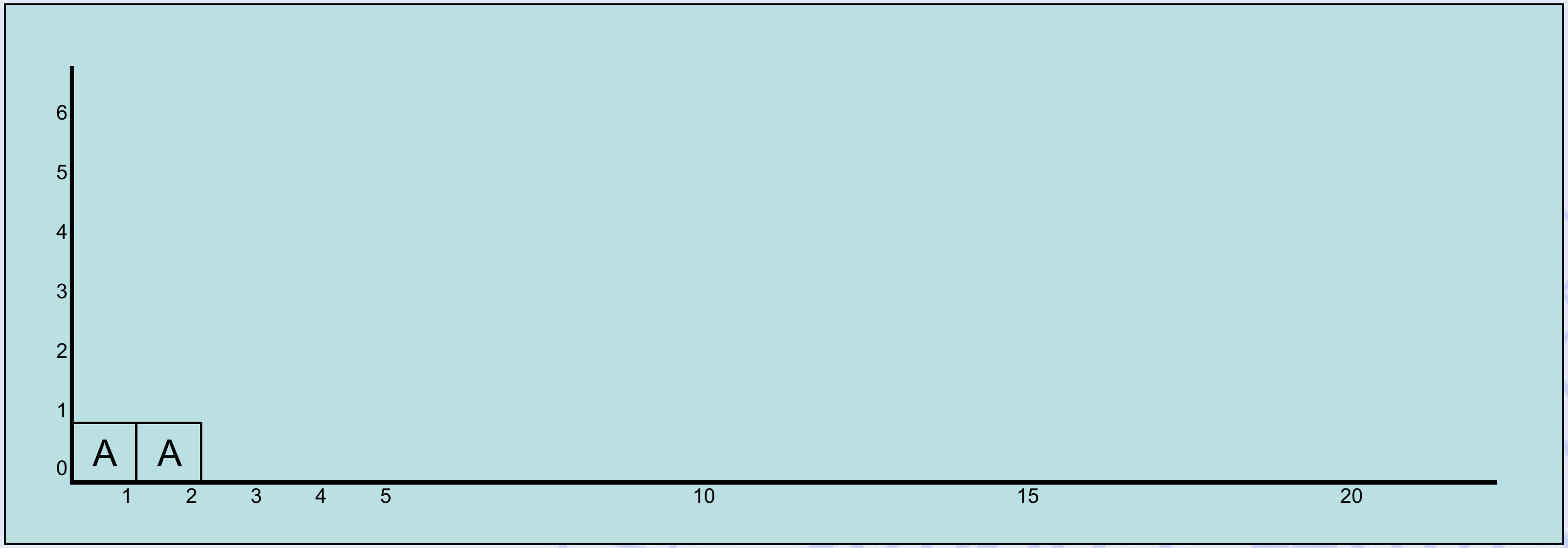
A : 1	B : 1	C : 0	D : 0	E : 3
F : 2	G : 1	H : 0	I : 3	J : 1

Courbe de charge



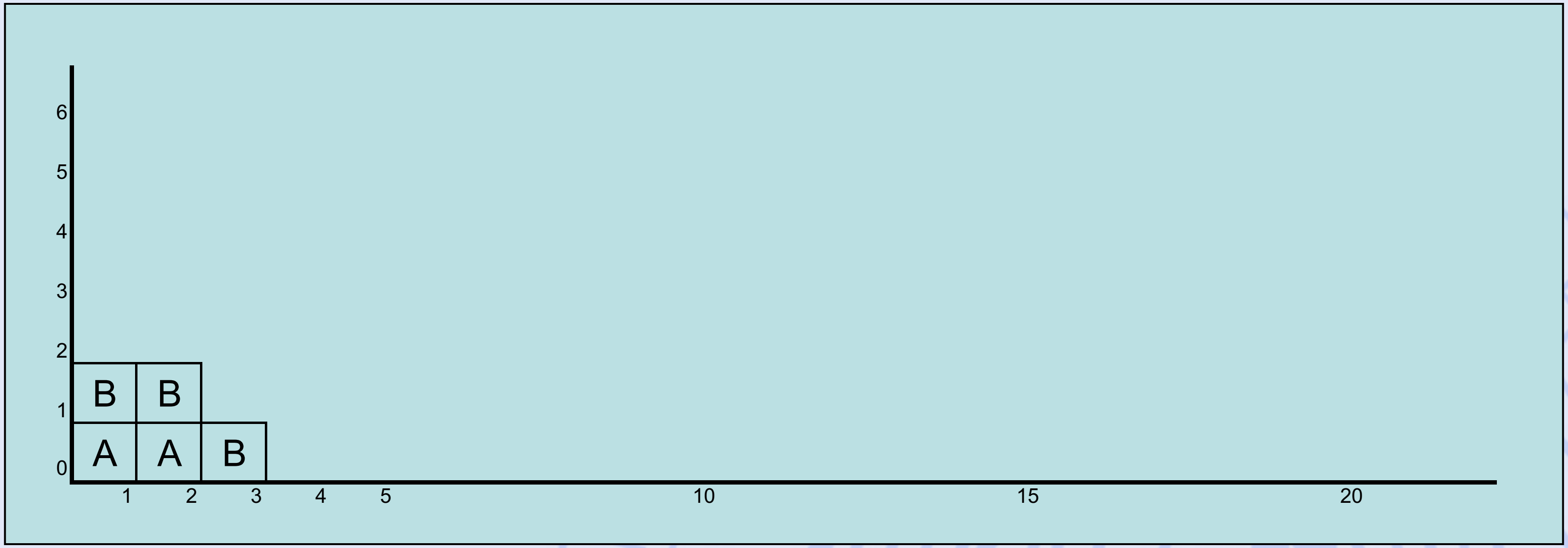
- Tâche A :
  - Durée : 2 mois,
  - Dès le début des travaux,
  - 1 équipe d'ouvriers.

Courbe de charge



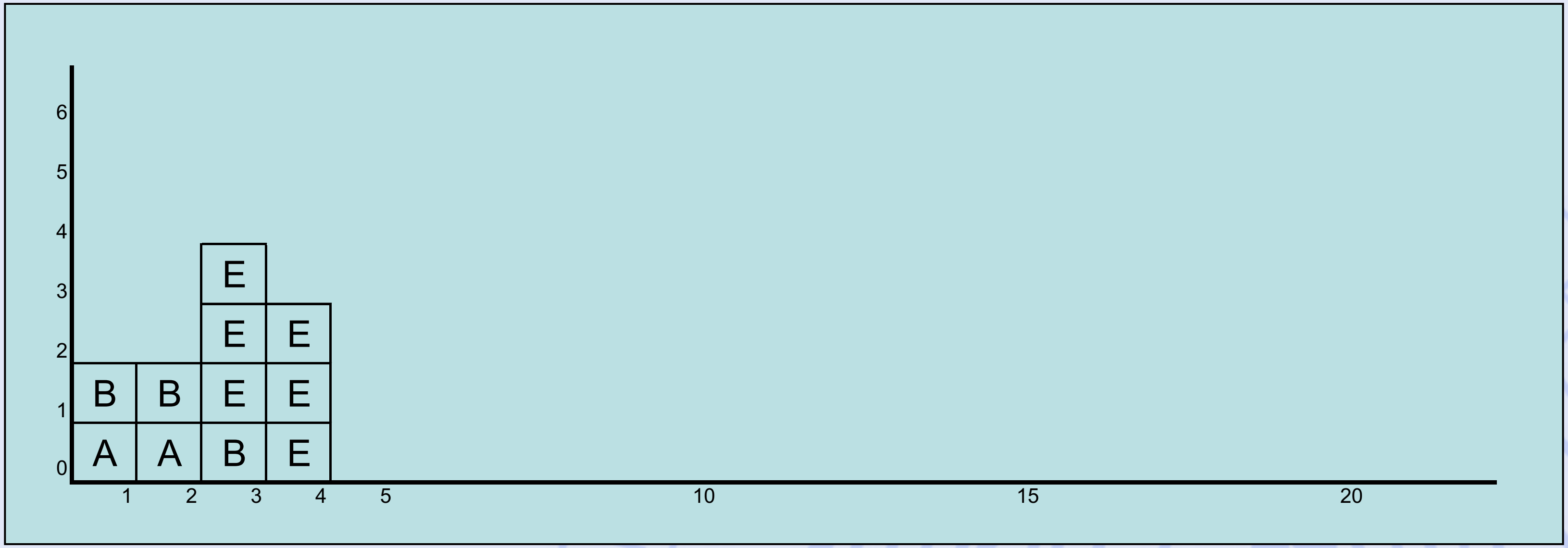
- Tâche B :
  - Durée : 3 mois,
  - Dès le début des travaux,
  - 1 équipe d'ouvriers.

Courbe de charge



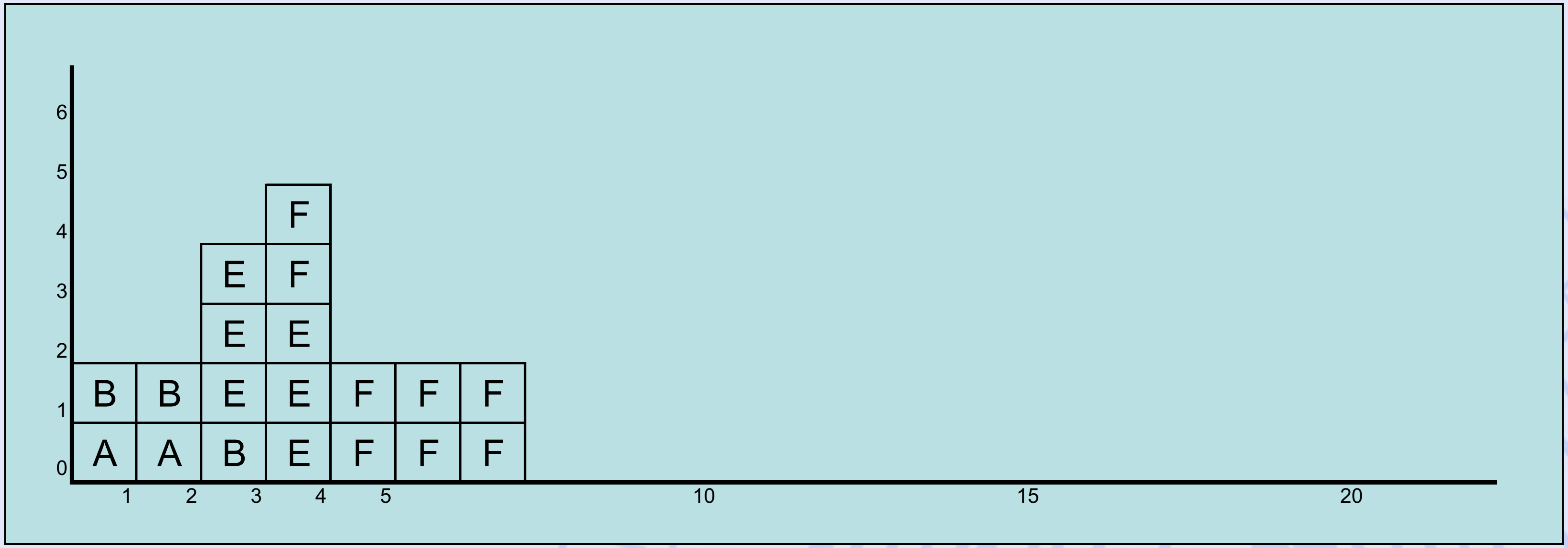
- Tâche E :
  - Durée : 2 mois,
  - Au plus tôt 2 mois après le début des travaux,
  - 3 équipes d'ouvriers.

Courbe de charge



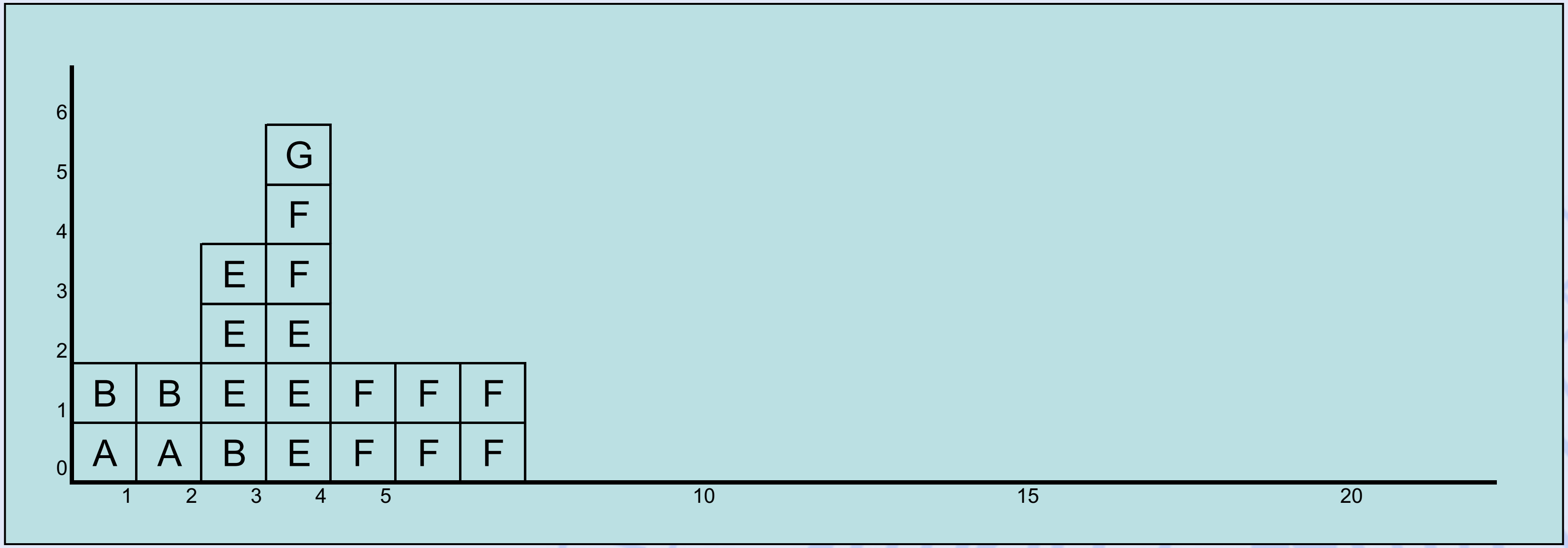
- Tâche F :
  - Durée : 4 mois,
  - Au plus tôt 3 mois après le début des travaux,
  - 2 équipes d’ouvriers.

Courbe de charge



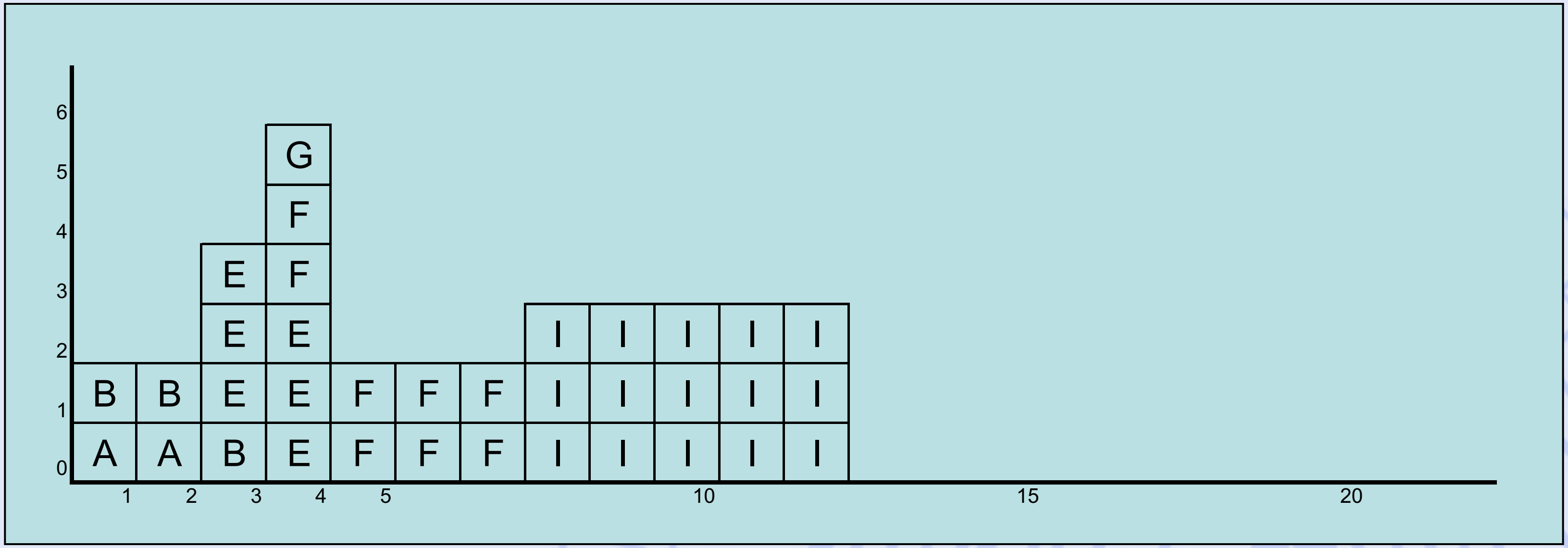
- Tâche G :
  - Durée : 1 mois,
  - Au plus tôt 3 mois après le début des travaux,
  - 1 équipe d'ouvriers.

Courbe de charge



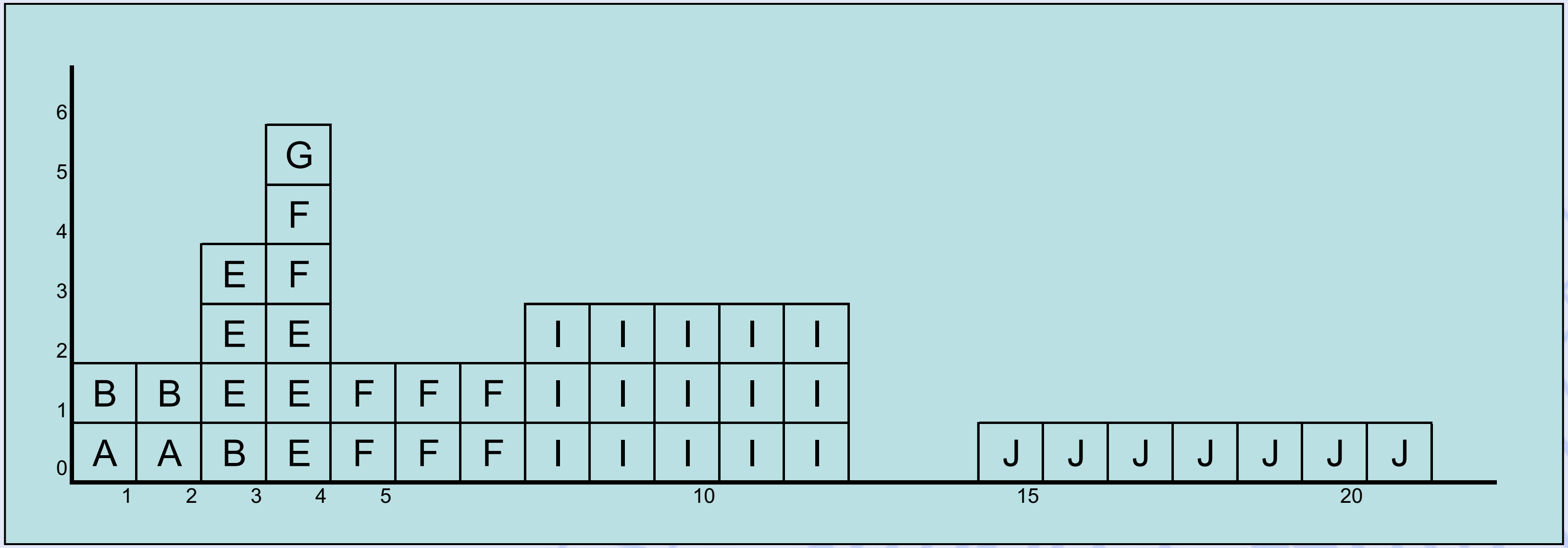
- Tâche I :
  - Durée : 5 mois,
  - Au plus tôt 7 mois après le début des travaux,
  - 3 équipes d'ouvriers.

Courbe de charge



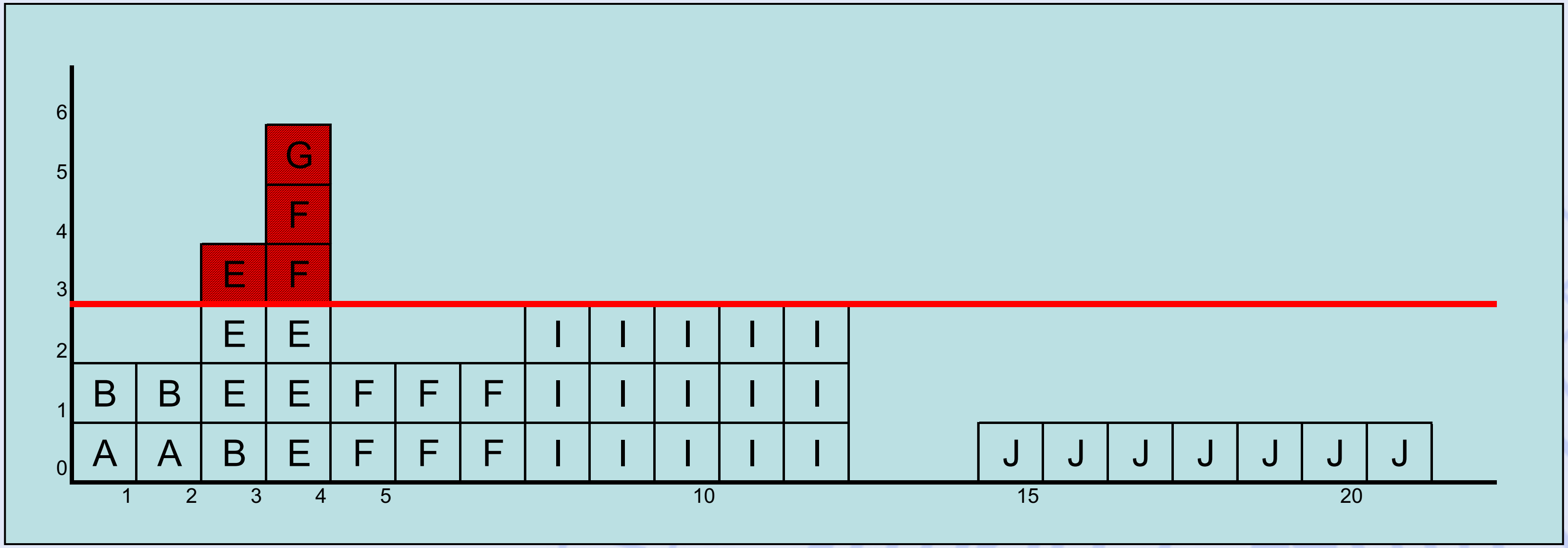
- Tâche J :
  - Durée : 7 mois,
  - Au plus tôt 14 mois après le début des travaux,
  - 1 équipe d’ouvriers.

Courbe de charge



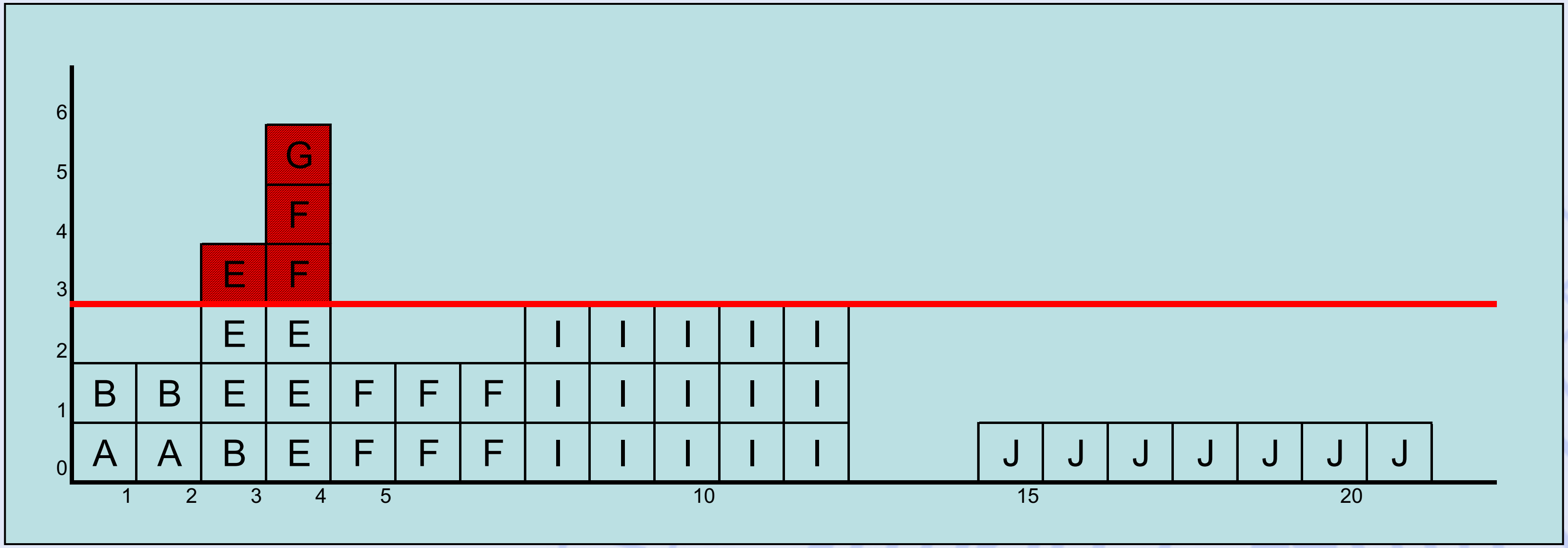
- Courbe de charge peu équilibrée :
  - De 0 à 6 équipes par mois !

Courbe de charge



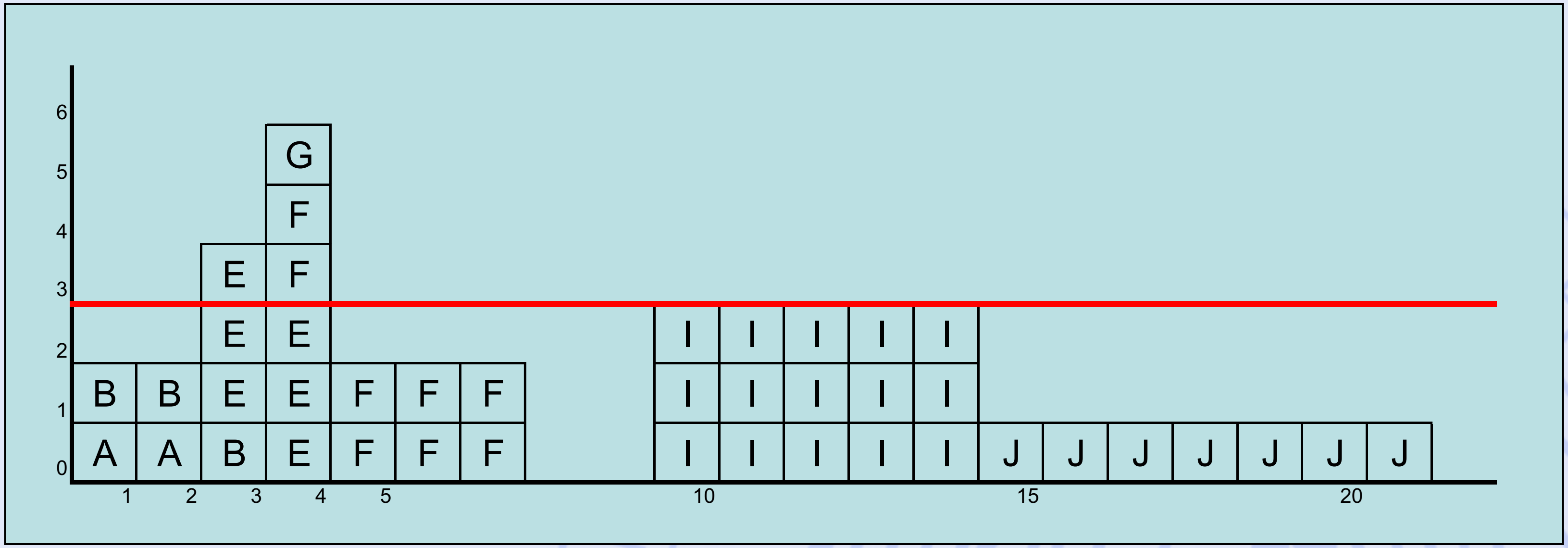
- Contrainte cumulative non respectée :
  - Plus de 3 équipes pendant 2 mois !

Lissage manuel



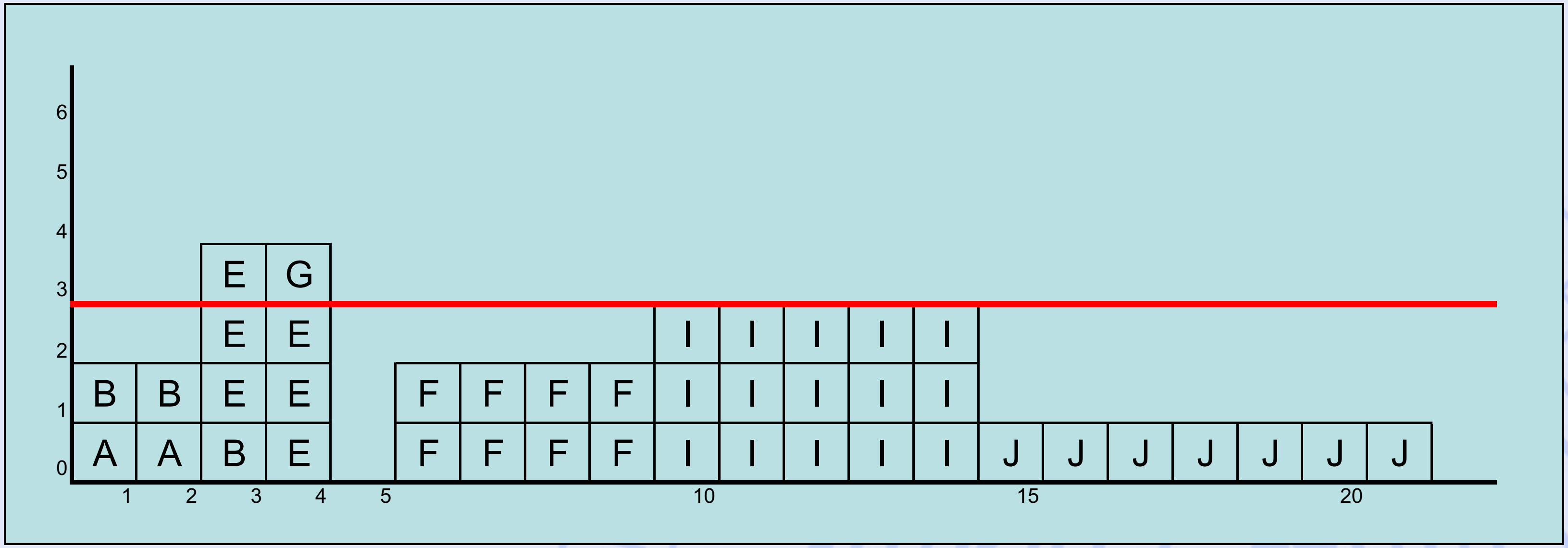
- Reculer la tâche I de 2 mois.

Lissage manuel



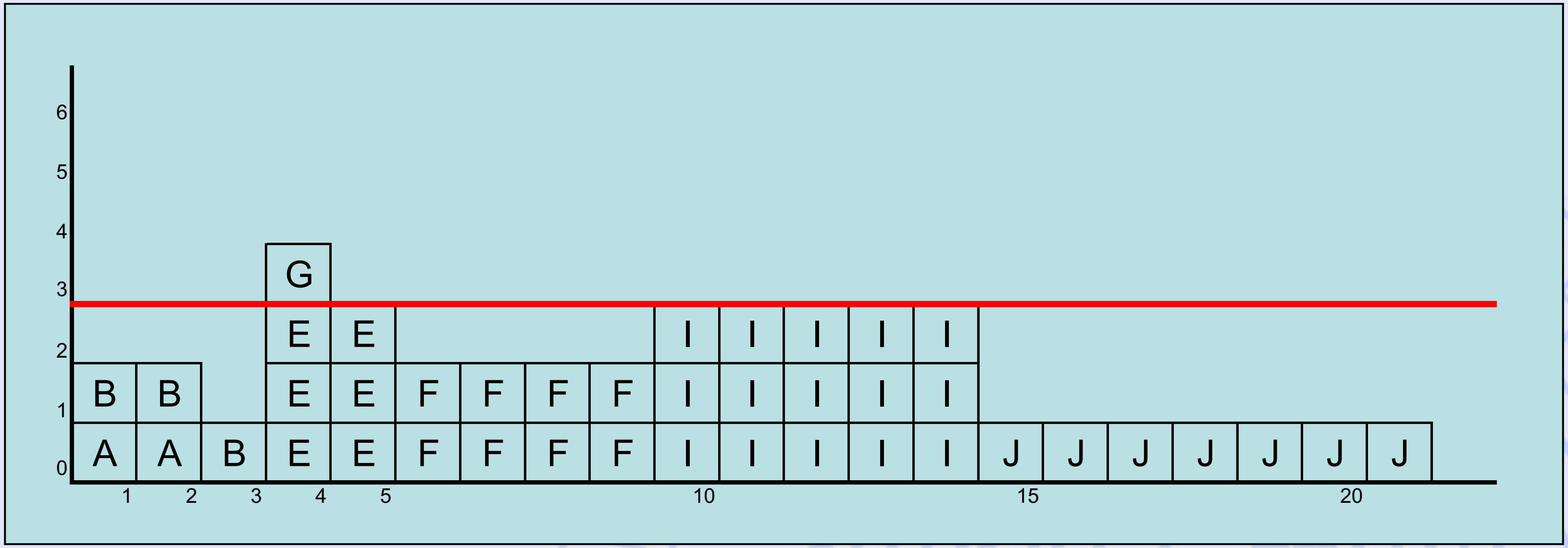
- Reculer la tâche F de 2 mois.

Lissage manuel



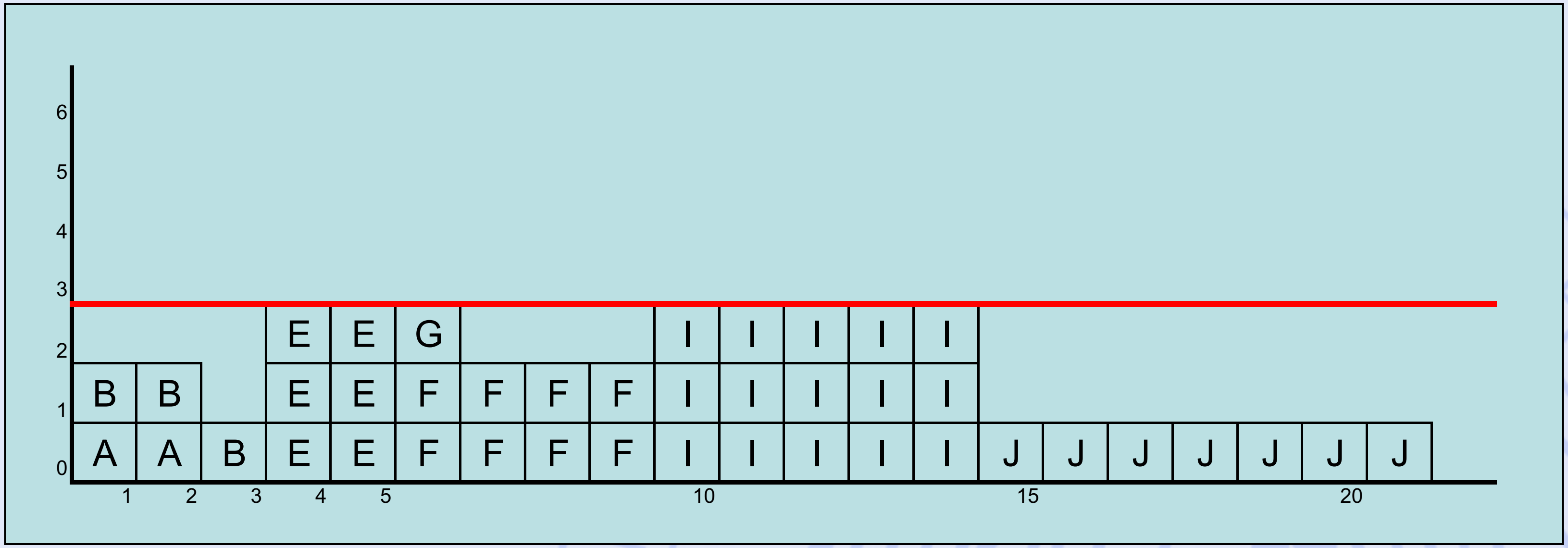
- Reculer la tâche E de 1 mois.

Lissage manuel



- Reculer la tâche G de 2 mois.

Lissage manuel



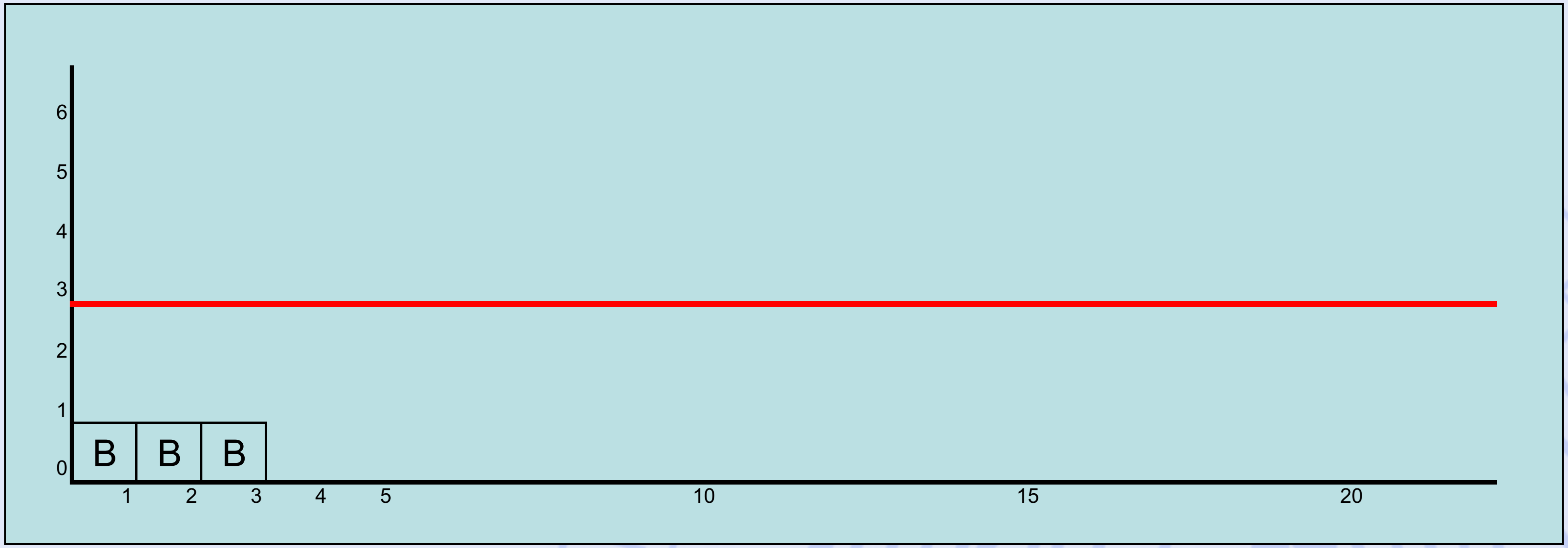
- Contrainte respectée.
- En 21 mois malgré tout (coup de chance) !
- Approche systématique ?

Algorithme MILORD

- Ranger les tâches par ordre croissant de leur date de début au plus tard. Départager les ex-aequo par leur marge libre.
- Placer successivement les tâches au plus tôt, en tenant compte des contraintes.

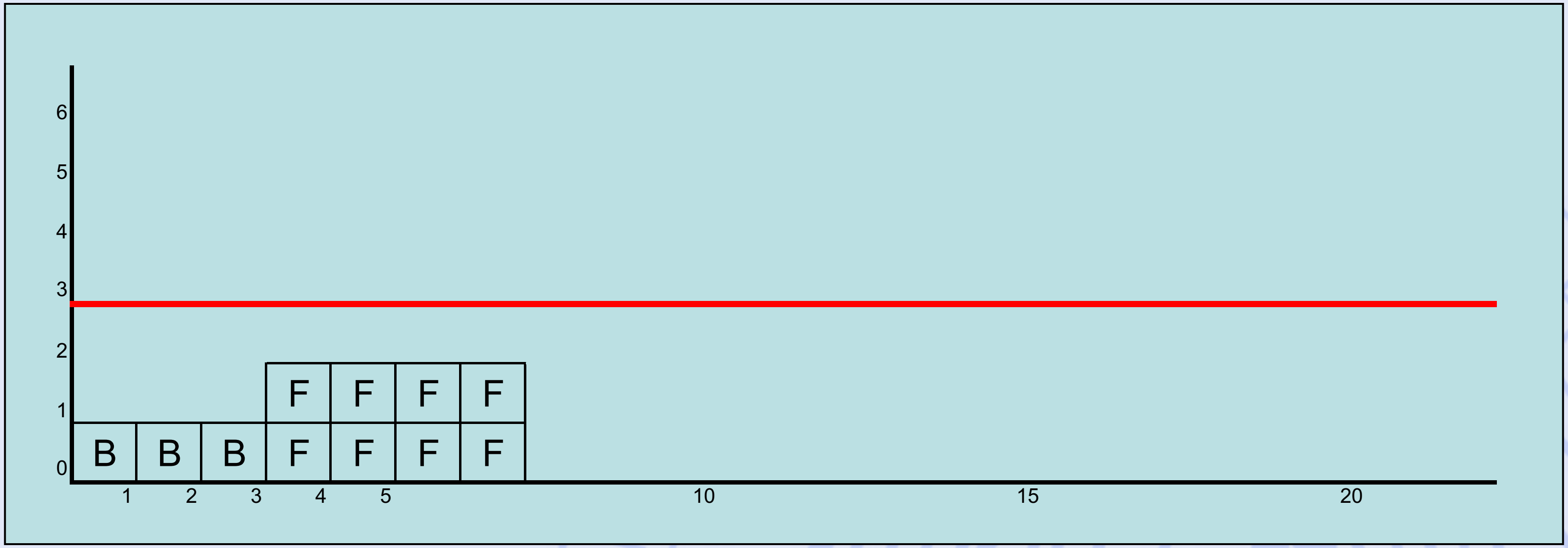
	D	H	B	C	F	A	G	J	E	I
LS	0	6	9	9	12	12	13	14	14	16
ML	0	0	0	9	0	0	10	0	3	9
ES	0	6	0	0	3	0	3	14	2	7

MILORD



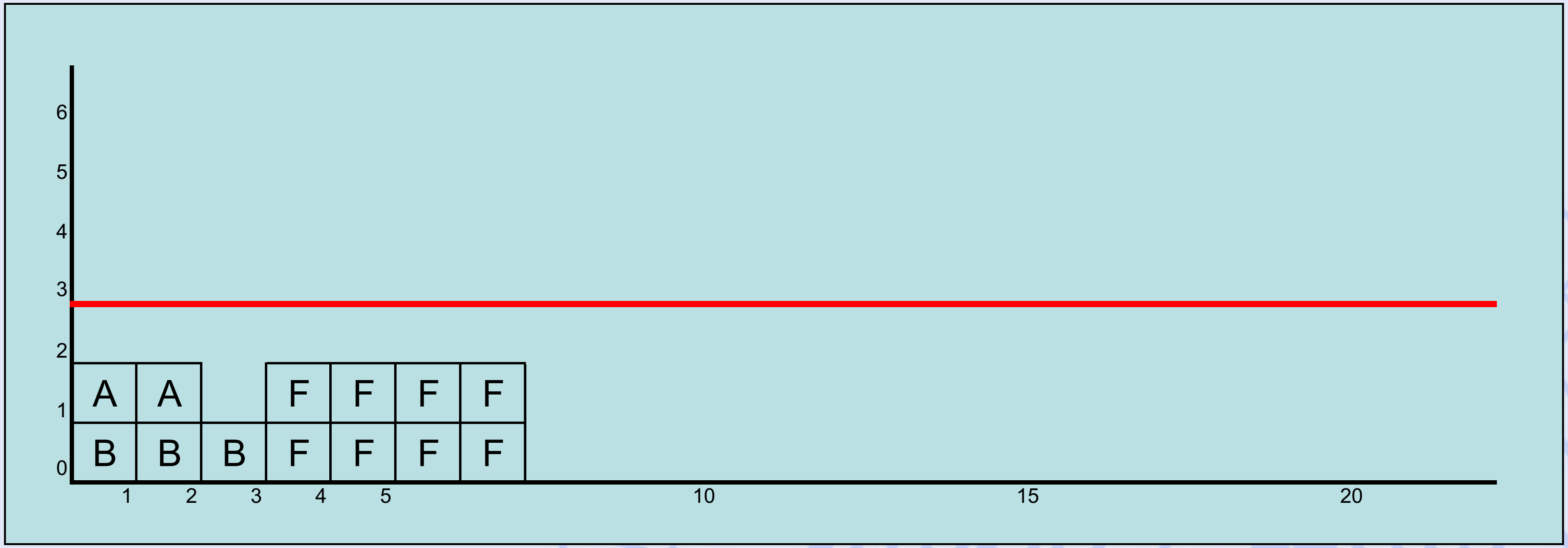
- Placer la tâche F (ES = 3).

MILORD



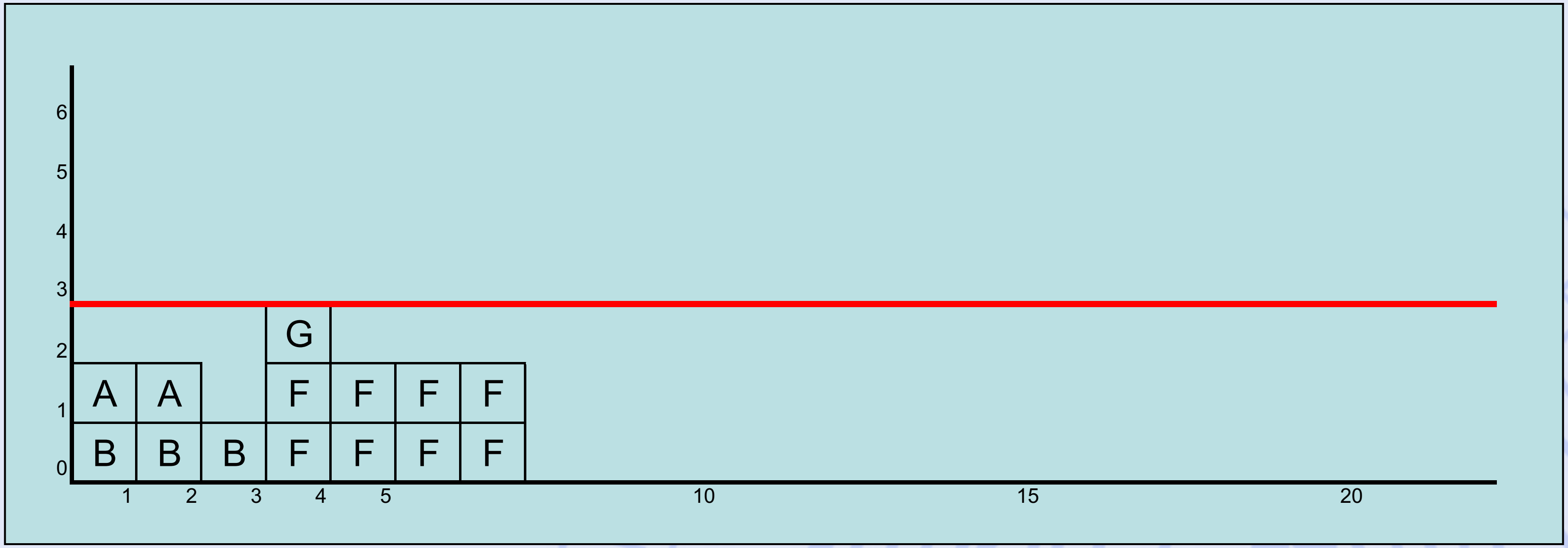
- Placer la tâche A (ES = 0).

MILORD



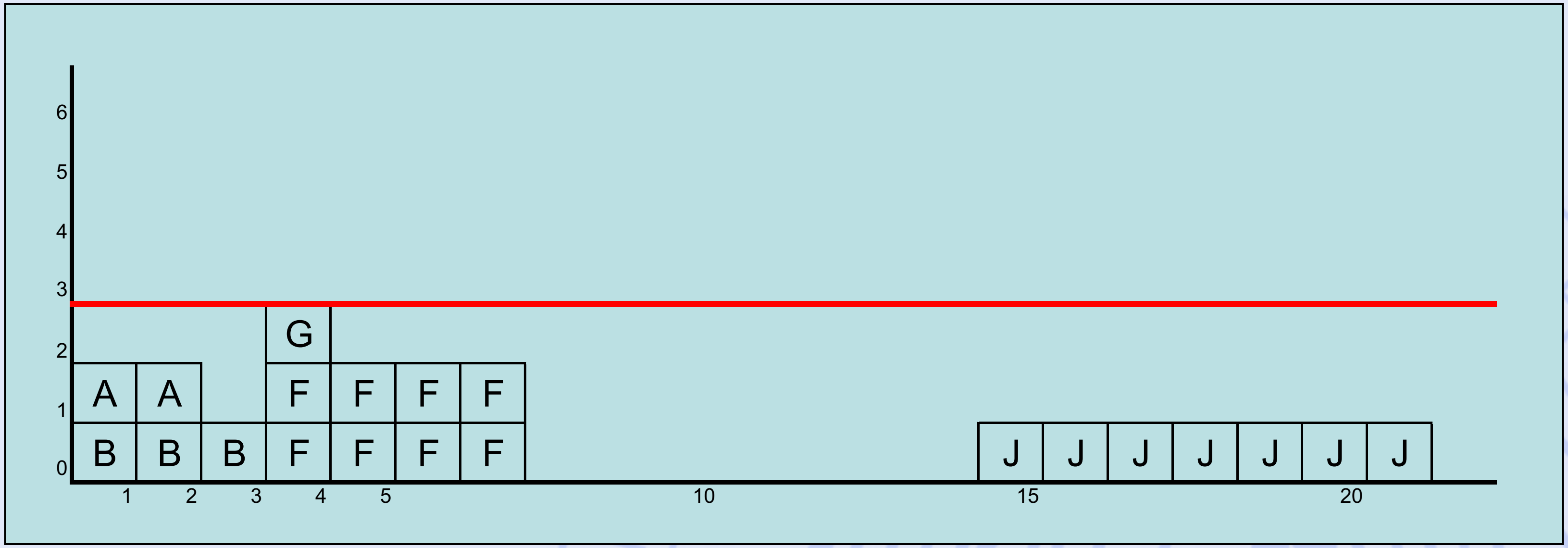
- Placer la tâche G (ES = 3).

MILORD



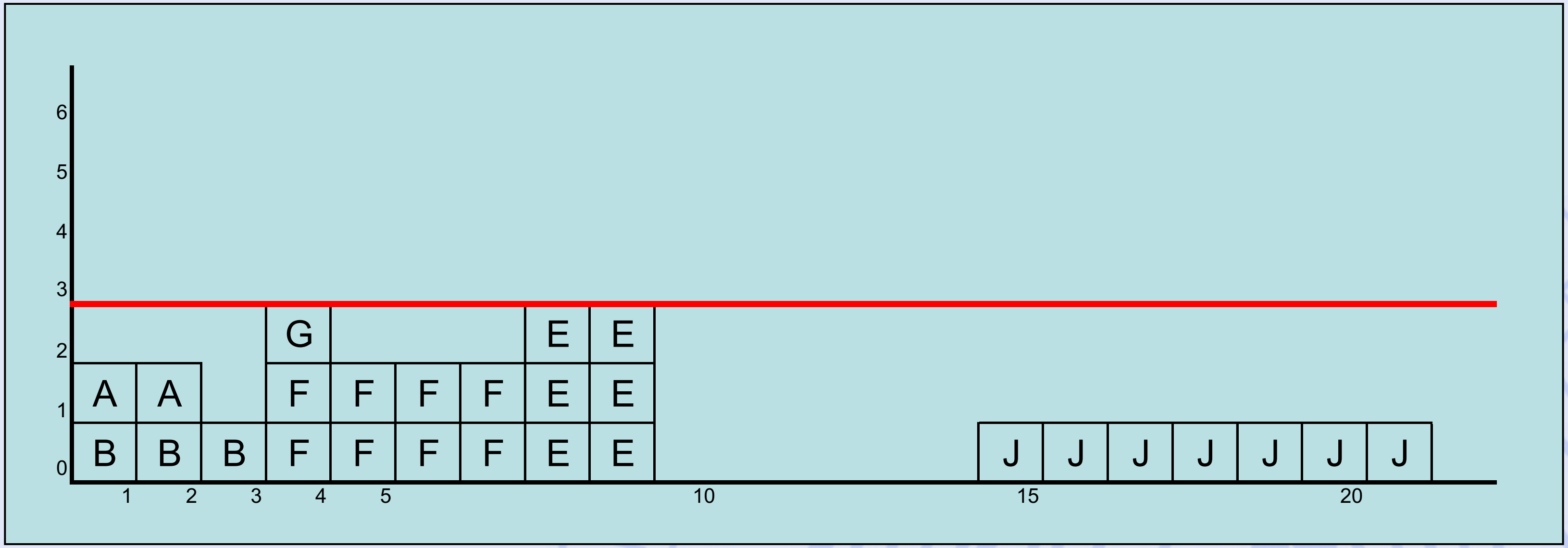
- Placer la tâche J (ES = 14).

MILORD



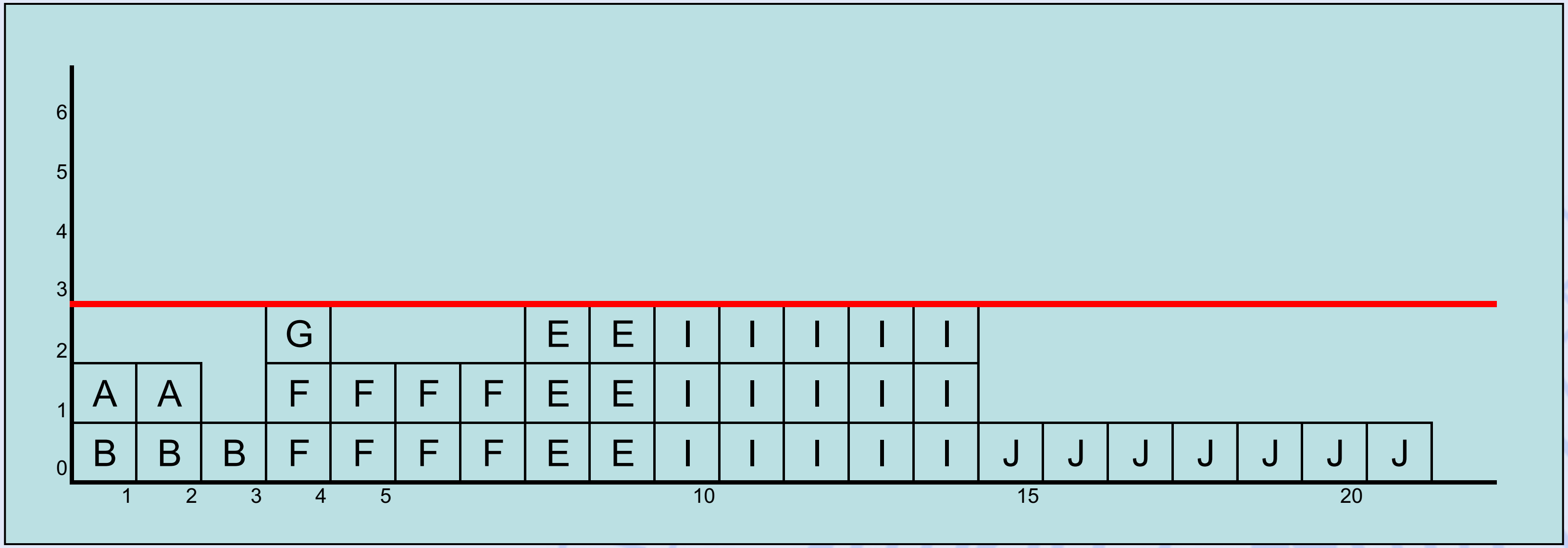
- Placer la tâche E (ES = 2).
- Reculée jusqu'en 7 !

MILORD



- Placer la tâche I (ES = 7).
- Reculée jusqu'en 9 !
- Tout juste…

MILORD


6
5
4
3
2
1
0
G
E E I I I I I
A A F F F F E E I I I I I
B B B F F F F E E I I I I I J J J J J J J
1 2 3 4 5 10 15 20

- Fin...

Variantes

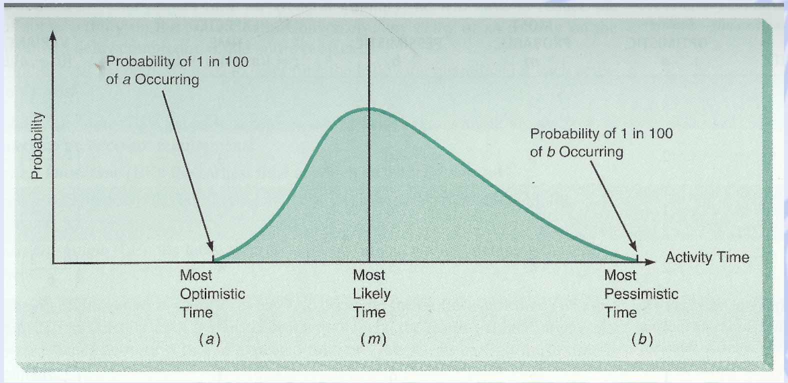
- Méthode des potentiels :
  - Autre mise en graphe : sommets = tâches.
- Méthode PERT :
  - Incertitude sur la durée de réalisation des tâches.
- Prise en compte du coût vs durée de réalisation des tâches.

PERT – Durées des tâches

- Incertitude.
- Distribution de probabilité basée sur 3 estimations (pour chaque tâche):
  - Optimiste (a): durée si tout va pour le mieux, peu vraisemblable (prob ≈ 1%).
  - Pessimiste (b): durée si tout va au plus mal, peu vraisemblable (prob ≈ 1%).
  - Vraisemblable (m): durée de réalisation la plus vraisemblable.

Distribution Beta

- Hypothèse appropriée dans bcp de cas.



- Durée moyenne :

$$t = \frac{a + 4m + b}{6}$$

- Variance :

$$\text{var} = \left(\frac{b - a}{6} \right)^2$$

Exemple 2 - PERT

Tâche	a	m	b	t	var
A	1	2	3	2	1/9
B				3	
C	3	5	7	5	
D	**5**	**5,5**	**9**	**6**	**4/9**
E				2	
F				4	
G				1	
H	**2**	**9**	**10**	**8**	**16/9**
I				5	
J	**6**	**7**	**8**	**7**	**1/9**

Exemple 2 - PERT

- Chemin critique :

  D – H – J

- Temps moyen :

  $T_{moyen} = 6 + 8 + 7 = 21$ mois

- Variance (hypothèse d'indépendance) :

  $Var(T) = 4/9 + 16/9 + 1/9 = 21/9 = 7/3$

- Ecart-type :

  Ec.-Type(T) = 1,5275...

Exemple 2 - PERT

- Approximation : distribution normale de T
- Prob (T > 21 mois) = 0,5
- Prob (T > 21 + 1,645 x 1,5275 = 23,5 mois) = 0,05
- Prob (T > 21 + 2,326 x 1,5275 = 24,6 mois) = 0,01