METHODES QUANTITATIVES DE GESTION

Bertrand Mareschal

bmaresc@ulb.ac.be

https://bertrand.mareschal.web.ulb.be/stat-d-206.html

2001…

John Nash
Nobel
d'Economie
1994

Plan du cours

1. Introduction
   - Historique, modélisation
2. Aide multicritère à la décision
   - Choix social
   - Méthodes PROMETHEE et GAIA
3. Quelques problèmes de la théorie des graphes
   - Définitions, terminologie
   - Chemins les plus courts et les plus longs
4. Gestion de projet (ordonnancement)
   - Méthode du chemin critique
   - Contraintes cumulatives
   - Méthode PERT

En pratique…

- Organisation du cours :
  - Théorie
  - Travaux pratiques (Luc Pirau)
- Evaluation :
  - Examen écrit :
    - Partie théorique (sans notes)
    - Partie pratique (avec notes)
  - Travail personnel :
    - Aide à la decision (PROMETHEE et GAIA)

Travail d'aide à la décision

- Travail individuel.
- Elaborer un problème de décision : min. 8 actions, 5 critères et 2 scénarios.
- Modéliser le problème avec PROMETHEE.
- Analyser le problème avec Visual PROMETHEE:
  - Classements PROMETHEE.
  - Analyse GAIA.
  - Analyse de sensibilité:
    - Poids des critères.
    - Différents scénarios.
  - Bonus: catégories, groupes, clusters, …
- Rapport écrit à rentrer au plus tard le jour de l'examen.

Calendrier 2022

- 01 – 21/09 : théorie
- 02 - ~~28/09 : théorie~~
- 03 - 05/10 : théorie
- 04 - 12/10 : ~~travaux pratiques~~ théorie
- 05 - 19/10 : théorie
- 06 - 26/10 : théorie
- 07 - 09/11 : travaux pratiques
- 08 - 16/11 : travaux pratiques
- 09 - 23/11 : travaux pratiques
- 10 - 30/11 : travaux pratiques
- 11 - 07/12 : présentations
- 12 - 14/12 : présentations

1. Introduction

- Contexte
- Historique
- Prise de décision
- Aide à la décision
- Modélisation
- Principaux outils
- Exemples d'applications

Contexte

- Augmentation de la taille et de la complexité des organisations.
- Division du travail, spécialisation, décentralisation des responsabilités et de la gestion.
- Nouveaux problèmes liés à la spécialisation :
  - Plus grande autonomie des départements au sein des organisations,
  - Manque de coordination,
  - Objectifs conflictuels,
  - Difficulté d'allouer des ressources limitées aux départements d'une façon globalement optimale.

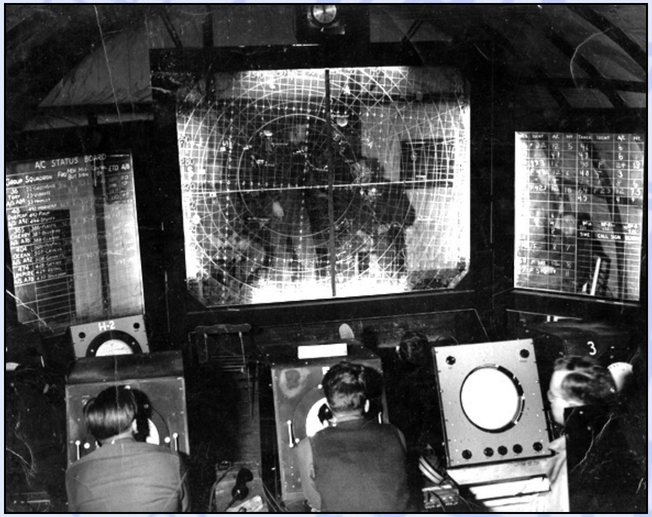

22
22
206

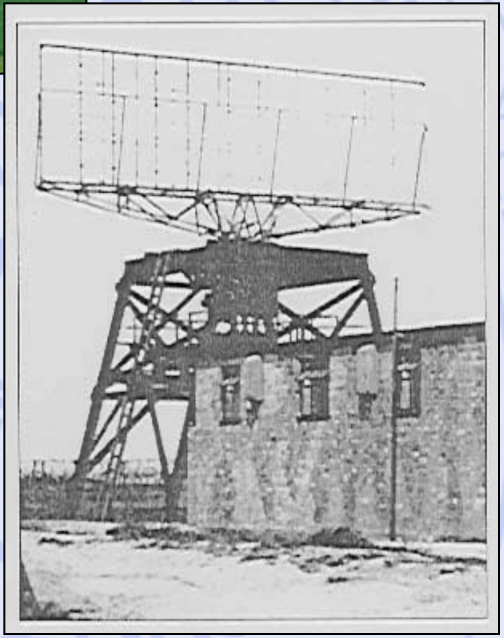
Historique
2ème guerre mondiale

- Allocation de ressources limitées aux opérations militaires.
- Idée : approche scientifique (UK - USA).
- “Research on Operations” par des équipes multidisciplinaires de scientifiques (Cf. “Blackett’s Circus”, UK).
- Grand succès : amélioration de l’efficacité des opérations militaires complexes
  - déploiement des radars en Angleterre,
  - determination de la taille des convois,
  - logistique …

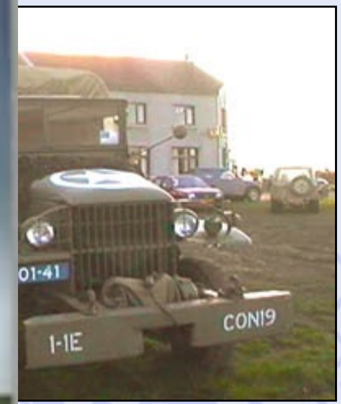
Déploiement des radars

Déploiement des radars





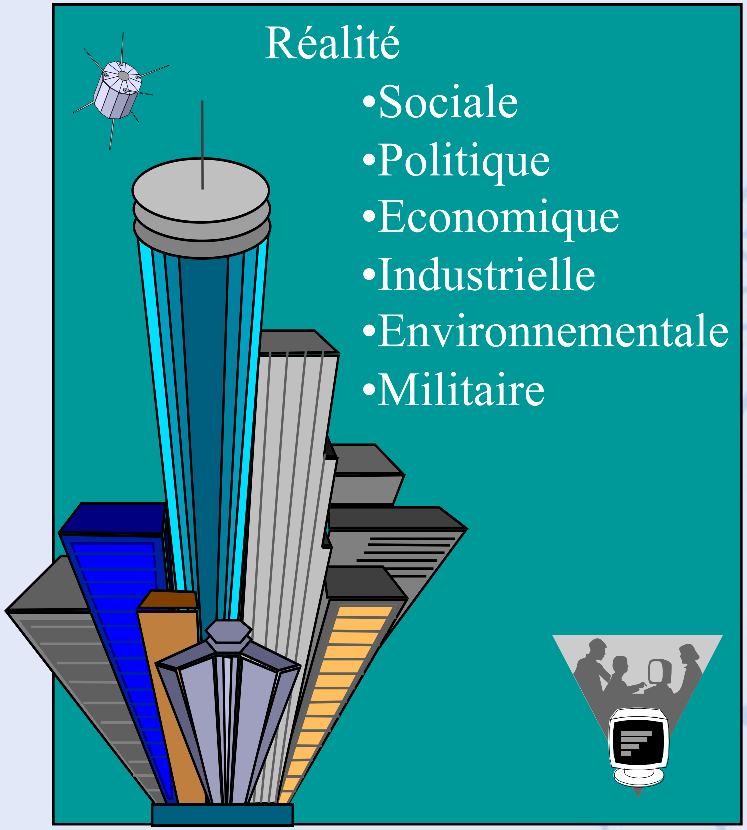
Protection des convois


01-41
1-1E
CON19

Historique
Après-guerre

- Succès des applications militaires.
- Intérêt marqué des entreprises pour la RO.
- Applications civiles, d'abord dans les grandes entreprises industrielles :
  - Ex: industrie pétrolière - programmation linéaire pour la gestion de la production
- Plus tard, resultats utilisés (à moindre coût) par des organisations plus petites.
- Facteur clé : développement de l'informatique.

Prise de Décision

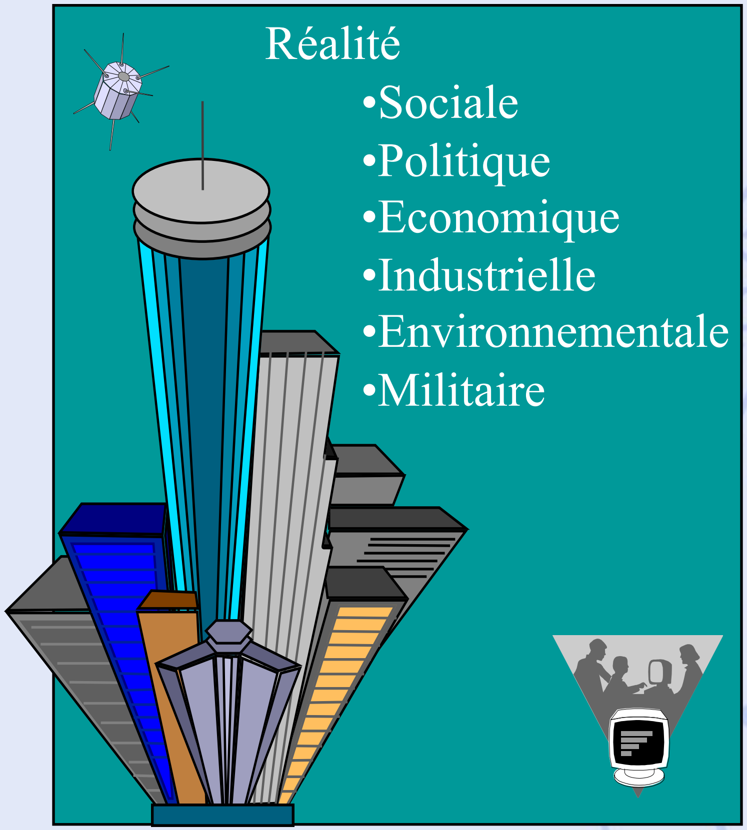


- Décrire la Réalité,
- Comprendre la Réalité,
- Gérer la Réalité.

2 Approches :

- Approche Qualitative,
- <u>Approche Quantitative</u>.

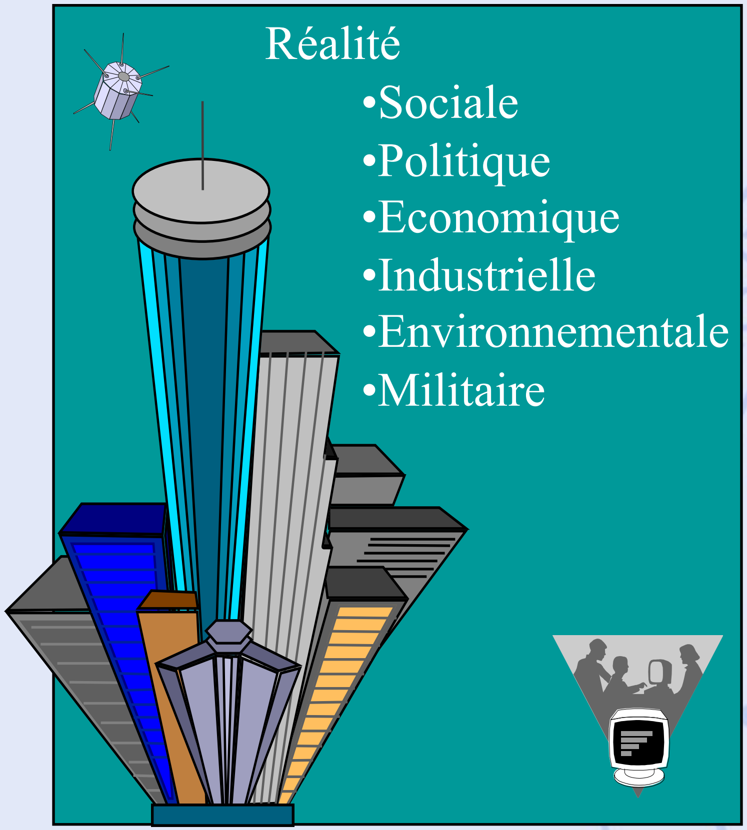
Aide à la Décision



<u>Modèle quantitatif</u>

- Décisions possibles ?
- Comment les comparer ?
- Préférences, Objectifs ?

Aide à la Décision



Modèle quantitatif

- Approximation de la réalité !

➢ Aide à la décision.

Quelques techniques

- **Statistique**
- Programmation mathématique (optimisation)
- **Aide à la décision de type multicritère (MCDA)**
- Simulation
- **PERT/CPM**
- Gestion des stocks et de la production
- Réseaux (transport)
- Fiabilité des équipements

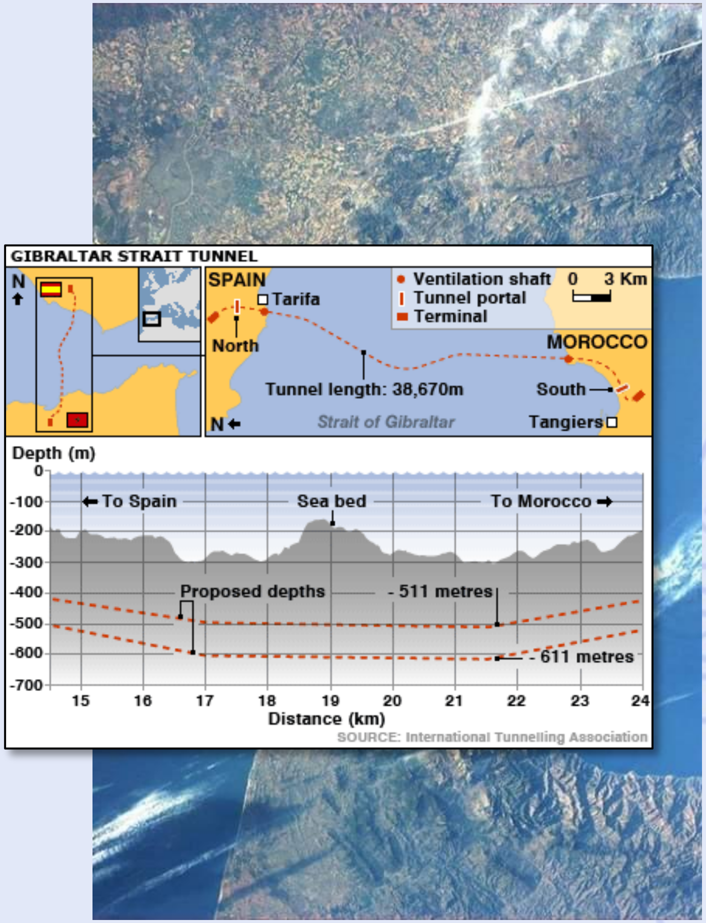
Plan du cours

1. Introduction
   - Historique, modélisation
2. Aide multicritère à la décision
   - Choix social
   - Méthodes PROMETHEE et GAIA
3. Quelques problèmes de la théorie des graphes
   - Définitions, terminologie
   - Chemins les plus courts et les plus longs
4. Gestion de projet (ordonnancement)
   - Méthode du chemin critique
   - Contraintes cumulatives
   - Méthode PERT

Un tunnel entre l'Espagne et le Maroc ?

- **Pas-de-Calais :**
  - 33,3 km
- **Détroit de Gibraltar :**
  - 14,4 km

Un tunnel entre l’Espagne et le Maroc ?



- D’où (MA) ?
- A où (ES) ?
- Par où ?

- Différents tracés possibles.
- Lequel choisir ?

Un tunnel entre l'Espagne et le Maroc ?

- Meilleur tracé ?
  - Coût
  - Vitesse commerciale
  - Retombées économiques
  - Impacts sociaux (expropriations, bruit, emplois, ...)
  - Impacts environnementaux (paysage, faune, ...)

➢ Lequel choisir ?

Un tunnel entre l'Espagne et le Maroc ?

- Un problème multicritère
- Et multi-acteurs :
  - Pouvoirs publics (MA et ES)
  - ONCF
  - Renfe
  - Opérateurs (transport)
  - Industries
  - Populations
  - ONGs et experts
- ➢ Un problème difficile !

Un tunnel entre l'Espagne et le Maroc ?

- Comment résoudre le problème ?
- Recherche d'un compromis.
- Recherche d'un consensus.

➢ Aide à la décision de type multicritère.

Quelques Problèmes de Décision et d'Evaluation

- Définir le tracé d'un tunnel, d'une LGV, ...
- Choisir le site d'implantation d'une nouvelle usine, d'un magasin, ...
- Engager du personnel, GRH.
- Acheter du matériel.
- Evaluer des projets (R&D).
- Choisir une stratégie d'investissement.

Modèle Multicritère vs Unicritère

- Modèle unicritère :

$$\boxed{\text{Optimiser}\left\{ g(a) \middle| a \in A \right\}}$$

  - Mathématiquement bien posé :
    - Notion de solution optimale,
    - Classement complet des actions.
  - Humainement mal posé :
    - Un seul critère ? Peu réaliste.
    - Notion de critère : seuils de perception, …

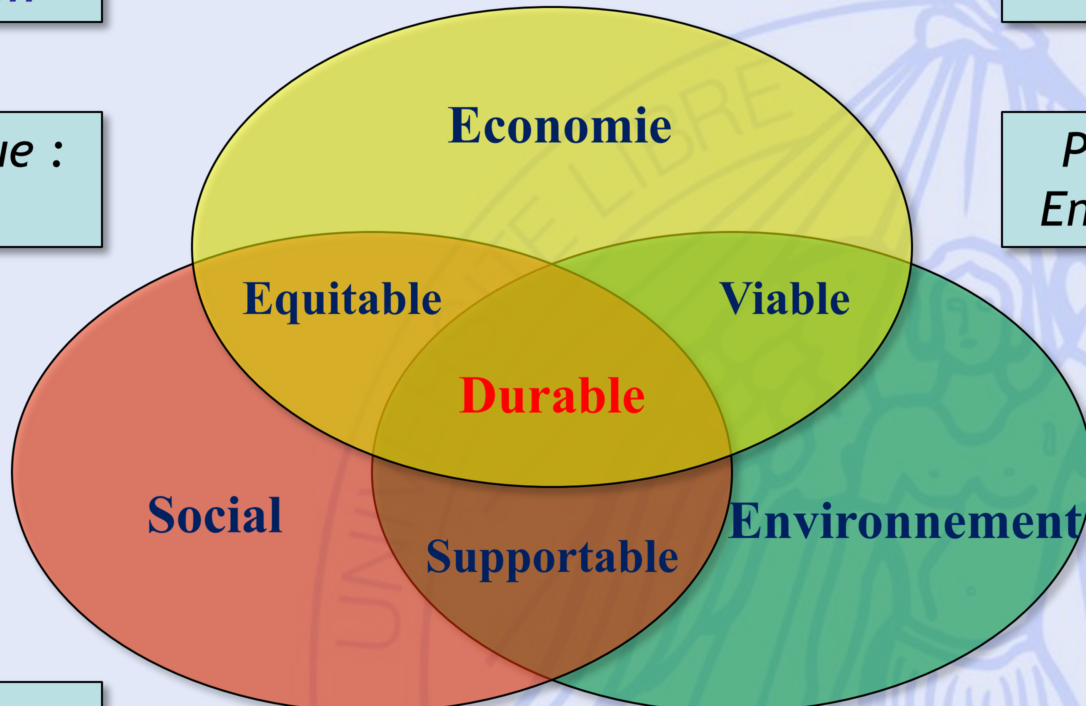
MCDA vs Optimisation

Optimisation

Critère unique : Profit

Vue myope

Crise



MCDA

Profit, Social, Environnement,

Décisions Durables

Modèle Multicritère vs Unicritère

- Modèle multicritère (MCDA) :

$$\boxed{\text{Optimiser}\left\{g_1(a), g_2(a), \ldots, g_k(a) \middle| a \in A\right\}}$$

  - Mathématiquement mal posé :
    - Pas de solution optimale,
    - Pas de sens mathématique.
  - Humainement bien posé :
    - Plus proche du problème de décision réel,
    - Recherche d'une solution de compromis.

Tableau Multicritère

- Actions :
  - décisions possibles,
  - items à évaluer.
- Critères :
  - quantitatifs,
  - qualitatifs.

Tableau Multicritère

Action 1 Action 2 Action 3 Action 4 Action 5 …	

Tableau Multicritère

	Crit. 1 (unité)	Crit. 2 (unité)	Crit. 3 (unité)	Crit. 4 (unité)	…
Action 1					
Action 2					
Action 3					
Action 4					
Action 5					
…					

Tableau Multicritère

	Crit. 1 (/20)	Crit. 2 (cote)	Crit. 3 (appréc.)	Crit. 4 (O/N)	…
Action 1	18	135	B	Oui	…
Action 2	9	147	M	Oui	…
Action 3	15	129	TB	Non	…
Action 4	12	146	TM	?	…
Action 5	7	121	B	Oui	…
…	…	…	…	…	…

Localisation d'une Usine

	Investissement (MEUR)	Coûts (kEUR)	Environn. (estimation)	…
Site 1	18	135	B	…
Site 2	9	147	M	…
Site 3	15	129	TB	…
Site 4	12	146	TM	…
Site 5	7	121	B	…
…	…	…	…	…

Possibilité d'Achats

	Prix (kEUR)	Fiabilité (jours)	Maintenance (estimation)	…
Produit A	18	135	B	…
Produit B	9	147	M	…
Produit C	15	129	TB	…
Produit D	12	146	TM	…
Produit E	7	121	B	…
…	…	…	…	…

Un Exemple

Achat d'une automobile

Objectifs :

- Economie à l'achat (prix),
- Economie à l'usage (consommation),
- Performances (puissance),
- Confort,
- Habitabilité.

Tableau Multicritère

Marque	Prix	Puissance	Consomm.	Habitabilité	Confort
Moyenne A	26000	75	8,0	3	3
Sport	29000	110	9,0	1	2
Moyenne B	25500	85	7,0	4	3
Luxe 1	38000	90	8,5	4	5
Economic	15000	50	7,5	2	1
Luxe 2	35000	85	9,0	5	4

- Quel est le meilleur achat ?

1:	*TM*
2:	*M*
3:	*Mo*
4:	*B*
5:	*TB*

Tableau Multicritère

Marque	Prix	Puissance	Consomm.	Habitabilité	Confort
Moyenne A	26000	75	8,0	3	3
Sport	29000	**110**	9,0	1	2
Moyenne B	25500	85	**7,0**	4	3
Luxe 1	38000	90	8,5	4	**5**
Economic	**15000**	50	7,5	2	1
Luxe 2	35000	85	9,0	**5**	4

- Quel est le meilleur achat ?

Tableau Multicritère

Marque	Prix	Puissance	Consomm.	Habitabilité	Confort
Moyenne A	26000	75	8,0	3	3
Sport	29000	**110**	9,0	1	2
Moyenne B	25500	85	**7,0**	4	3
Luxe 1	38000	90	8,5	4	**5**
Economic	**15000**	50	7,5	2	1
Luxe 2	35000	85	9,0	**5**	4

- Quel est le meilleur achat ?
- Quel est le meilleur compromis ?

Tableau Multicritère

Marque	Prix	Puissance	Consomm.	Habitabilité	Confort
Moyenne A	26000	75	8,0	3	3
Sport	29000	**110**	9,0	1	2
Moyenne B	25500	85	**7,0**	4	3
Luxe 1	38000	90	8,5	4	**5**
Economic	**15000**	50	7,5	2	1
Luxe 2	35000	85	9,0	**5**	4

- Quel est le meilleur achat ?
- Quel est le meilleur compromis ?
- Quelles sont les priorités de l’acheteur ?

Théorie du choix social

- Problème :
  - Un groupe de personnes doivent choisir un candidat parmi plusieurs (élection).
  - Chaque personne (électeur) classe les candidats par ordre de préférence.
  - Quel candidat doit être élu ?
- Quelle est la « meilleure » procédure de vote ?
- Analogie avec les modèles multicritères :
  - Candidats $\leftrightarrow$ actions,
  - Electeurs $\leftrightarrow$ critères.

5 procédures…
… parmi d'autres…

1. Majorité relative.
2. Condorcet.
3. Scrutin à 2 tours (présidentielle).
4. Borda.
5. Eliminations successives.

Procédure 1 : Majorité relative

3 candidats: **A**lbert, **B**runo, **C**laire

30 votants:

11 votants	**10** votants	**9** votants
A	B	C
B	C	B
C	A	A

A	11
B	10
C	9

Albert est élu

Procédure 1 : Majorité relative

3 candidats: **A**lbert, **B**runo, **C**laire

30 votants:

11 votants	**10** votants	**9** votants
A	B	C
B	C	B
C	A	A

A	11
B	10
C	9

Albert est élu

Problème : B et C préférés à A par une majorité de votants !

Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat Marquis de Condorcet 1743 - 1794

Procédure 2 : Condorcet

3 candidats: **A**lbert, **B**runo, **C**laire

30 votants:

11 votants	**10** votants	**9** votants
A	B	C
B	C	B
C	A	A

B meilleur que **A**	19 votes
B meilleur que **C**	21 votes
C meilleur que **A**	19 votes

Bruno est élu

Procédure 2 : Paradoxe de Condorcet

3 candidats: **A**lbert, **B**runo, **C**laire

9 votants:

4 votants	**3** votants	**2** votants
A	B	C
B	C	A
C	A	B

A meilleur que **B**	6 votes
B meilleur que **C**	7 votes
C meilleur que **A**	5 votes

pas d'élu !

Procédure 3 : Scrutin à 2 tours (élection présidentielle française)

4 candidats: **A**lbert, **B**runo, **C**laire, **D**iane

63 votants:

22 votants	**21** votants	**20** votants
B	C	D
A	A	A
C	D	C
D	B	B

1er tour:	**B** et **C**
2ème tour:	**C** bat B (41 contre 22)

Claire est élue

Procédure 3 : Scrutin à 2 tours (élection présidentielle française)

4 candidats: **A**lbert**, B**runo**, C**laire, **D**iane

63 votants:

22 votants	**21** votants	**20** votants
B	C	D
A	A	A
C	D	C
D	B	B

Claire est élue **!!!**

...alors que

A meilleur que **C**	42 votes
A meilleur que **B**	41 votes
A meilleur que **D**	43 votes

Procédure 3 : scrutin à 2 tours (élection présidentielle française)

3 candidats: **A**lbert, **B**runo, **C**laire

17 votants:

5 votants	**6** votants	**4** votants	**2** votants
C	A	B	B
A	B	C	A
B	C	A	C

1er tour:	**A** et **B**
2ème tour:	**A** bat B (11 contre 6)

Albert est élu

Procédure 3 : scrutin à 2 tours (élection présidentielle française)

<u>3 candidats:</u> **A**lbert, **B**runo, **C**laire

17 votants:

5 votants	**6** votants	**4** votants	**2** votants
C	A	B	**A** ~~B~~
A	B	C	**B** ~~A~~
B	C	A	C

Albert était élu

1er tour:	**A** et **C**
2ème tour:	**C** bat A (9 contre 8)

Claire est élue !

Problème : non-monotonicité !

Jean Charles de Borda
1733 - 1799

Procédure 4 : Borda

31 x 2 + 39 x 1

3 candidats: **A**lbert, **B**runo, **C**laire
81 votants:

11 x 2 + 11 x 1

30 votants	**29** votants	**10** votants	**10** votants	**1** votant	**1** votant
A	C	C	B	A	B
C	A	B	A	B	C
B	B	A	C	C	A

Points	**Score**	
2	A	**101**
1	B	**33**
0	C	**109**

Claire est élue !

39 x 2 + 31 x 1

Procédure 4 : Borda

3 candidats: **A**lbert, **B**runo, **C**laire

81 votants:

30 votants	**29** votants	**10** votants	**10** votants	**1** votant	**1** votant
A	C	C	B	A	B
C	A	B	A	B	C
B	B	A	C	C	A

Points
2
1
0

Scores	
A	**101**
B	**33**
C	**109**

A meilleur que **C : 41** sur 81

Procédure 4 : Borda

4 candidats: **A**lbert, **B**runo, **C**laire, **D**iane

7 votants:

3 votants	**2** votants	**2** votants	**Points**
C	B	A	3
B	A	D	2
A	D	C	1
D	C	B	0

Scores	
A	13
B	12
C	11
D	6

Classement
A
B
C
D

Albert est élu

Procédure 4 : Borda

4 candidats: **A**lbert, **B**runo, **C**laire, ~~**D**iane~~

7 votants:

3 votants	**2** votants	**2** votants	**Points**
C	B	A	2
B	A	C	1
A	C	B	0

Scores	
A	6
B	7
C	8

Classement
C
B
A

Claire est élue

Borda
(manipulation)

3 candidats: **A**lbert, **B**runo, **C**laire

34 votants:

Les partisans de Bruno suscitent la candidature du candidat x (« candidat bidon »)

Scores	
A	46
B	36
C	20

Classement
A
B
C

Albert est élu

Borda (manipulation)

4 candidats: **A**lbert, **B**runo, **C**laire, **x**

34 votants:

12 votants	**12** votants	**10** votants	Points
A	B	C	3
B	x	A	2
C	A	B	1
x	C	x	0

Scores	
A	68
B	70
C	42
x	24

Classement
B
A
C
x

Bruno est élu!

Borda (manipulation)

4 candidats: **A**lbert, **B**runo, **C**laire, **x**

34 votants:

12 votants	**12** votants	**10** votants	**Points**
A	B	C	3
x	x	x	2
B	A	A	1
C	C	B	0

Scores	
A	58
B	48
C	30
x	68

Classement
X
A
B
C

Le candidat « bidon » est élu!

Procédure 5 : Eliminations successives

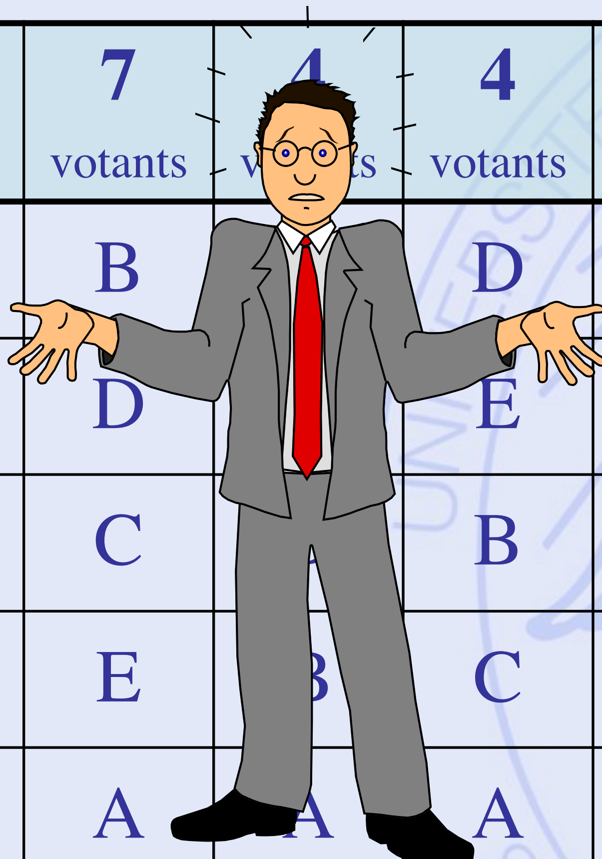
- Procédure par tours.
- Principe :
  Eliminer à chaque tour le moins bon candidat, jusqu'à ce qu'il n'en reste plus qu'un.

En conclusion ?

5 candidats: **A**lbert, **B**runo, **C**laire, **D**iane, **E**ric

25 votants:

8 votants	**7** votants	**4** votants	**4** votants	**2** votants
A	B	[illegible]	D	C
C	D	[illegible]	E	E
D	C	[illegible]	B	D
B	E	B	C	B
E	A	A	A	A



Majorité relative:
→ **Albert** est élu

Procédure française:
→ **Bruno** est élu

Procédure de Condorcet:
→ **Claire** est élue

Procédure de Borda:
→ **Diane** est élue

Eliminations successives:
→ **Eric** est élu

Kenneth Arrow (Nobel d'économie, 1972)

- Théorème d'impossibilité (1952) :
  Avec au moins 2 votants et 3 candidats, il est **impossible** de construire une procédure de vote satisfaisant simultanément les 5 propriétés suivantes :
  - Non-dictature.
  - Universalité.
  - Indépendance vis-à-vis des tiers.
  - Monotonicité.
  - Non-imposition.

Problématiques

	g_1	g_2	g_3	…
a	$g_1(a)$	$g_2(a)$	$g_3(a)$	…
b	$g_1(b)$	$g_2(b)$	$g_3(b)$	…
c	…			
…	…			

Evaluations

- n actions
- k critères

α - choix : déterminer un sous-ensemble d'actions (les « meilleures »).

β - tri : trier les actions dans des catégories pré-déterminées.

γ - classement : de la meilleure à la moins bonne action.

δ - description : décrire les actions et leurs conséquences.

Une Approche Courante :
La Somme Pondérée

Critères

Actions ou Décisions

	g_1	g_2	g_3	…
a	$g_1(a)$	$g_2(a)$	$g_3(a)$	…
b	$g_1(b)$	$g_2(b)$	$g_3(b)$	…
c	…			
…	…			
	w_1	w_2	w_3	…

Poids des critères

Une Approche Courante :
La Somme Pondérée

- Valeur globale de *a* :

  $V(a) = w_1\ g_1(a) + w_2\ g_2(a) + \ldots$

- *a* est meilleure que *b* si :

  $V(a) > V(b)$

  (en supposant que tous les critères soient à maximiser)

Somme Pondérée :
Exemple 1

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5
a	100	100	100	100	55
b	85	85	85	85	100
	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5

- V(a) = 91 V(b) = 88
- Compensation totale des points faibles par les points forts.

Somme Pondérée : Exemple 2

	g_1	g_2
a	100	0
b	0	100
c	50	50
d	50	50
	1/2	1/2

- V(a) = V(b) = V(c) = V(d) = 50
- Elimination des conflits.

Somme Pondérée : Exemple 3

"Le bénéfice est environ 2 fois plus important que le gain de temps;
0.7 pour le bénéfice et 0.3 pour le gain de temps.

	g_1 (BF)	g_2 (min)
a	60	60
b	48	70
	0.7	0.3

V(*a*) = 60
V(*b*) = 54.6

a est première.

Somme Pondérée : Exemple 3

"Le bénéfice est environ 2 fois plus important que le gain de temps; 0.7 pour le bénéfice et 0.3 pour le gain de temps.

	g_1 (FF)	g_2 (min)
a	10	60
b	8	70
	0.7	0.3

V(*a*) = 25
V(*b*) = 26.6

b est première.

Somme Pondérée : Exemple 3

	g_1 (BF)	g_2 (min)
a	60	60
b	48	70
	0.7	0.3

V(*a*) = 60
V(*b*) = 54.6

a est première.

	g_1 (FF)	g_2 (min)
a	10	60
b	8	70
	0.7	0.3

V(*a*) = 25
V(*b*) = 26.6

b est première.

→ <u>Signification des “poids”</u> ! ←

Méthodes d'Aide à la Décision

- Information supplémentaire :

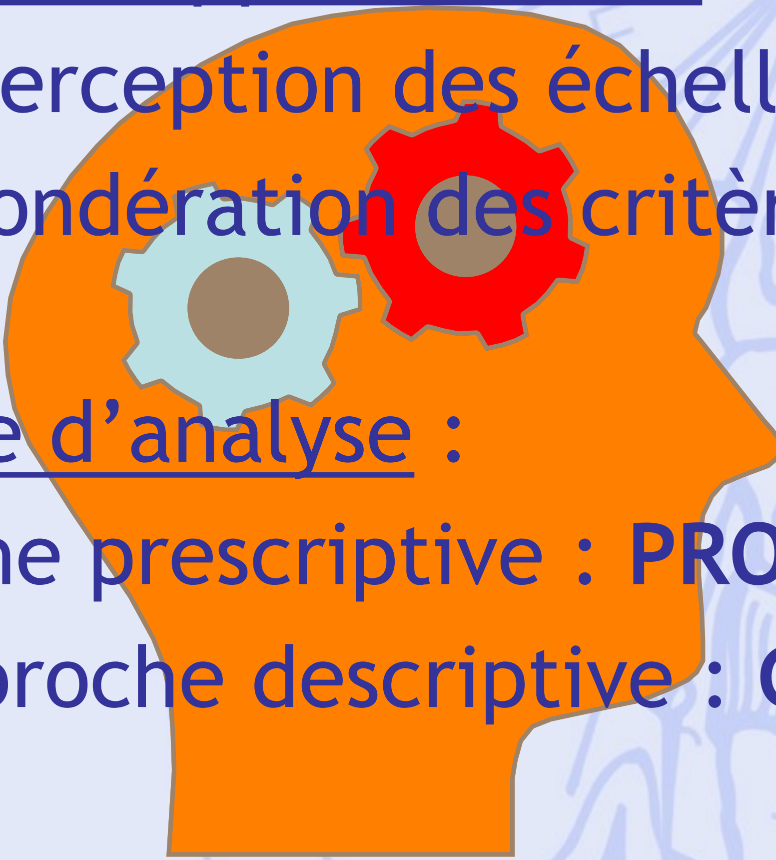
  Perception des échelles

  Pondération des critères

- Procédure d'analyse :

  Approche prescriptive : **PROMETHEE**

  Approche descriptive : **GAIA**

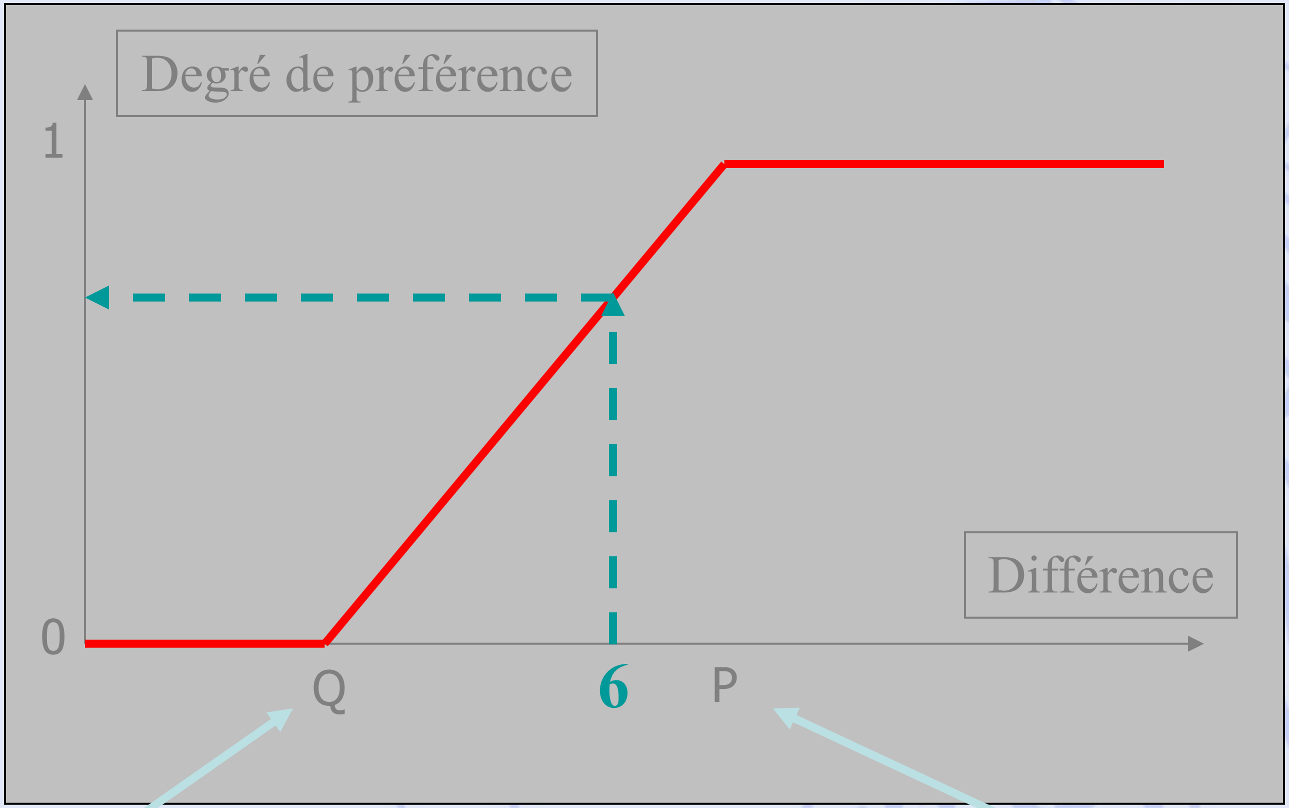


Comparaison de 2 Actions

	Crit. 1 (/20)	Crit. 2 (cote)	Crit. 3 (appréc.)	Crit. 4 (O/N)	…
Action 1	18	135	B	Oui	…
Action 2	9	147			…
Action 3	15	129	TB	Non	…
Action 4	12	146	TM	?	…
Action 5	7	121	B	Oui	…
…	…	…	…	…	…

Différence = 6

Fonctions de Préférence



Seuil d'indifférence

Linéaire

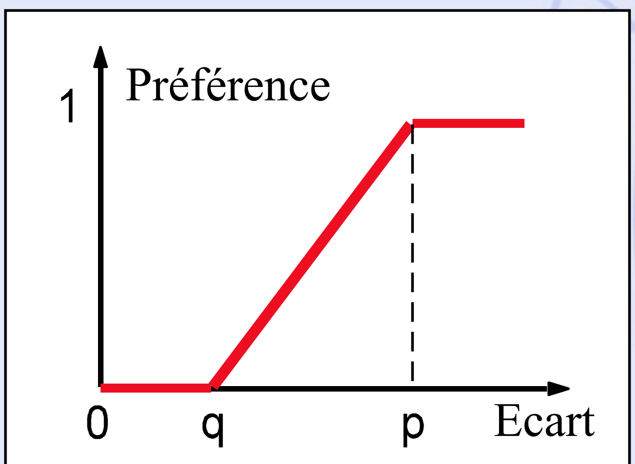
Seuil de préférence

PROMETHEE

	Economic		**Luxe 1**	
-230000	**250000**	*Prix*	480000	
	50	*Puissance*	**90**	**+40**
-1,0	**7,5**	*Consomm.*	8,5	
	2	*Habitabilité*	**4**	**+2**
	1	*Confort*	**5**	**+4**

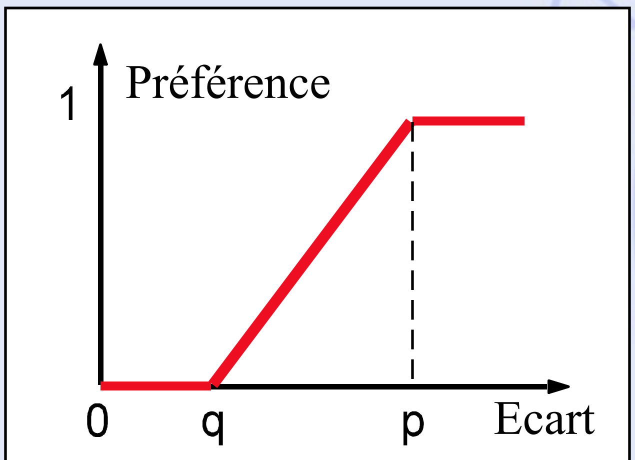
PROMETHEE

		Economic		Luxe 1		
1,0	**-230000**	250000	*Prix*	480000		
		50	*Puissance*	90	**+40**	**1,0**
0,5	**-1,0**	7,5	*Consomm.*	8,5		
		2	*Habitabilité*	4	**+2**	**0,5**
		1	*Confort*	5	**+4**	**1,0**



PROMETHEE

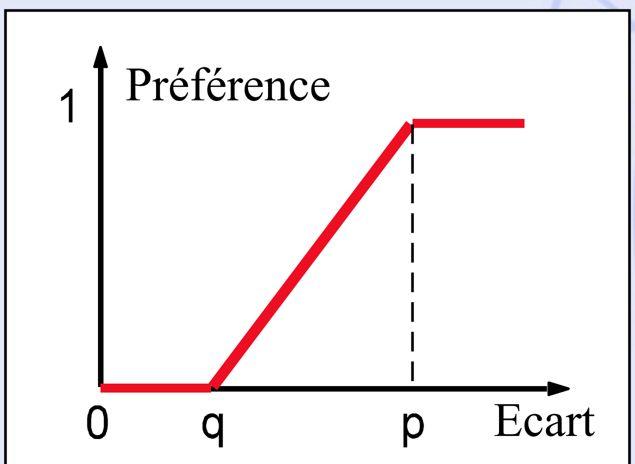
Préf (Eco.,Lux.)		Economic		Luxe 1		Préf (Lux.,Eco.)
1,0	**-230000**	250000	*Prix*	480000		0,0
0,0		50	*Puissance*	90	**+40**	**1,0**
0,5	**-1,0**	7,5	*Consomm.*	8,5		0,0
0,0		2	*Habitabilité*	4	**+2**	**0,5**
0,0		1	*Confort*	5	**+4**	**1,0**



PROMETHEE

Préf (Eco.,Lux.) **Préf (Lux.,Eco.)**

			Economic		Luxe 1				*Poids*
1,0		**-230000**	250000	*Prix*	480000			0,0	*1*
0,0			50	*Puissance*	90	**+40**		**1,0**	*1*
0,5		**-1,0**	7,5	*Consomm.*	8,5			0,0	*1*
0,0			2	*Habitabilité*	4	**+2**		**0,5**	*1*
0,0			1	*Confort*	5	**+4**		**1,0**	*1*



- Préf (Eco.,Lux.) = 0,3

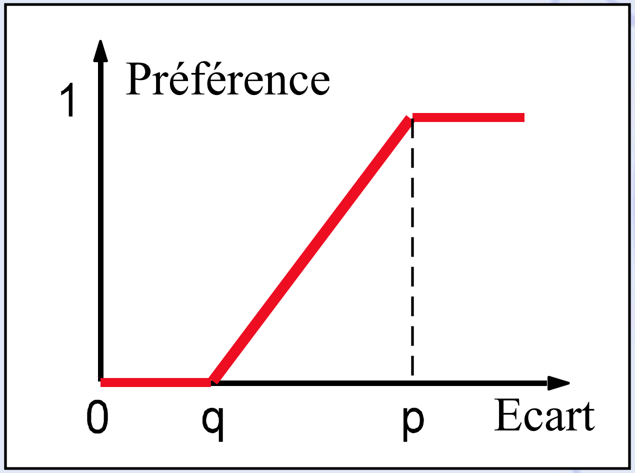
  = (1 + 0 + 0,5 + 0 + 0) / 5
- Préf (Lux.,Eco.) = 0,5

  = (0 + 1 + 0 + 0,5 + 1) / 5

PROMETHEE

Préf (Eco.,Lux.) **Préf (Lux.,Eco.)**

Préf (Eco.,Lux.)		Economic		Luxe 1		Préf (Lux.,Eco.)	*Poids*
1,0	**-230000**	250000	*Prix*	480000		0,0	*2*
0,0		50	*Puissance*	90	**+40**	**1,0**	*1*
0,5	**-1,0**	7,5	*Consomm.*	8,5		0,0	*2*
0,0		2	*Habitabilité*	4	**+2**	**0,5**	*1*
0,0		1	*Confort*	5	**+4**	**1,0**	*1*



- Préf (Eco.,Lux.) = 0,43

  $= (2 \times 1 + 0 + 2 \times 0{,}5 + 0 + 0) / 7$

- Préf (Lux.,Eco.) = 0,36

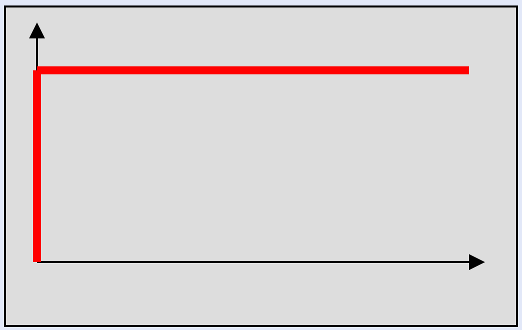
  $= (0 + 1 + 0 + 0{,}5 + 1) / 7$

Comparaisons par Paires

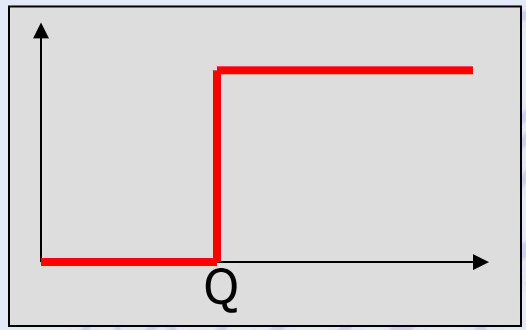
- Pour chaque critère g_j :
  - Fonction de préférence P_j
  - Poids w_j
- Degré de préférence multicritère de *a* sur *b* :

$$\boxed{\pi(a,b) = \sum_{j=1}^{k} w_j \, P_j(a,b)}$$

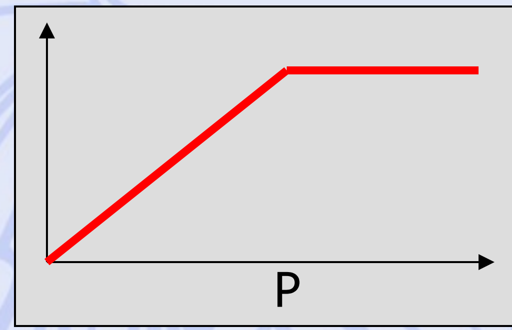
Fonctions de Préférence



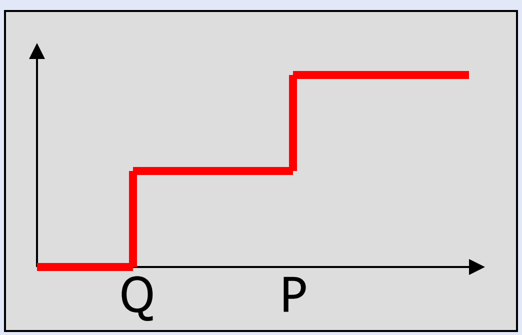
Critère usuel



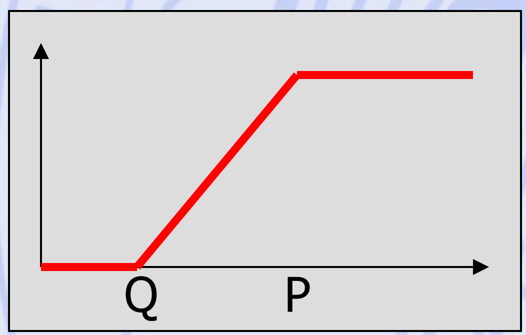
Critère en « U »



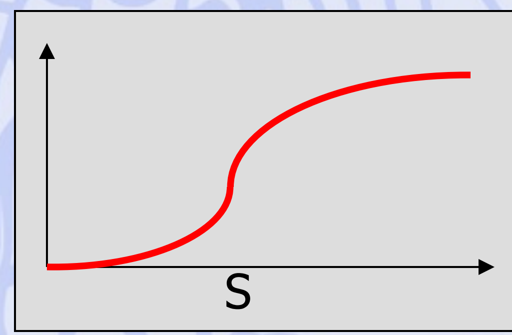
Critère en « V »



Critère à palier



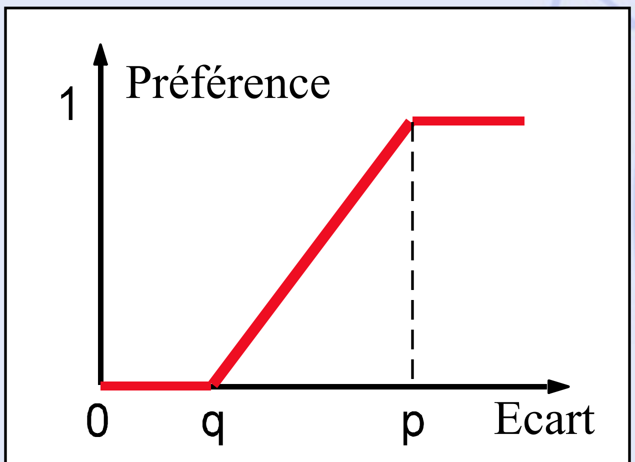
Critère linéaire

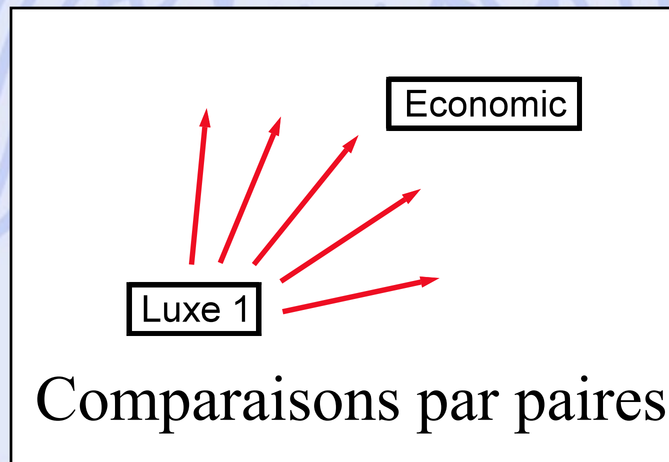


Critère Gaussien

PROMETHEE

Préf (Eco.,Lux.)		Economic		Luxe 1		Préf (Lux.,Eco.)
1,0	**-230000**	250000	*Prix*	480000		0,0
0,0		50	*Puissance*	90	**+40**	**1,0**
0,5	**-1,0**	7,5	*Consomm.*	8,5		0,0
0,0		2	*Habitabilité*	4	**+2**	**0,5**
0,0		1	*Confort*	5	**+4**	**1,0**





Matrice des $\pi(a,b)$

$\pi(a,b)$	$Moy.A$	$Sport$	$Moy.B$	$Lux.1$	$Econ.$	$Lux.2$	$\phi^+(a)$
$Moy.A$	$0,00$						
$Sport$		$0,00$					
$Moy.B$			$0,00$				
$Lux.1$				$0,00$	$0,50$		
$Econ.$				$0,30$	$0,00$		
$Lux.2$						$0,00$	
$\phi^-(a)$							
$\phi(a)$							

Matrice des $\pi(a,b)$

$\pi(a,b)$	$Moy.A$	$Sport$	$Moy.B$	$Lux.1$	$Econ.$	$Lux.2$	$\phi^+(a)$
$Moy.A$	0,00	0,34	0,00	0,21	0,26	0,22	
$Sport$	0,20	0,00	0,16	0,24	0,30	0,24	
$Moy.B$	0,15	0,55	0,00	0,32	0,45	0,33	
$Lux.1$	0,18	0,45	0,10	0,00	0,50	0,15	
$Econ.$	0,20	0,34	0,14	0,30	0,00	0,35	
$Lux.2$	0,24	0,30	0,10	0,04	0,60	0,00	
$\phi^-(a)$							
$\phi(a)$							

Calcul de $\phi^{+}(a)$

$\pi(a,b)$	$Moy.A$	$Sport$	$Moy.B$	$Lux.1$	$Econ.$	$Lux.2$	$\phi^{+}(a)$
$Moy.A$	0,00	0,34	0,00	0,21	0,26	0,22	0,21
$Sport$	0,20	0,00	0,16	0,24	0,30	0,24	0,23
$Moy.B$	0,15	0,55	0,00	0,32	0,45	0,33	0,36
$Lux.1$	0,18	0,45	0,10	0,00	0,50	0,15	0,28
$Econ.$	0,20	0,34	0,14	0,30	0,00	0,35	0,27
$Lux.2$	0,24	0,30	0,10	0,04	0,60	0,00	0,26
$\phi^{-}(a)$							
$\phi(a)$							

Calcul de $\phi^{+}(a)$

$\pi(a,b)$	$Moy.A$	$Sport$	$Moy.B$	$Lux.1$	$Econ.$	$Lux.2$	$\phi^{+}(a)$
$Moy.A$	0,00	0,34	0,00	0,21	0,26	0,22	0,21
$Sport$	0,20	0,00	0,16	0,24	0,30	0,24	0,23
$Moy.B$	0,15	0,55	0,00	0,32	0,45	0,33	0,36
$Lux.1$	0,18	0,45	0,10	0,00	0,50	0,15	0,28
$Econ.$	0,20	0,34	0,14	0,30	0,00	0,35	0,27
$Lux.2$	0,24	0,30	0,10	0,04	0,60	0,00	0,26
$\phi^{-}(a)$							
$\phi(a)$							

Calcul de $\phi^{-}(a)$

$\pi(a,b)$	$Moy.A$	$Sport$	$Moy.B$	$Lux.1$	$Econ.$	$Lux.2$	$\phi^{+}(a)$
$Moy.A$	0,00	0,34	0,00	0,21	0,26	0,22	0,21
$Sport$	0,20	0,00	0,16	0,24	0,30	0,24	0,23
$Moy.B$	0,15	0,55	0,00	0,32	0,45	0,33	0,36
$Lux.1$	0,18	0,45	0,10	0,00	0,50	0,15	0,28
$Econ.$	0,20	0,34	0,14	0,30	0,00	0,35	0,27
$Lux.2$	0,24	0,30	0,10	0,04	0,60	0,00	0,26
$\phi^{-}(a)$	0,19	0,40	0,10	0,22	0,42	0,26	
$\phi(a)$							

Calcul de $\phi^{-}(a)$

$\pi(a,b)$	$Moy.A$	$Sport$	$Moy.B$	$Lux.1$	$Econ.$	$Lux.2$	$\phi^{+}(a)$
$Moy.A$	0,00	0,34	0,00	0,21	0,26	0,22	0,21
$Sport$	0,20	0,00	0,16	0,24	0,30	0,24	0,23
$Moy.B$	0,15	0,55	0,00	0,32	0,45	0,33	0,36
$Lux.1$	0,18	0,45	0,10	0,00	0,50	0,15	0,28
$Econ.$	0,20	0,34	0,14	0,30	0,00	0,35	0,27
$Lux.2$	0,24	0,30	0,10	0,04	0,60	0,00	0,26
$\phi^{-}(a)$	0,19	0,40	0,10	0,22	0,42	0,26	
$\phi(a)$							

Calcul de $\phi(a)$

$\pi(a,b)$	$Moy.A$	$Sport$	$Moy.B$	$Lux.1$	$Econ.$	$Lux.2$	$\phi^+(a)$
$Moy.A$	0,00	0,34	0,00	0,21	0,26	0,22	0,21
$Sport$	0,20	0,00	0,16	0,24	0,30	0,24	0,23
$Moy.B$	0,15	0,55	0,00	0,32	0,45	0,33	0,36
$Lux.1$	0,18	0,45	0,10	0,00	0,50	0,15	0,28
$Econ.$	0,20	0,34	0,14	0,30	0,00	0,35	0,27
$Lux.2$	0,24	0,30	0,10	0,04	0,60	0,00	0,26
$\phi^-(a)$	0,19	0,40	0,10	0,22	0,42	0,26	
$\phi(a)$	0,02	-0,17	0,26	0,06	-0,15	0,00	

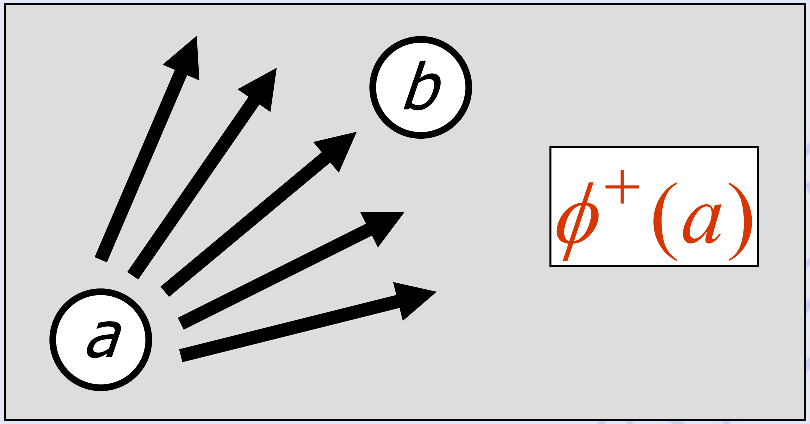
Calcul de $\phi(a)$

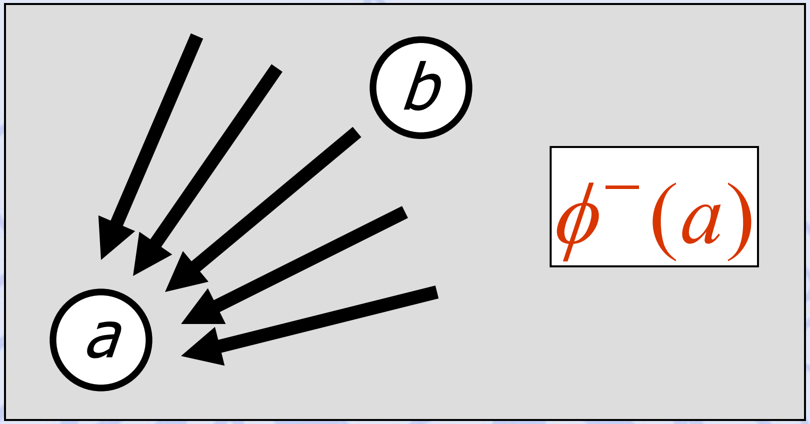
$\pi(a,b)$	$Moy.A$	$Sport$	$Moy.B$	$Lux.1$	$Econ.$	$Lux.2$	$\phi^+(a)$
$Moy.A$	0,00	0,34	0,00	0,21	0,26	0,22	0,21
$Sport$	0,20	0,00	0,16	0,24	0,30	0,24	0,23
$Moy.B$	0,15	0,55	0,00	0,32	0,45	0,33	0,36
$Lux.1$	0,18	0,45	0,10	0,00	0,50	0,15	0,28
$Econ.$	0,20	0,34	0,14	0,30	0,00	0,35	0,27
$Lux.2$	0,24	0,30	0,10	0,04	0,60	0,00	0,26
$\phi^-(a)$	0,19	0,40	0,10	0,22	0,42	0,26	
$\phi(a)$	0,02	-0,17	0,26	0,06	-0,15	0,00	

Calcul des flux de préférence

$\pi(a,b)$	$Moy.A$	$Sport$	$Moy.B$	$Lux.1$	$Econ.$	$Lux.2$	$\phi^+(a)$
$Moy.A$	0,00	0,34	0,00	0,21	0,26	0,22	0,21
$Sport$	0,20	0,00	0,16	0,24	0,30	0,24	0,23
$Moy.B$	0,15	0,55	0,00	0,32	0,45	0,33	0,36
$Lux.1$	0,18	0,45	0,10	0,00	0,50	0,15	0,28
$Econ.$	0,20	0,34	0,14	0,30	0,00	0,35	0,27
$Lux.2$	0,24	0,30	0,10	0,04	0,60	0,00	0,26
$\phi^-(a)$	0,19	0,40	0,10	0,22	0,42	0,26	
$\phi(a)$	0,02	-0,17	0,26	0,06	-0,15	0,00	

Flux de Préférence

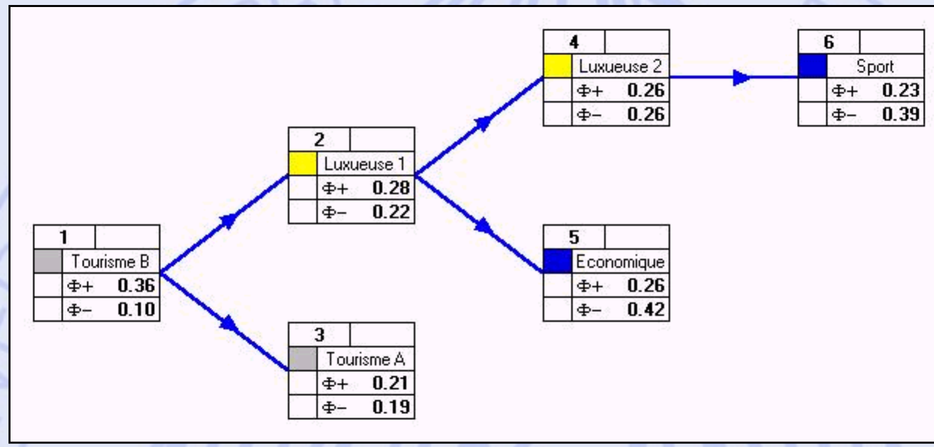


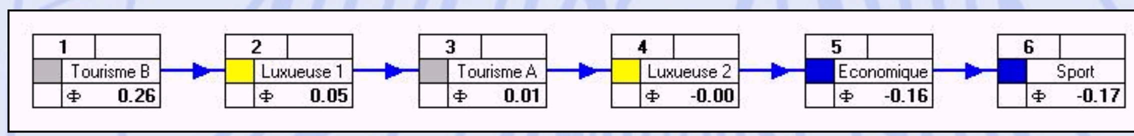


- Flux sortant : (puissance)
  $$\phi^{+}(a) = \frac{1}{n-1} \sum_{b \in A} \pi(a,b)$$
- Flux entrant : (faiblesse)
  $$\phi^{-}(a) = \frac{1}{n-1} \sum_{b \in A} \pi(b,a)$$
- Flux net :
  $$\phi(a) = \phi^{+}(a) - \phi^{-}(a)$$

PROMETHEE

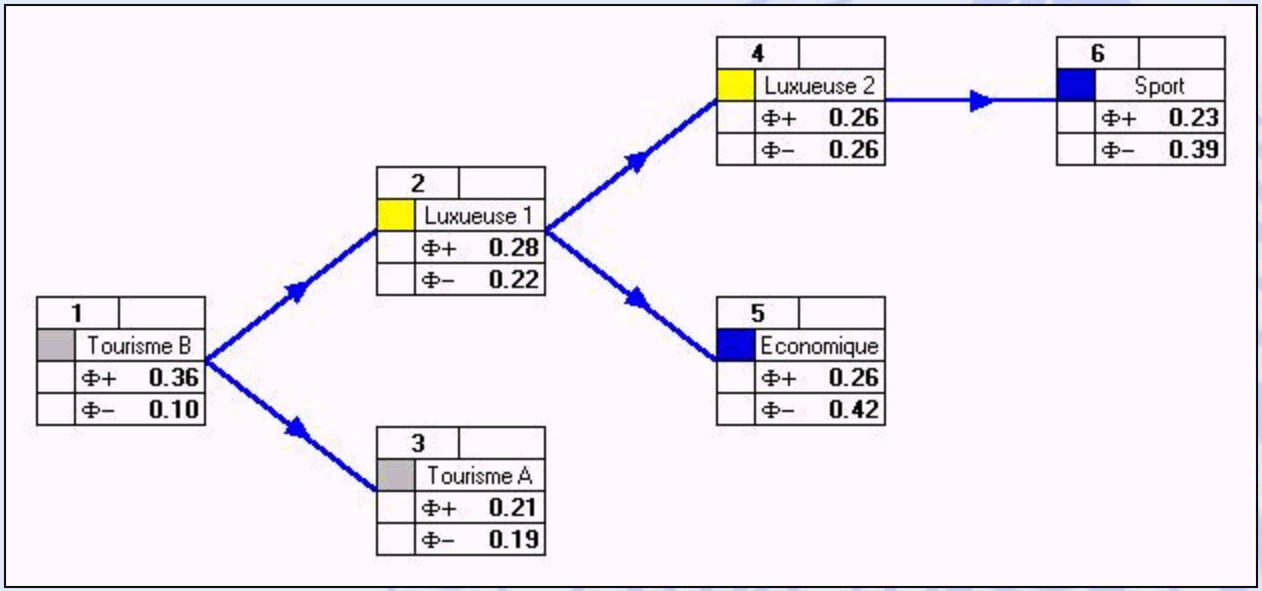
- Classer les décisions de la meilleure à la moins bonne
- Mettre en évidence les meilleurs compromis



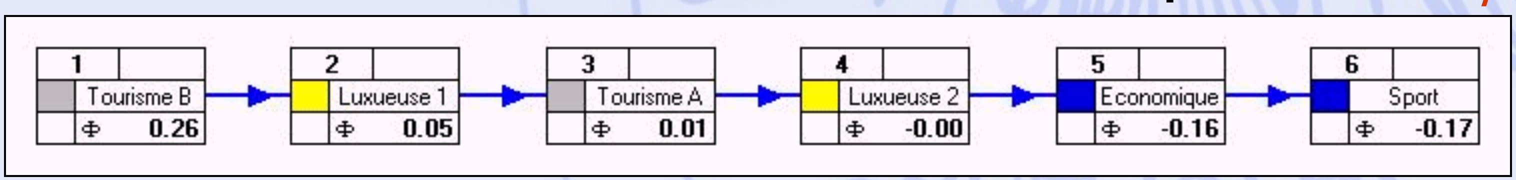


PROMETHEE

- PROMETHEE I : classement partiel ϕ^{+}, ϕ^{-}

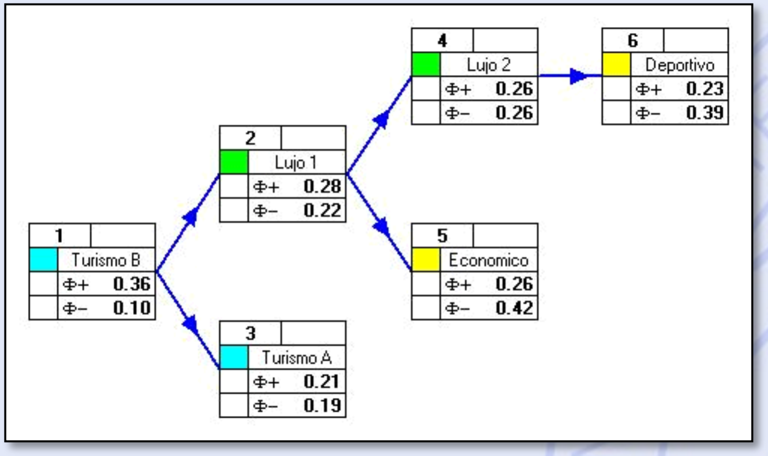


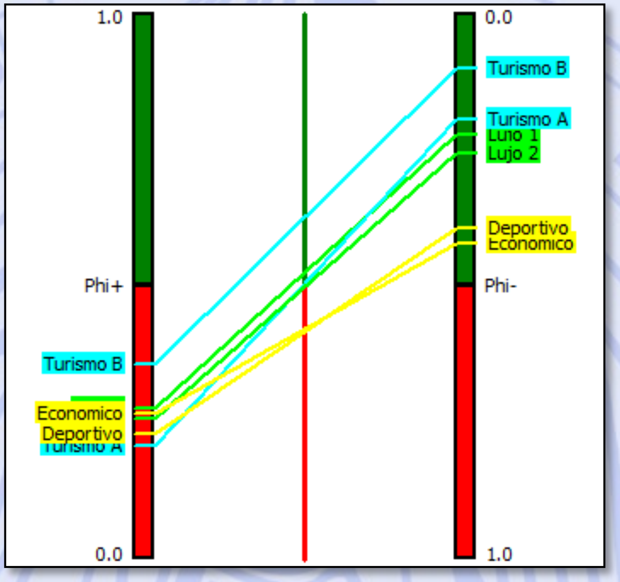
- PROMETHEE II : classement complet ϕ



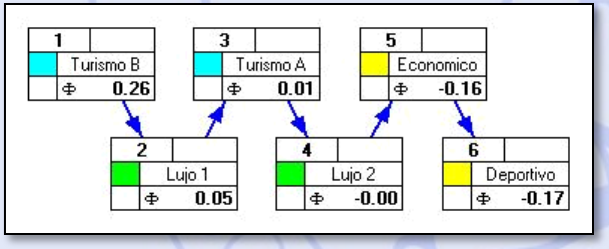
PROMETHEE I & II

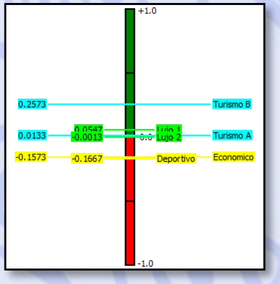
- PROMETHEE I : classement partiel – ϕ^{+}, ϕ^{-}



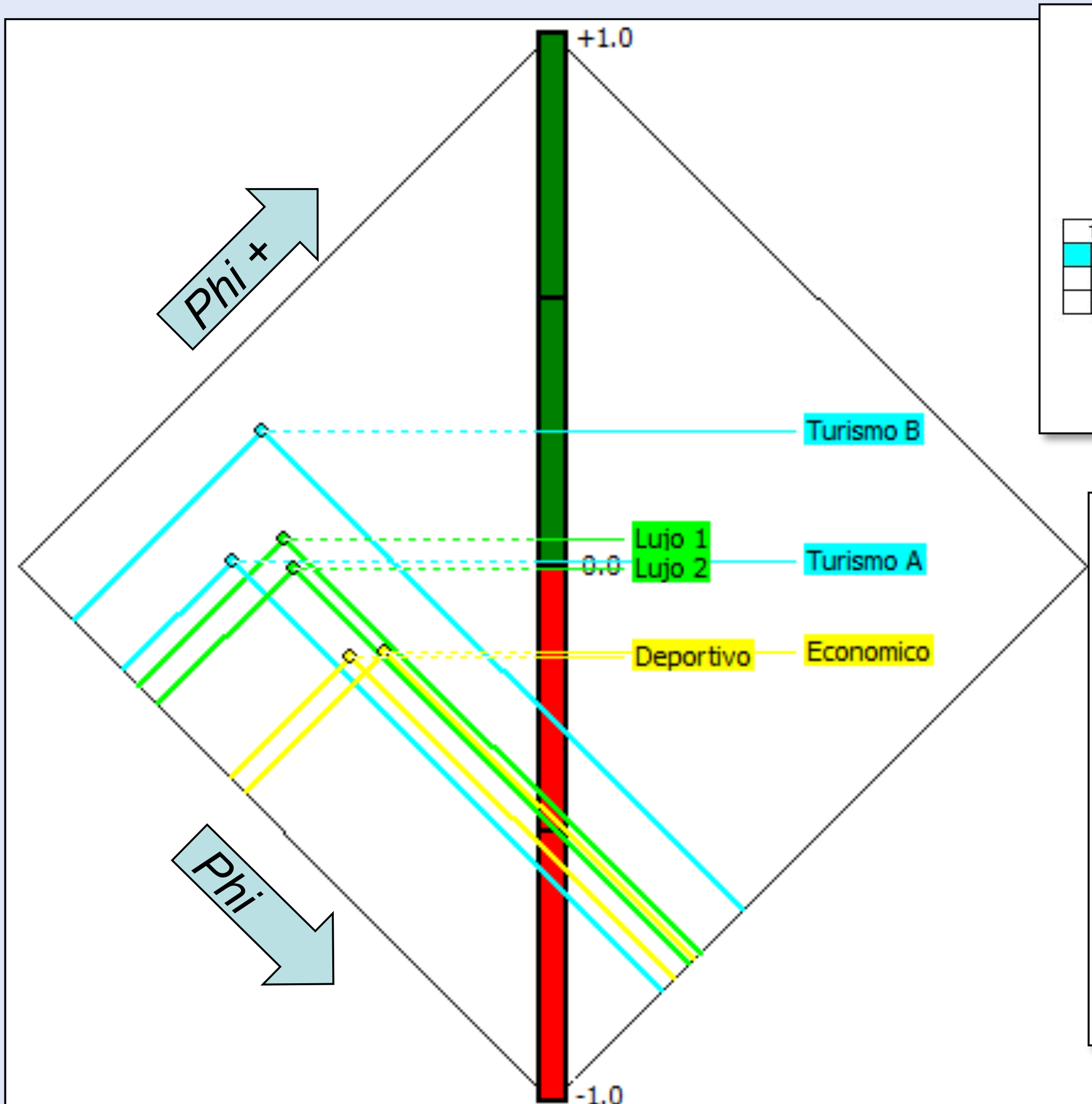


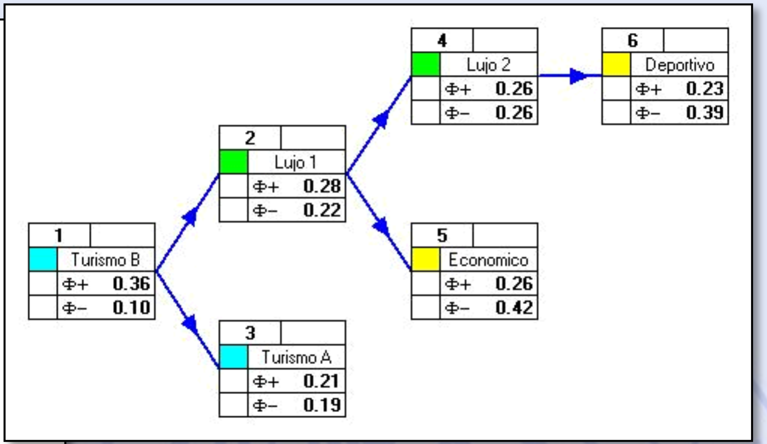
- PROMETHEE II : classement complet – ϕ

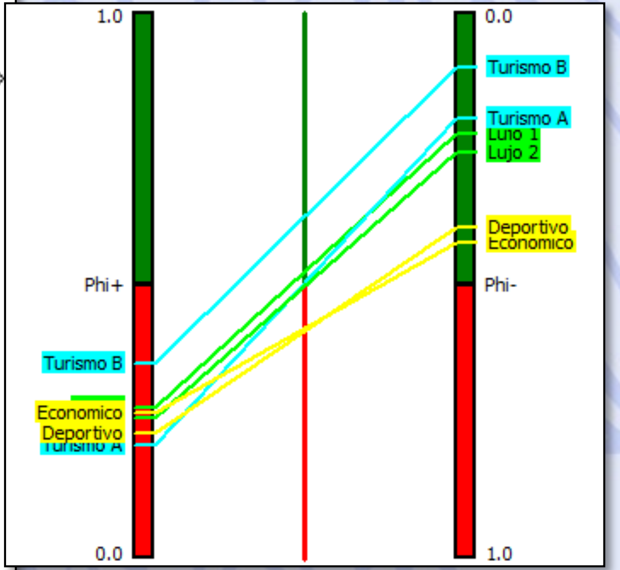




Diamant PROMETHEE



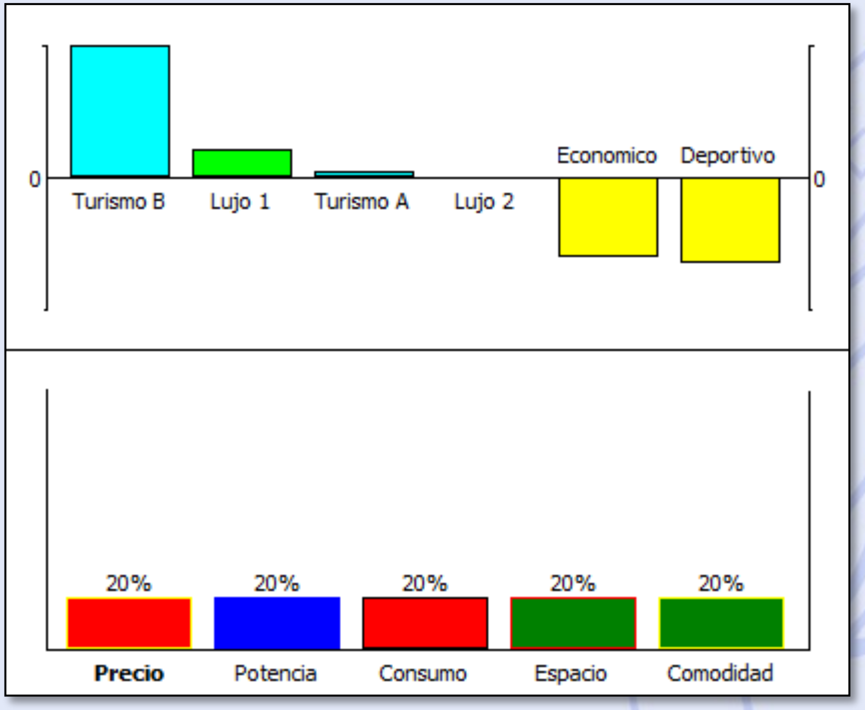


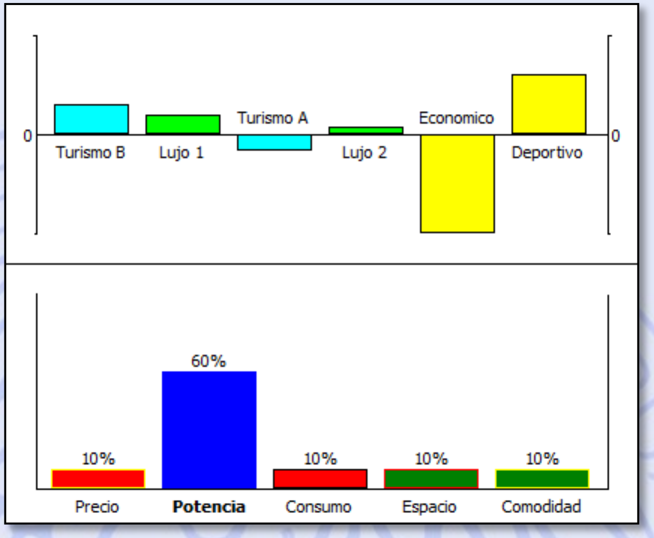


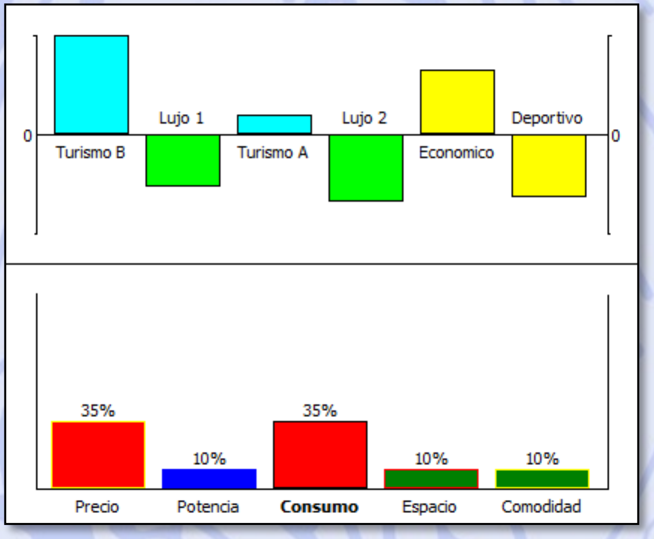
Analyse de Sensibilité avec PROMETHEE

- Poids des critères ↔ classement PROMETHEE.
- Analyse de sensibilité interactive : « Walking Weights ».
- Robustesse par rapport aux poids ?
  - Intervalles de stabilité.
  - Intervalles de stabilité visuels.

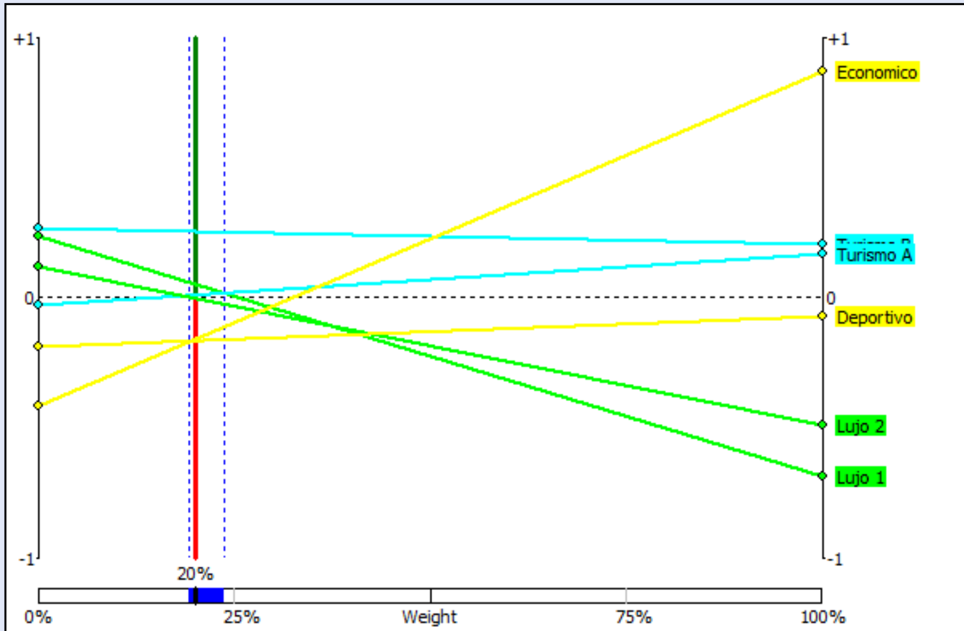
Walking Weights



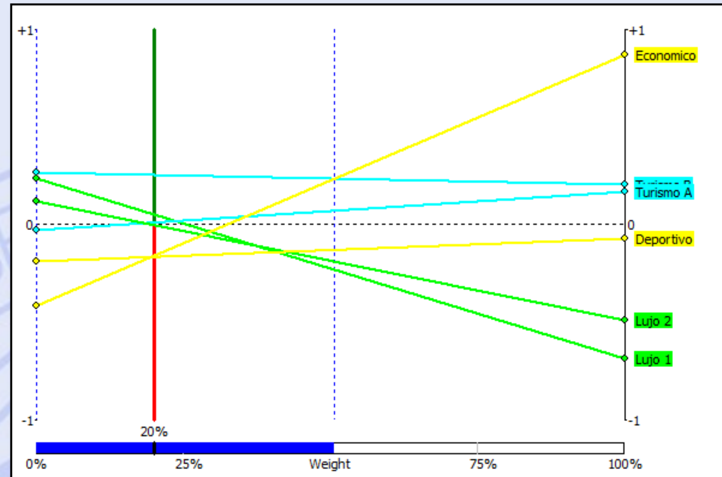




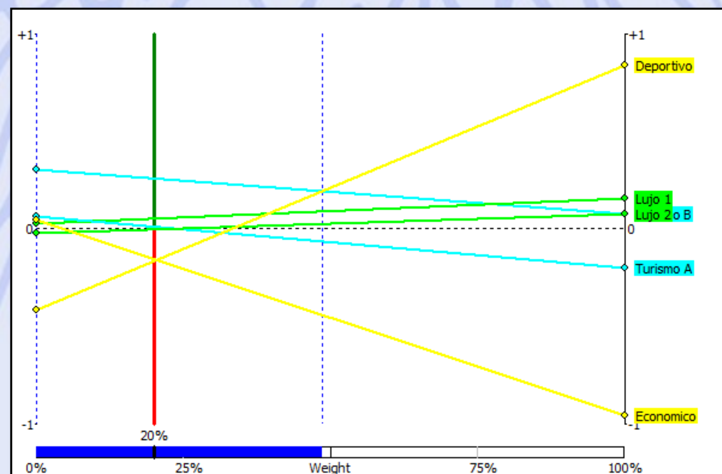
Visual Stability Intervals



VSI pour « Prix » (niveau 6):
[19.20% , 23.70%]

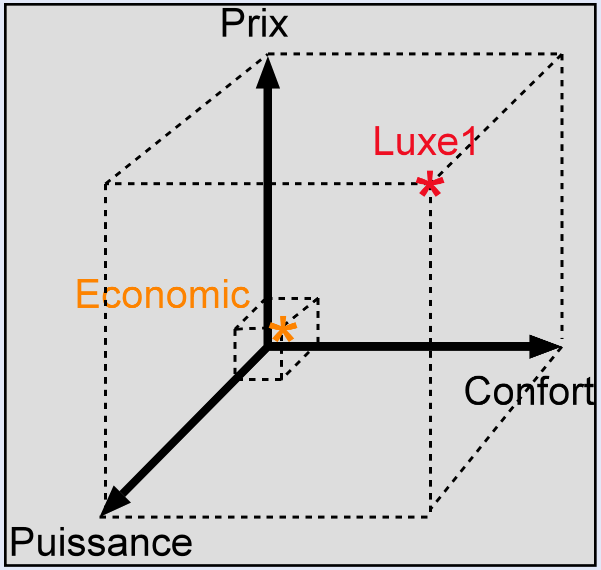


VSI pour « Prix » (niv. 1): [0.00% , 50.68%]



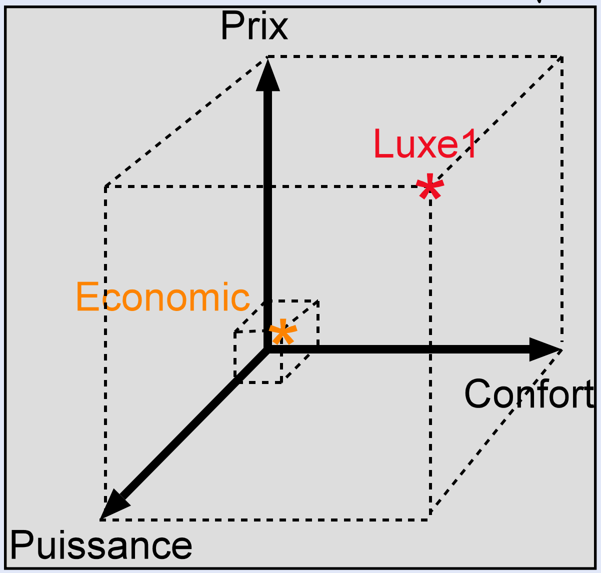
VSI pour « Puissance » (niv. 1): [0.00% , 48.65%]

GAIA

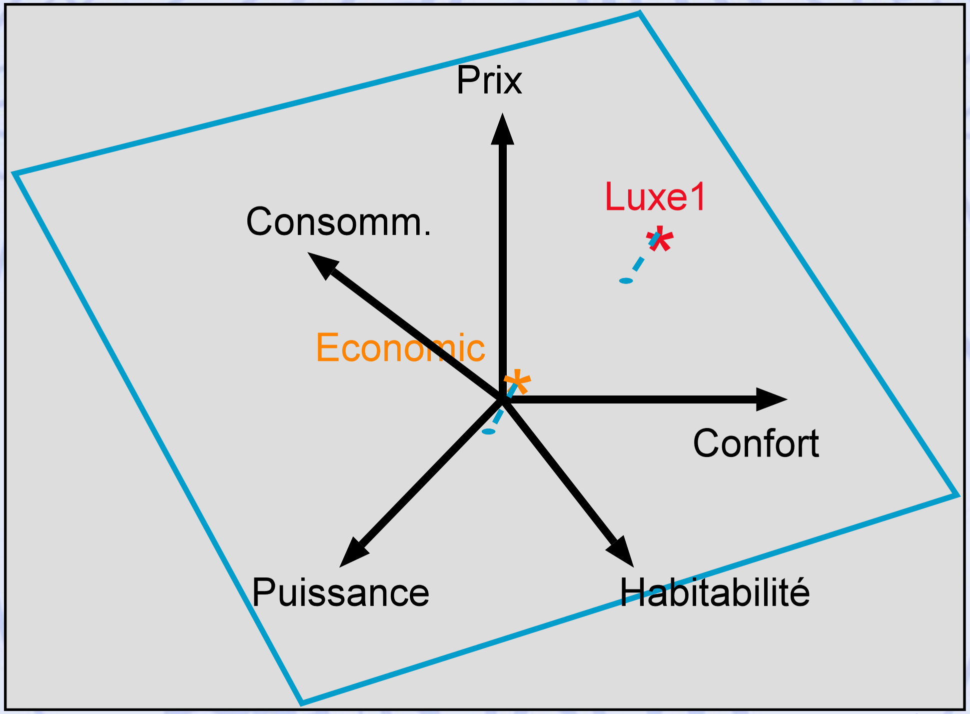


- Représentation graphique.
- 5 dimensions !

GAIA



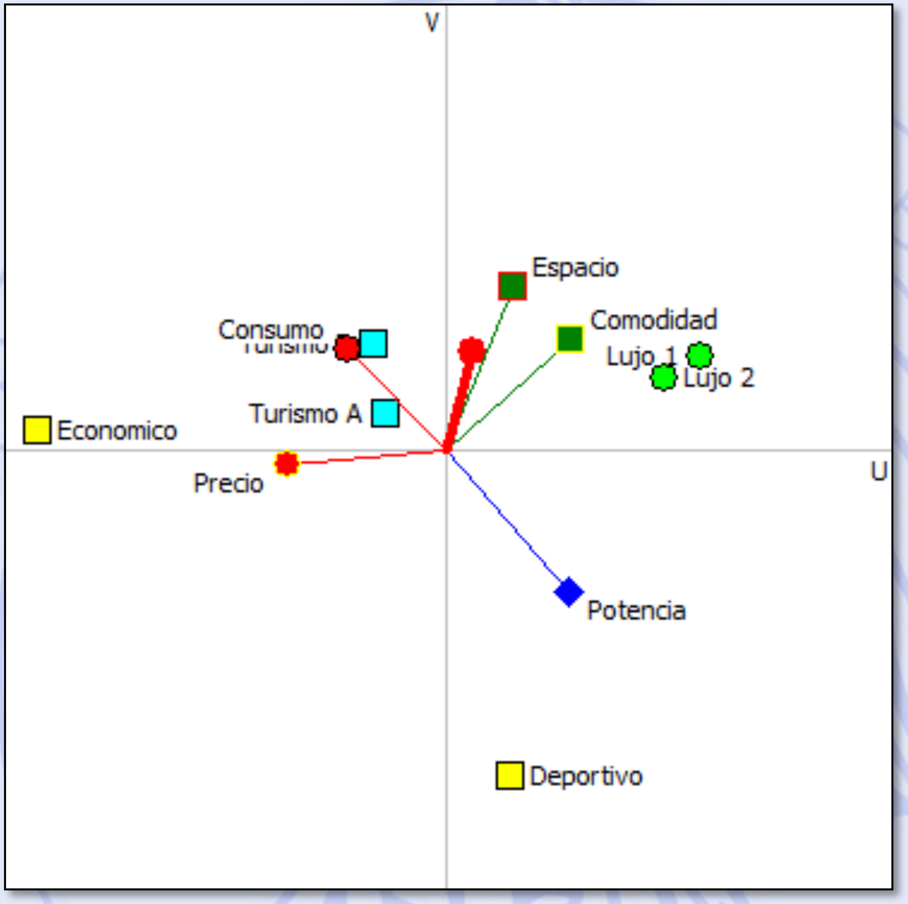
1. ***Calcul des flux nets unicritères (normalisation)***
2. ***Projection sur un plan :***



- Représentation graphique.
- 5 dimensions !

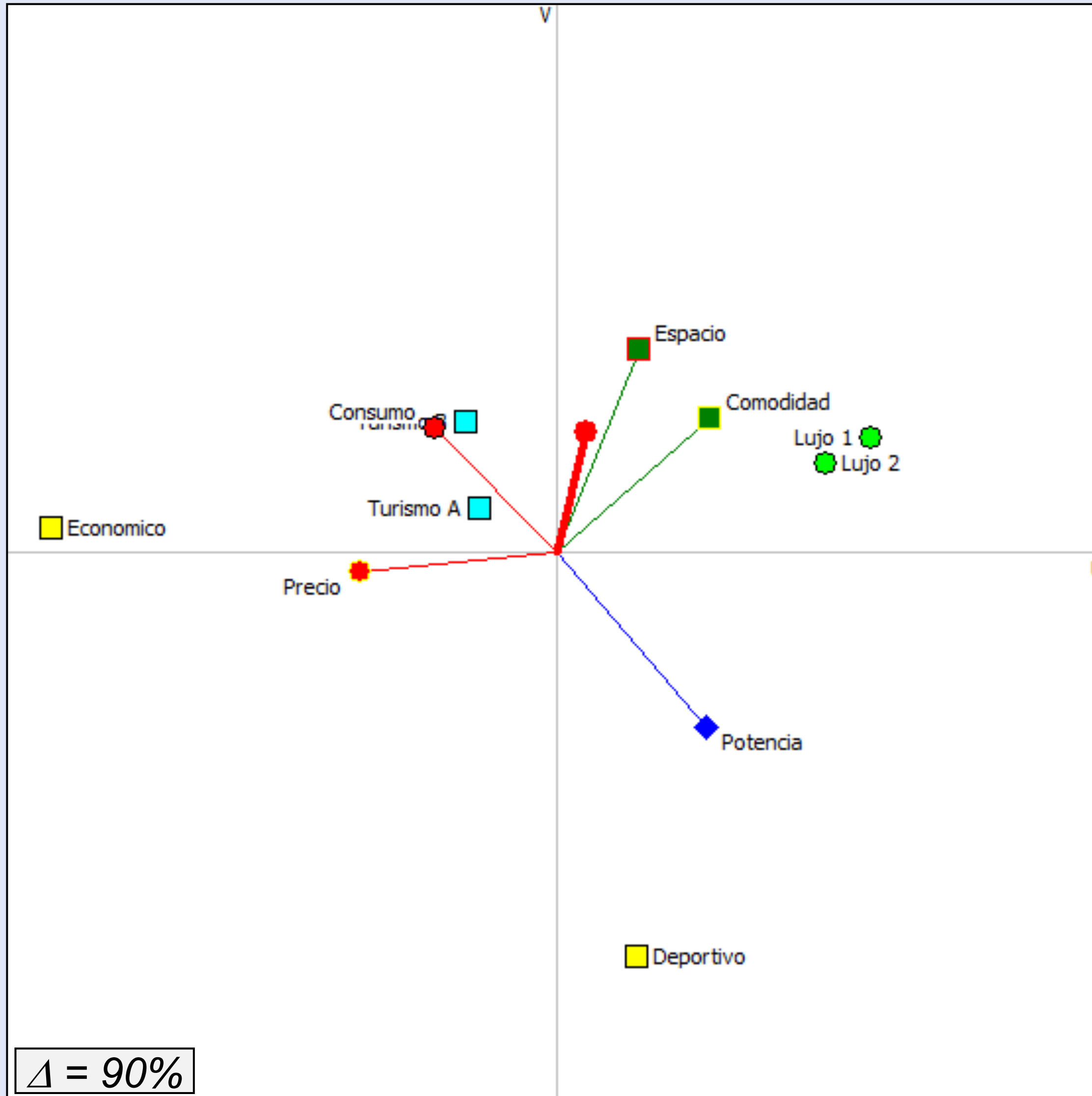
GAIA

- Mettre en évidence les conflits entre critères.
- Identifier les compromis possibles.
- Aider à fixer les priorités.

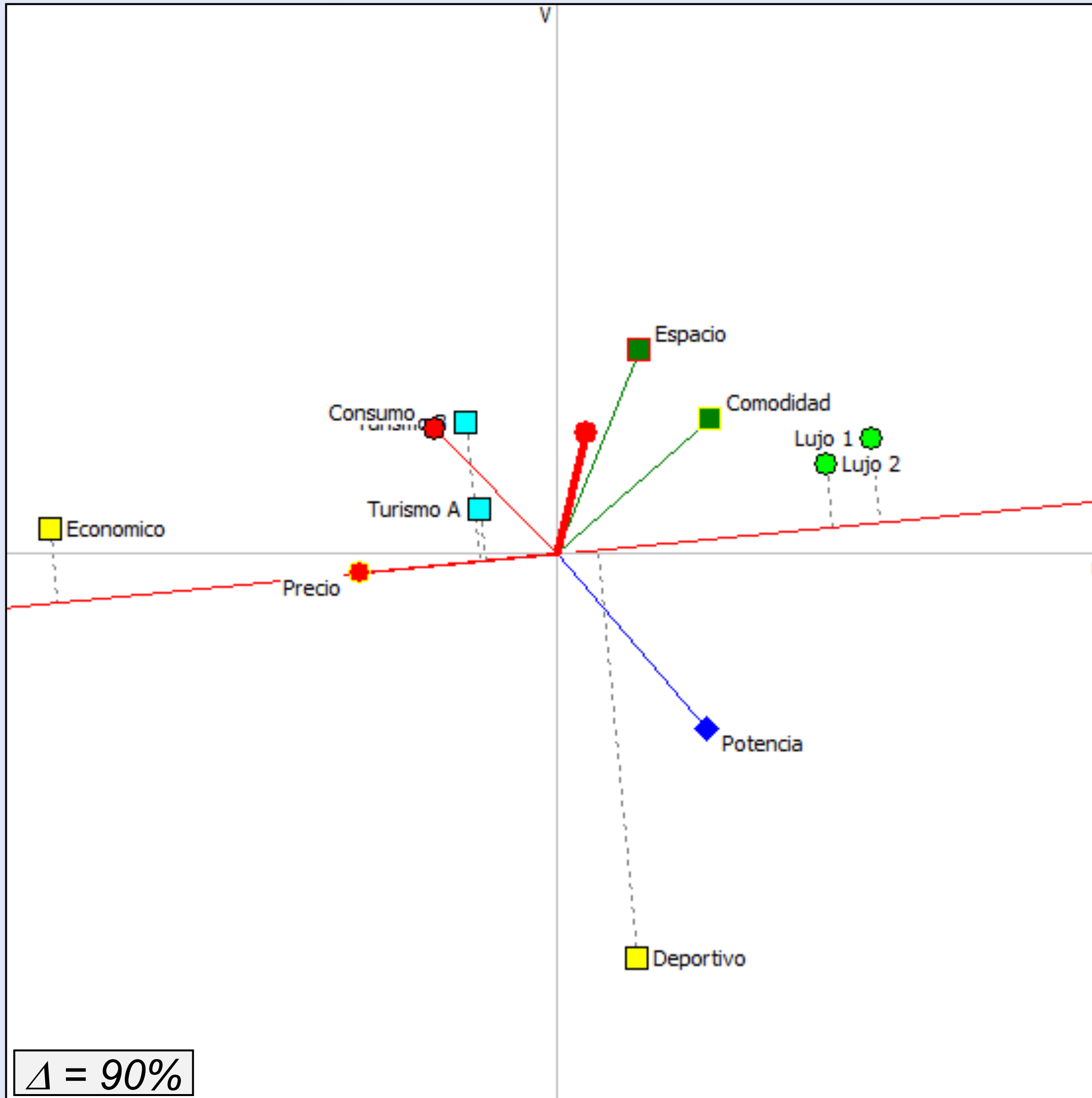


GAIA

- *Actions : points*
- *Critères : axes*



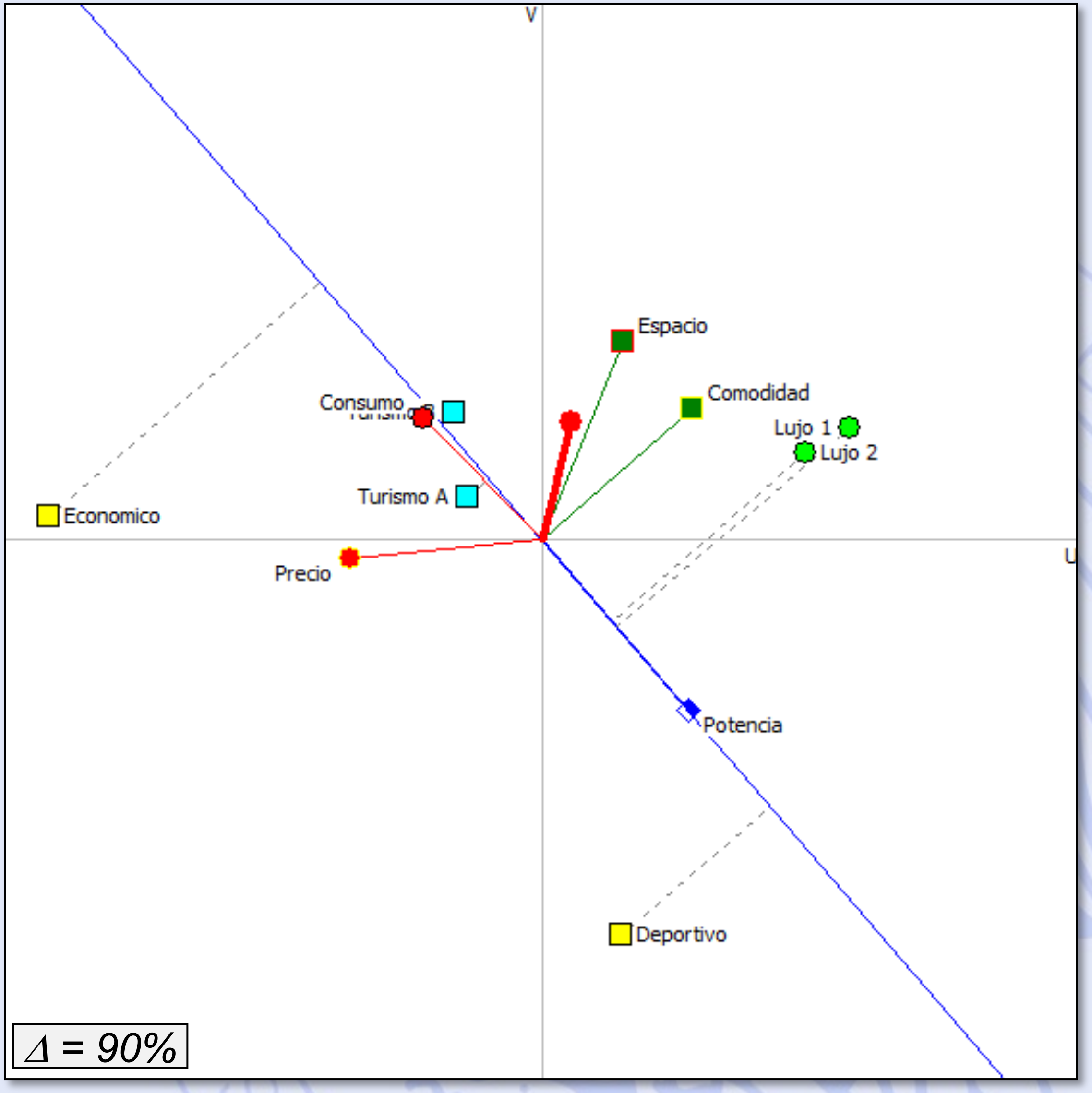
GAIA



Prix

- *Economico: 15 k€*
- *Turismo: 25,5-26 k€*
- *Deportivo: 29 k€*
- *Lujo: 35-38 k€*

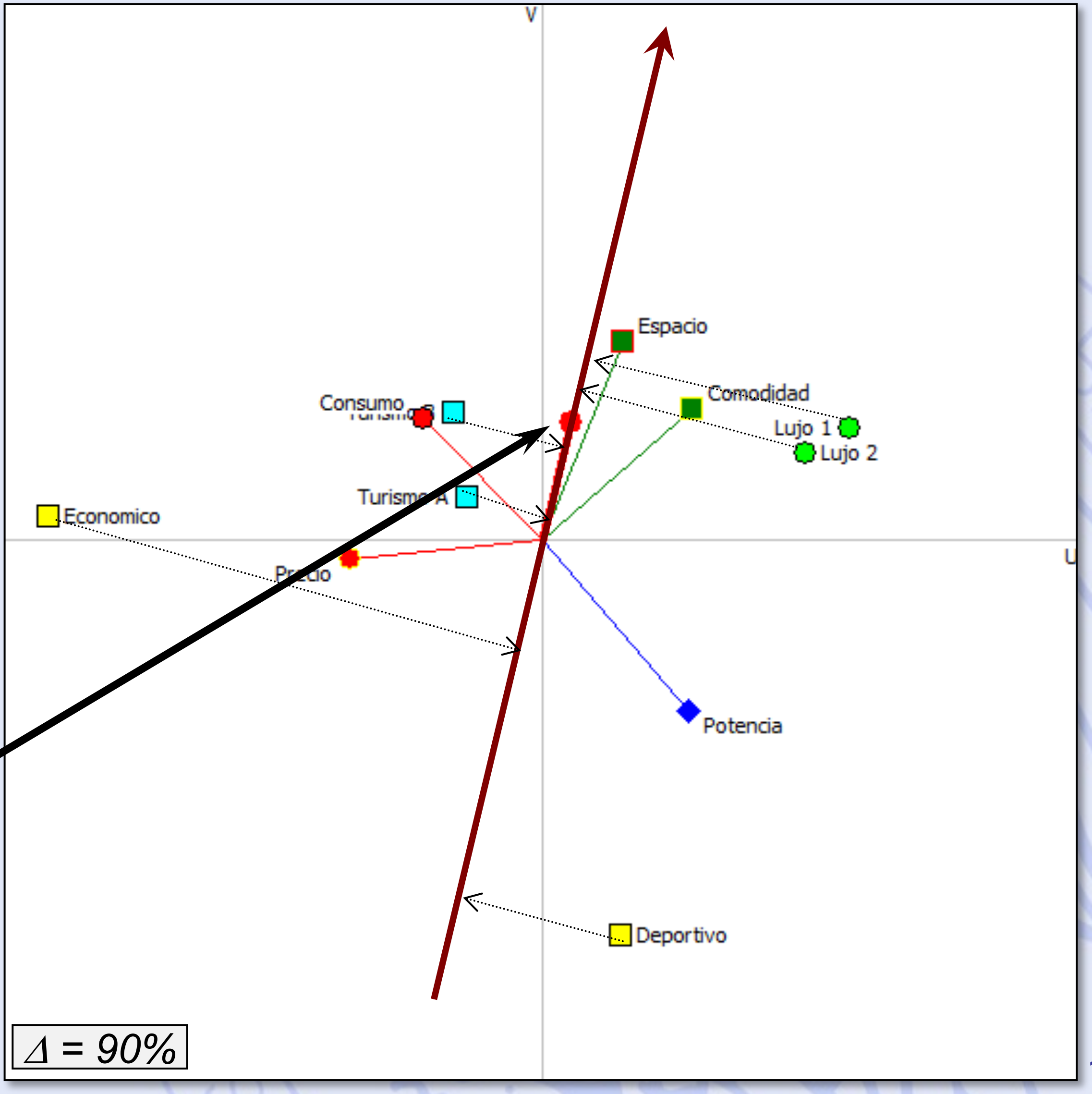
GAIA



Puissance

- *Deportivo: 110 kW*
- *Lujo: 85-90 kW*
- *Turismo: 75-85 kW*
- *Economico: 50 kW*

GAIA

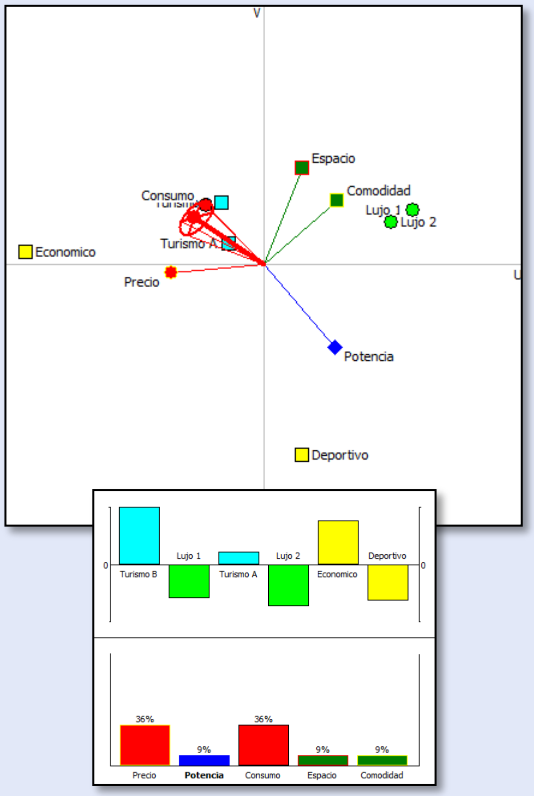


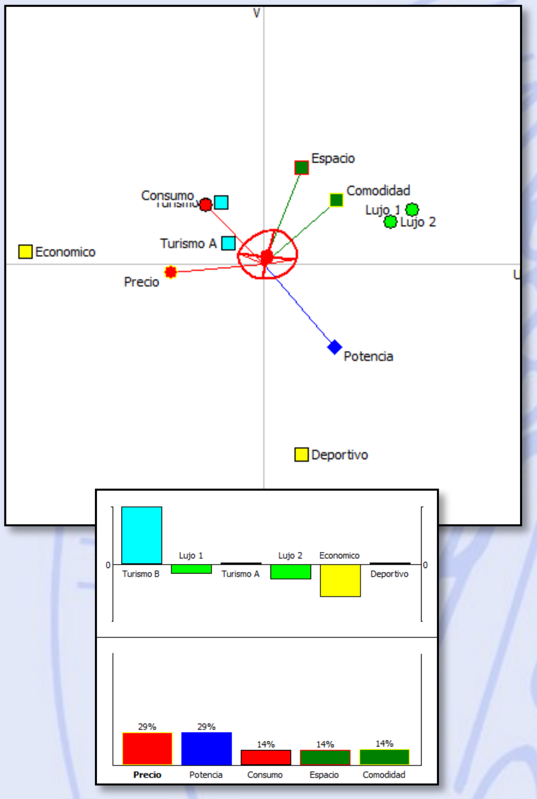
PROMETHEE II !

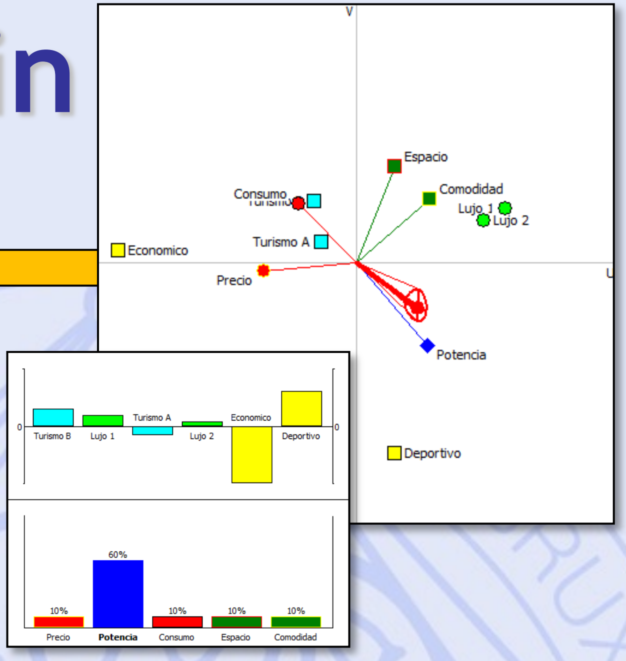
- Turismo B : 0,26
- Lujo 1 : 0,06
- Turismo A : 0,02
- Lujo 2 : 0,00
- Economico : -0,15
- Deportivo : -0,17

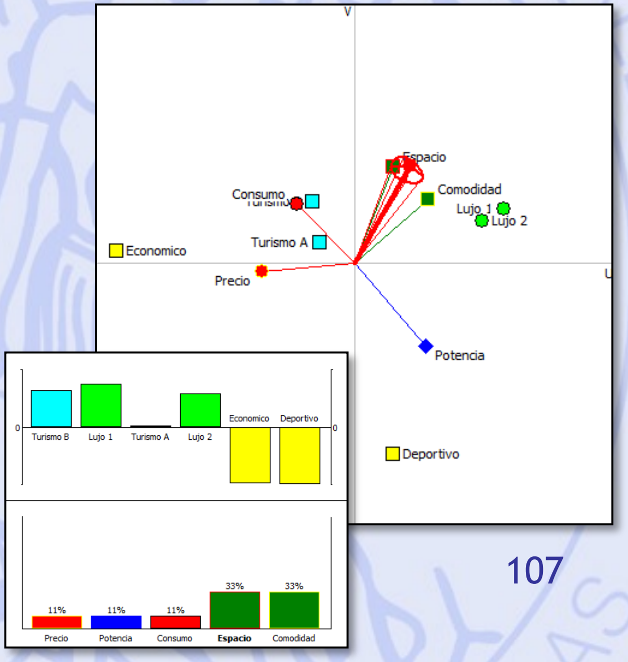
GAIA-Brain

20 ans *35 ans*

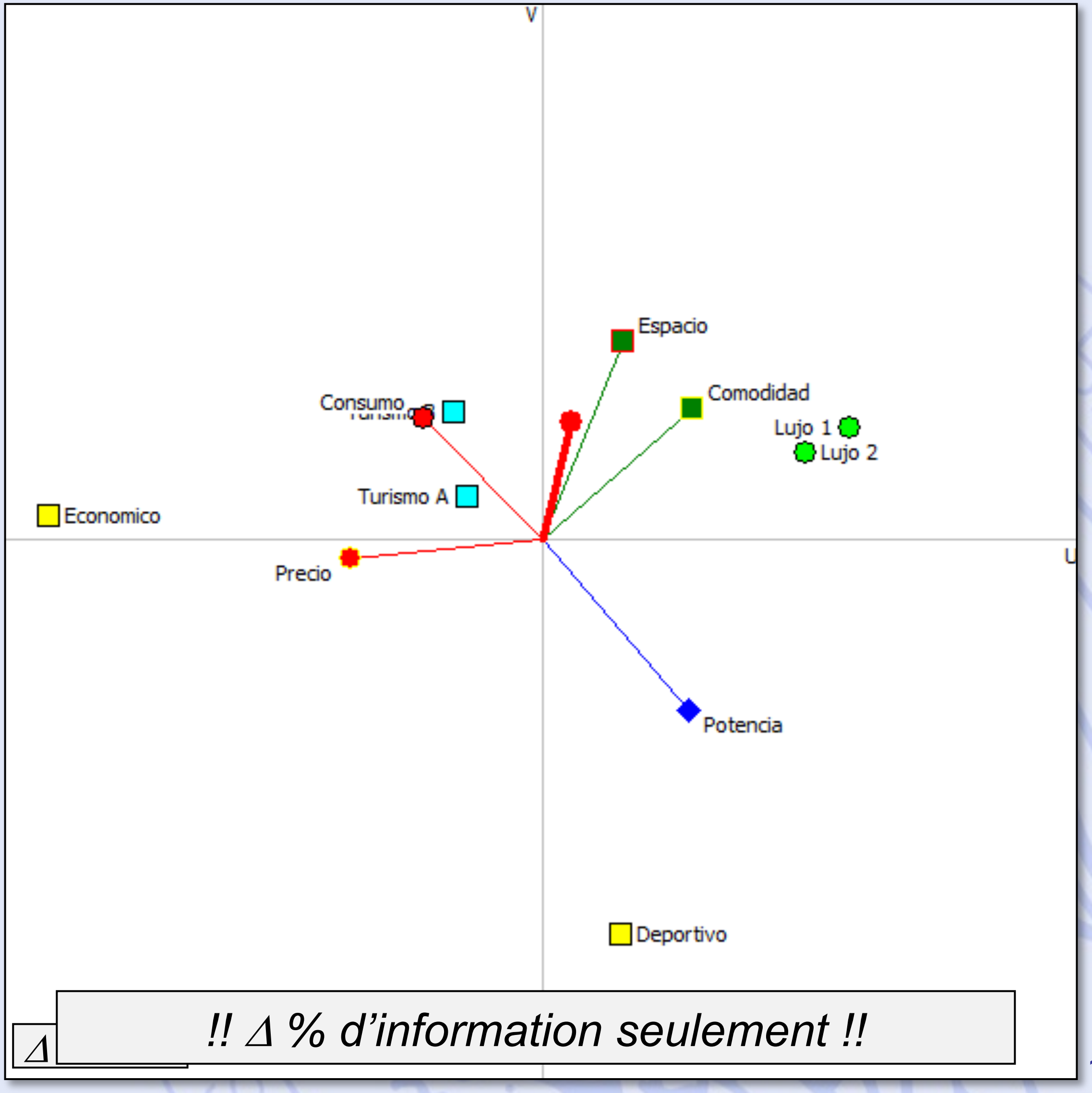








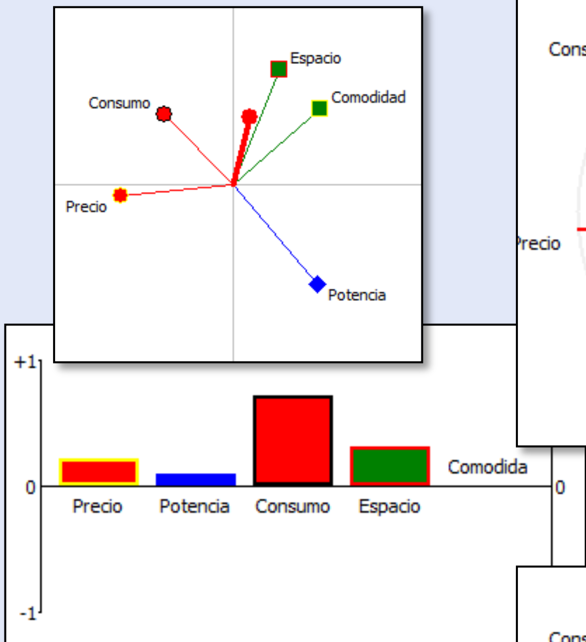
GAIA



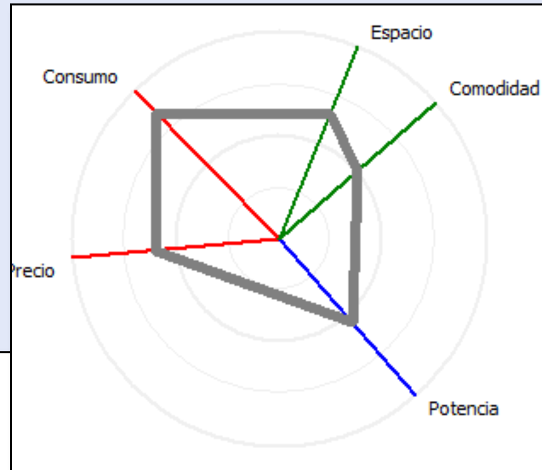
!! Δ % d'information seulement !!

- *Actions : points*
- *Critères : axes*
- *Axe de décision*

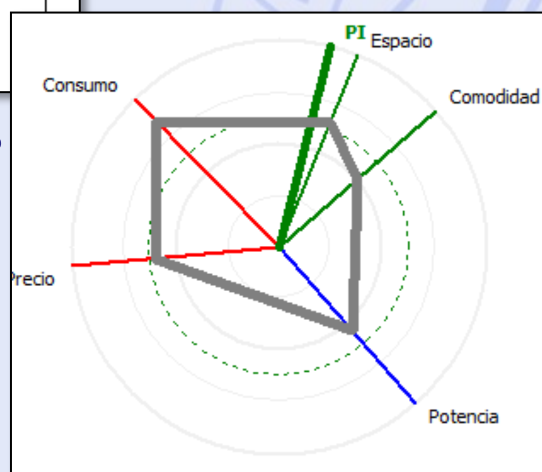
GAIA Webs

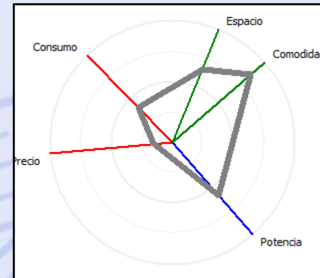


Action profile – Turismo B

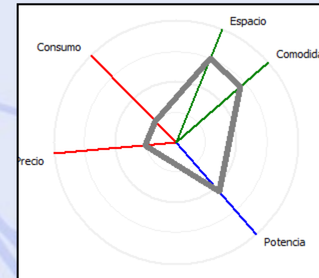


GAIA Web – Turismo B

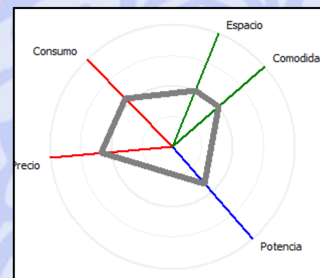




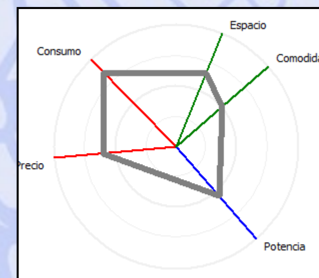
Lujo 1



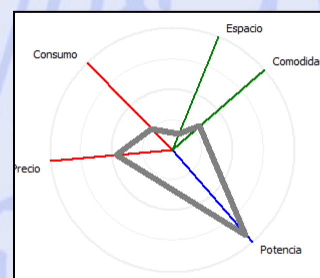
Lujo 2



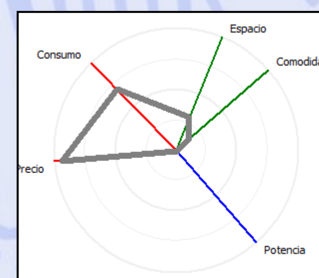
Turismo A



Turismo B



Deportes



Economico

Méthodes PROMETHEE & GAIA

- PROMETHEE : approche prescriptive
  - Classement partiel des actions
    - PROMETHEE I
  - Classement complet des actions
    - PROMETHEE II
- GAIA : approche descriptive
  - Identification des conflits entre critères.
  - Profils caractéristiques des actions.
  - Fixer les priorités, analyse de sensibilité.

Exemple 2 :
Localisation d'une usine

- Actions : 5 sites potentiels
- Critères :
  - f_1 : Coût (investissement)
  - f_2 : Coût (opérations)
  - f_3 : Emploi
  - f_4 : Transport
  - f_5 : Impact sur l'environnement
  - f_6 : Impact social

Tableau d'Evaluation

Tutorial2

	Investment	Operations	Employment	Transportation	Environment	Social
Min/Max	Minimize	Minimize	Minimize	Maximize	Minimize	Minimize
Weight	25.0000	15.0000	20.0000	20.0000	10.0000	10.0000
Preference Functi	Linear	Linear	Linear	Level	Level	Level
Indiference Thres	5.00 %	5.00 %	5.00 %	0.5000	0.5000	0.5000
Preference Thres	25.00 %	25.00 %	10.00 %	1.5000	1.5000	1.5000
Gaussian Thresh	-	-	-	-	-	-
Threshold Unit	Percent	Percent	Percent	Absolute	Absolute	Absolute
Unit	M$	M$	workers	5-point	Impact	Impact
Site 1	74.0000	12.0000	175.0000	Average	High	Low
Site 2	86.0000	9.0000	170.0000	Good	Low	Very Low
Site 3	89.0000	7.0000	145.0000	Very Good	Very Low	Moderate
Site 4	115.0000	8.0000	95.0000	Bad	Low	High
Site 5	128.0000	10.0000	110.0000	Good	Moderate	Very Low

Industrial / Political / Environment / Social

- Critères à minimiser ou maximiser.
- Echelles différentes.
- Critères quantitatifs ou qualitatifs.

Problèmes de Décision Mono- et Multidécideur

- Monodécideur :
  - Une seule partie prenante dans le processus.
  - Evaluations et structure de préférence uniques.
- Multidécideur :
  - Plusieurs parties prenantes.
  - Evaluations et structures de préférences multiples.
  - Recherche d’un consensus.

Exemple

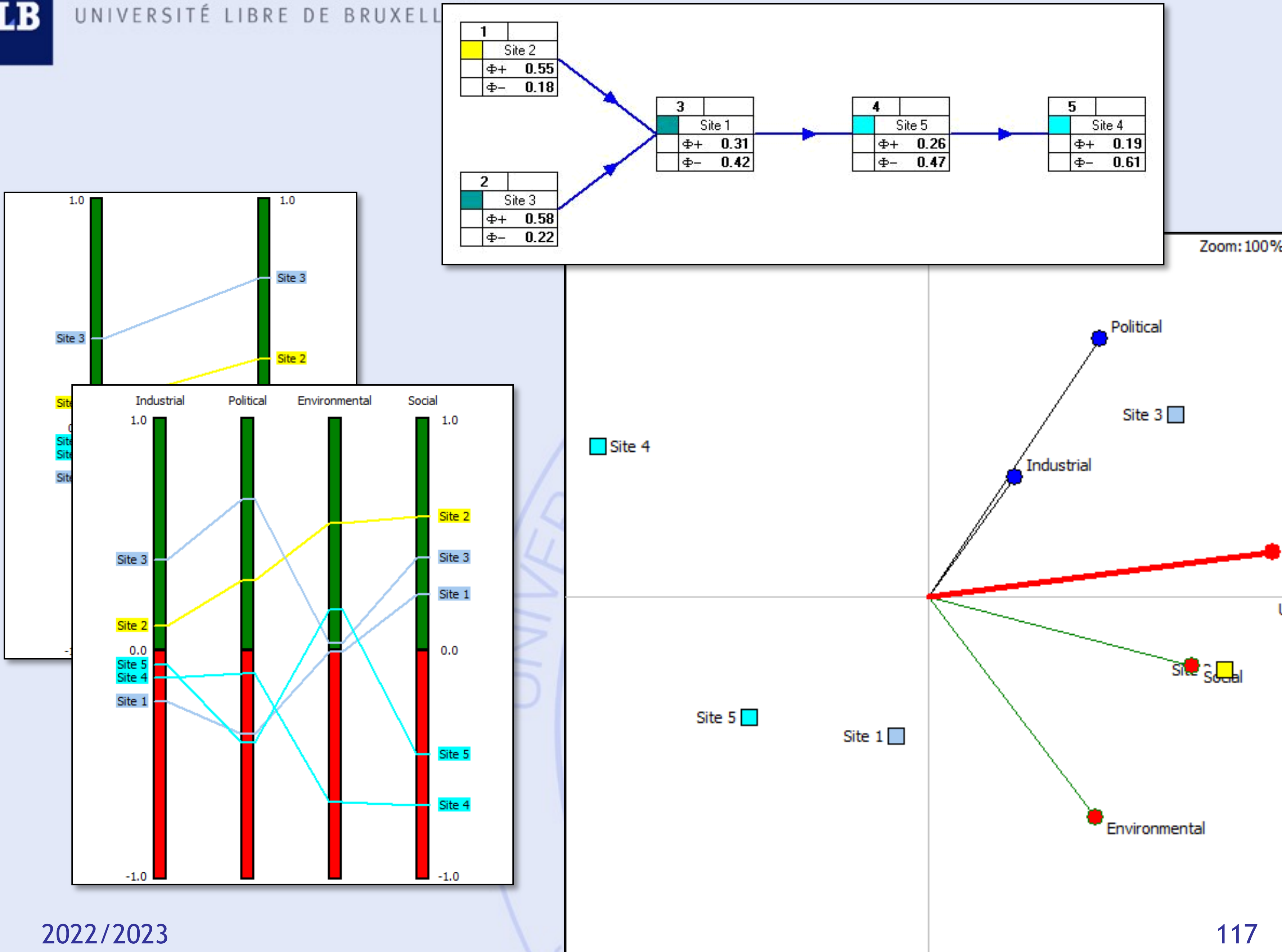
- Quatre parties prenantes (“décideurs”) :
  - Industriel,
  - Pouvoirs publics (région),
  - Associations de protection de l’environnement,
  - Syndicats.
- Quatre tableaux multicritères.

Modèle Multi-scénarios

- Scénarios :
  - Points de vue,
  - Hypothèses de travail, …
- Evaluations :
  - Critères 'objectifs' : évaluations communes.
  - Critères 'subjectifs' : évaluations particulières à chaque scénario.
- Structures de préférences différentes :
  - Poids, seuils de préférence.

Modèle Multi-scénarios

- Adaptation de PROMETHEE :
  - Classements individuels
  - Classements globaux (groupe) en tenant compte d'une pondération éventuelle des scénarios
- Adaptation de GAIA :
  - GAIA-Critères
  - GAIA-Scénarios
  - GAIA-Unicritère


1
Site 2
Φ+ 0.55
Φ− 0.18
2
Site 3
Φ+ 0.58
Φ− 0.22
3
Site 1
Φ+ 0.31
Φ− 0.42
4
Site 5
Φ+ 0.26
Φ− 0.47
5
Site 4
Φ+ 0.19
Φ− 0.61
Zoom: 100%
Political
Site 3
Site 4
Industrial
U
Social
Site 5
Site 1
Environmental
Industrial
Political
Environmental
Social
1.0
0.0
-1.0
Site 2
Site 3
Site 1
Site 5
Site 4

Visual PROMETHEE

WWW.PROMETHEE-GAIA.NET

- Hiérarchie de critères à 3 niveaux (cluster, groupe, critère).
- Outils de visualisation :
  - Classements PROMETHEE et Diamant,
  - Intervalles de stabilité visuels,
  - « Cerveau » (PROMETHEE VI),
  - GAIA-3D,
  - GAIA-Webs et PROMap (intégration SIG – Google Maps), …

PROMap

- *Intégration avec Google Maps* ☹

Prise de décision en groupe

- Jusqu'à 80% du temps de travail des cadres supérieurs et dirigeants passé en réunions.
  - Temps (réunions, déplacements),
  - Coût élevé.
- Efficacité limitée des réunions classiques :
  - Temps de parole limité,
  - Freins psychologiques,
  - Mémoire limitée, …
- Enjeux importants pour les organisations.

« GDSS Rooms »

Travail d'aide à la décision

- Travail (groupes de 2 étudiant(e)s).
- Elaborer un problème de décision : min. 8 actions, 5 critères et 2 scénarios.
- Modéliser le problème avec PROMETHEE.
- Analyser le problème avec Visual PROMETHEE:
  - Classements PROMETHEE.
  - Analyse GAIA.
  - Analyse de sensibilité:
    - Poids des critères.
    - Différents scénarios.
  - Bonus: catégories, groupes, clusters, …
- Rapport écrit à rentrer au plus tard le jour de l'examen.

Etapes

1. Définir le problème :
   - Vérifier la faisabilité.
2. Définir les actions, critères et scénarios :
   - Echelles.
3. Modélisation des préférences :
   - Fonctions de préférences.
   - Pondération des critères.
4. Analyse critique :
   - Classements PROMETHEE.
   - GAIA.
   - Analyse de sensibilité (poids).
   - Analyse multi-scénarios.
   - Bonus (utilisation d’outils additionnels).
   - Conclusion.

Bonus

- Définition de catégories d’actions, de groupes et de clusters de critères.
- Utilisation d’outils supplémentaires :
  - Arc-en-ciel PROMETHEE,
  - Profils, GAIA-Webs,
  - Intervalles de stabilité,
  - PROMETHEE V,
  - GIS,
  - …

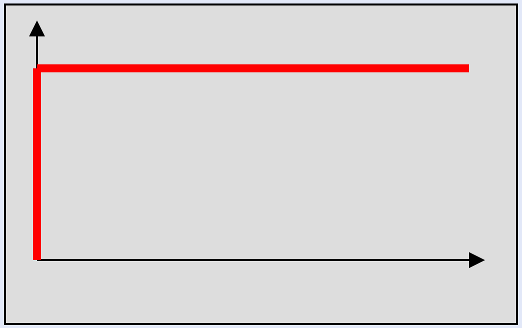
Pour utiliser PROMETHEE

1. Définir les actions :
   - Liste.
2. Définir les critères :
   - Quantitatifs,
   - Qualitatifs (choix de l'échelle).
3. Evaluer (tableau).
4. Pour chaque critère :
   - Choisir un type de fonction de préférence.
   - Fixer les seuils correspondants.
5. Pondérer les critères.

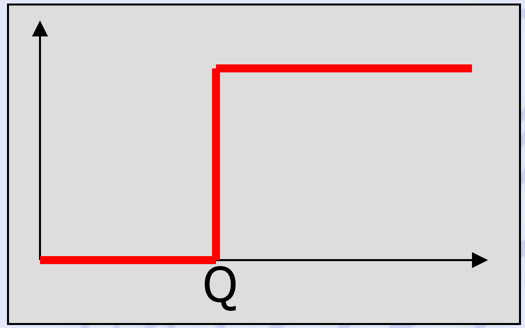
Critères qualitatifs & quantitatifs

- Critères quantitatifs :
  - Echelle numérique naturelle.
- Critères qualitatifs :
  - Echelle qualitative ordinale (ex: échelles de Likert).
  - Maximum 9 niveaux (7 ± 2) pour assurer une évaluation cohérente.
  - Présence d'un niveau neutre ?
  - Exemples:
    - Très bon, Bon, Moyen, Mauvais, Très mauvais
    - Oui, Non
    - ++, +, 0, -, --
    - ++, +, -, --
  - Echelle numérique sous-jacente (codage).

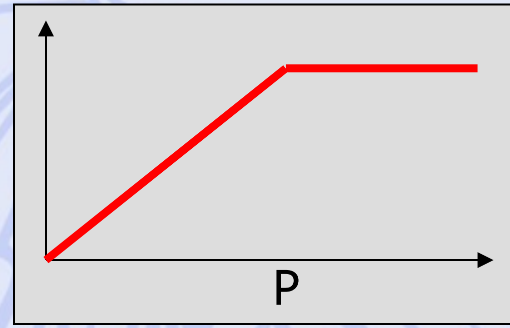
Fonctions de préférence
(disponibles dans Visual PROMETHEE)



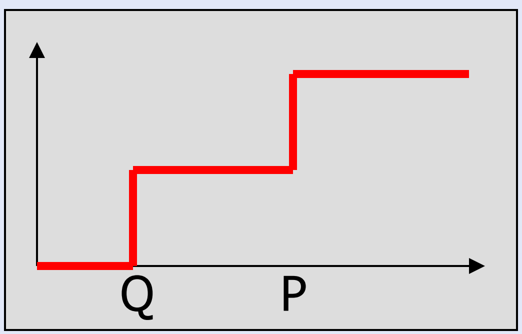
Usuelle



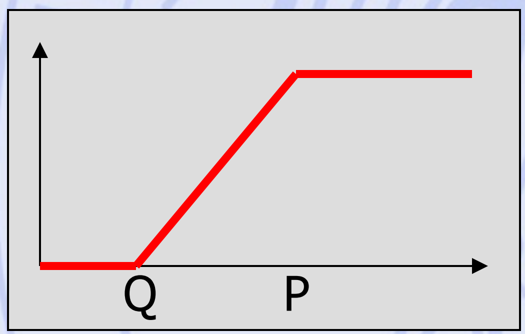
En « U »



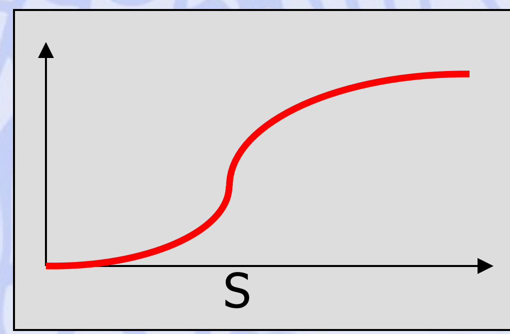
En « V »



A paliers

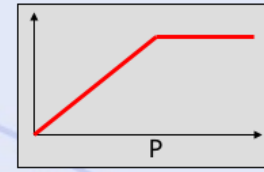


Linéaire



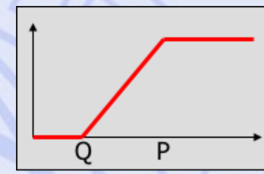
Gaussienne

Fonctions de préférence



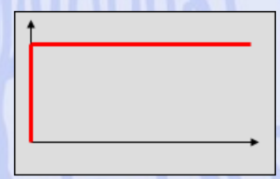
« V » shape

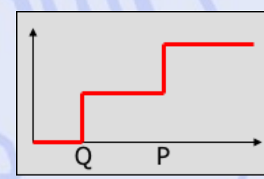
- Critères quantitatifs « continus » (ex. coût, prix, distance):
  - En « V » (pas de seuil d’indifférence),
  - Linéaire.



Linear

- Critères qualitatifs ou quantitatifs « discrets » (ex. « très bon à très mauvais », nombre d’hôpitaux):
  - Usuelle (pas de seuils),
  - A paliers.


Usual



Level

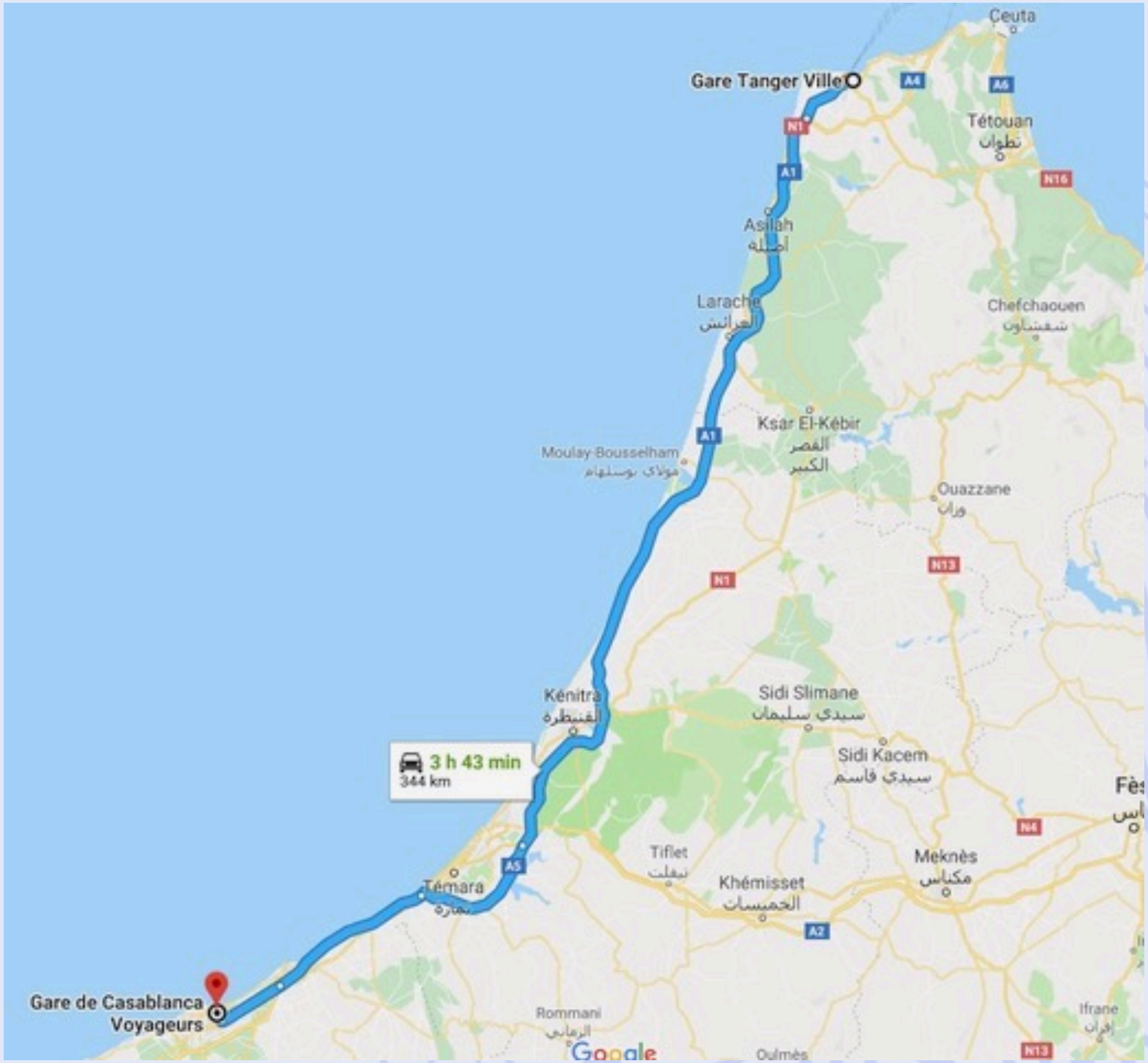
Un exemple... Pas à pas...

Construction

de la

LGV Tanger – Casablanca

LGV Tanger - Casablanca



LGV Tanger - Casa

https://www.oncf.ma/fr/Developpement/Grands-projets/Ligne-a-grande-vitesse-tanger-casablanca

- 22,9 milliards DH → impacts économiques.
- 344 km – 3h43 en auto → gain de temps.
- 12 viaducs, 2100 ha reboisés, réduction émissions GES
  → impacts environnementaux.
- 1800 ha de terrain, 250 ménages expropriés, emplois créés, moins de victimes sur les routes
  → impacts sociaux.
- **Choix du tracé ?**

Les données (fictives - cas d'étude)

- Six tracés possibles : A, B, C, D, E et F
- Six critères :
  - Coût (en milliards de DH)
  - Vitesse commerciale (en km/h)
  - Nombre d'ouvrages d'art (viaducs, ...)
  - Nombre de ménages expropriés
  - Nombre d'emplois créés
  - Impact environnemental (qualitatif – 5 pts)
- Deux scénarios :
  - Gouvernement
  - ONCF (chemins de fer marocains)

Les actions

- Six tracés possibles :
  - A, B, C, D, E, F
- Deux catégories en fonction de l'orientation du tracé :
  - Ouest :
  - Est :

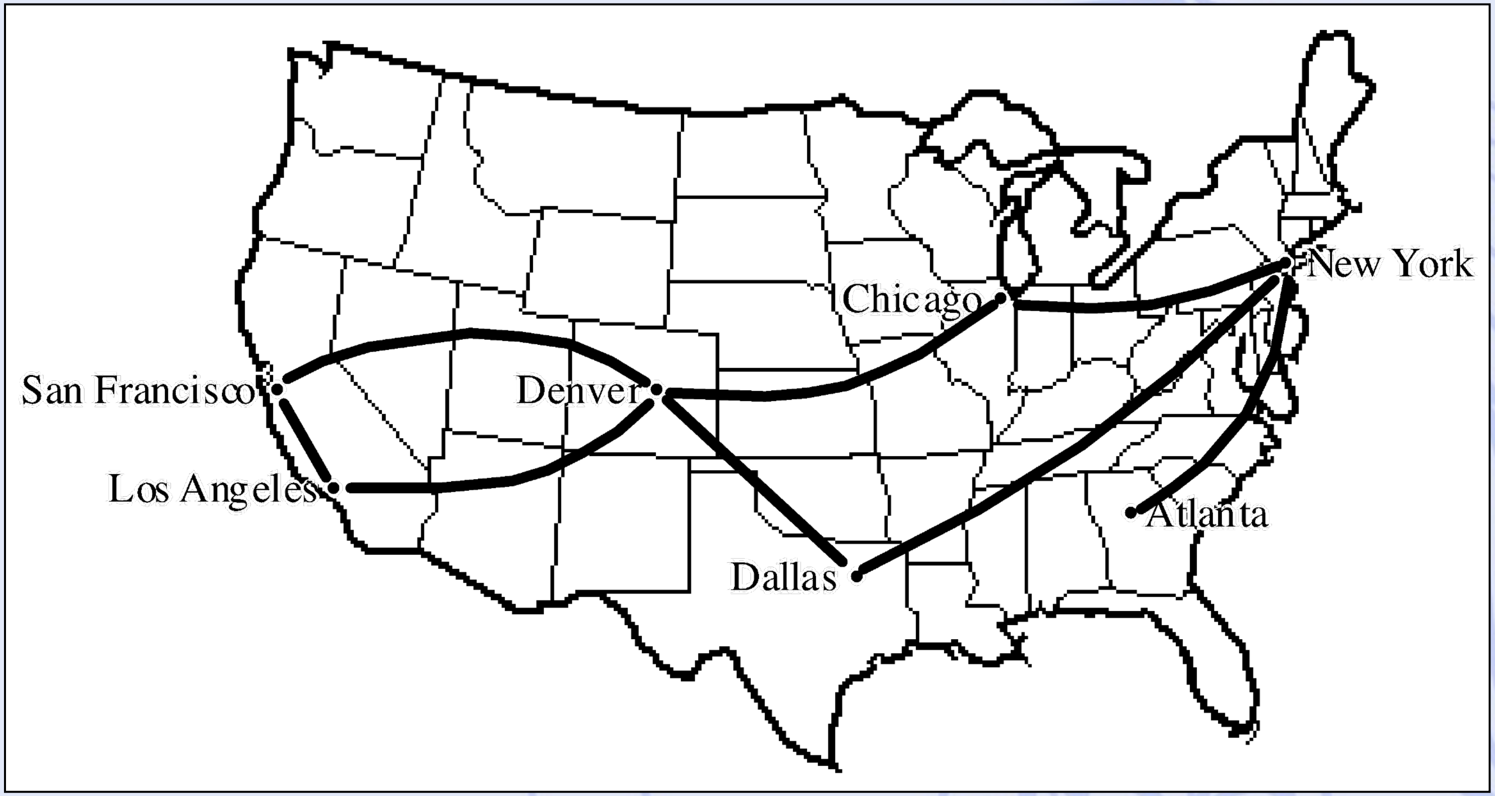
Les critères

- Coût
  - Quantitatif – monétaire (milliards de DH)
- Vitesse commerciale
  - Quantitatif (km/h)
- Ouvrages d'art
  - Quantitatif – discret (nombre – de 9 à 14)
- Expropriations
  - Quantitatif (nombre de ménages)
- Emplois créés
  - Quantitatif (nombre d'emplois)
- Impact environnemental
  - Qualitatif (5 pts – de très faible à très élevé)

Plan du cours

1. Introduction
   - Historique, modélisation
2. Aide multicritère à la décision
   - Choix social
   - Méthodes PROMETHEE et GAIA
3. Quelques problèmes de la théorie des graphes
   - Définitions, terminologie
   - Chemins les plus courts et les plus longs
4. Gestion de projet (ordonnancement)
   - Méthode du chemin critique
   - Contraintes cumulatives
   - Méthode PERT

1. Graphe ?

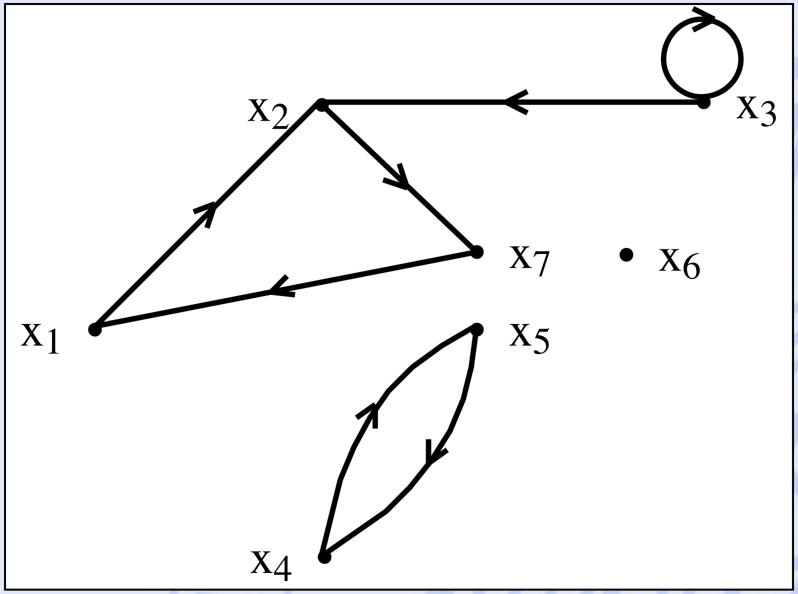

New York
Chicago
San Francisco
Denver
Los Angeles
Atlanta
Dallas

Graphe orienté

$$G = (X, U)$$

- X : ensemble fini d'éléments appelés **sommets**,
- U : sous-ensemble de $X \times X$ (couples de sommets) dont les éléments sont appelés **arcs**.

Exemple 1



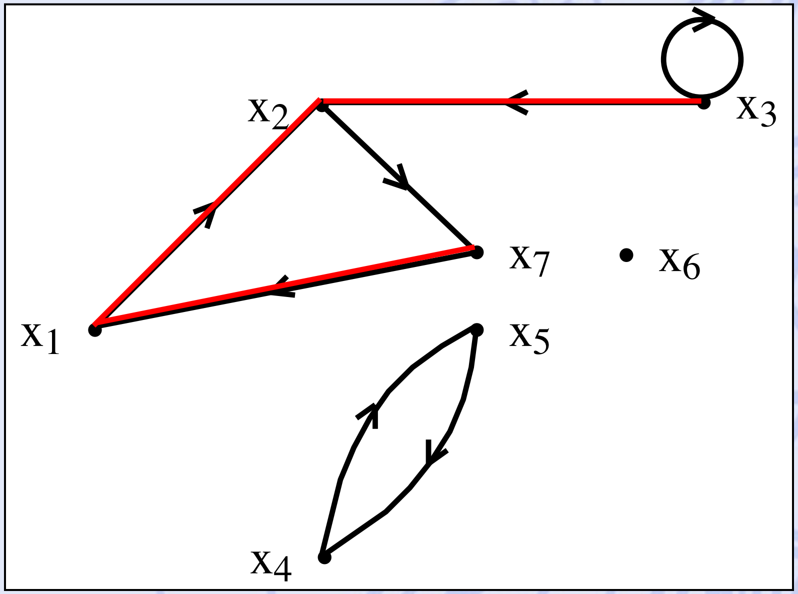
- $X = \{ x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , x_5 , x_6 , x_7 \}$
- $U = \{ (x_1,x_2) , (x_2,x_7) , (x_3,x_3) , (x_3,x_2) , (x_4,x_5) , (x_5,x_4) , (x_7,x_1) \}$

Terminologie

- **Chaîne** : Suite de sommets telle que si x_k et x_l sont deux sommets consécutifs de cette suite, alors (x_k,x_l) ou $(x_l,x_k) \in U$.
- **Chemin** : Suite de sommets telle que si x_k et x_l sont deux sommets consécutifs de cette suite, alors $(x_k,x_l) \in U$.
- **Cycle** : Chaîne dont le dernier sommet coïncide avec le premier.
- **Circuit** : Chemin dont le dernier sommet coïncide avec le premier.

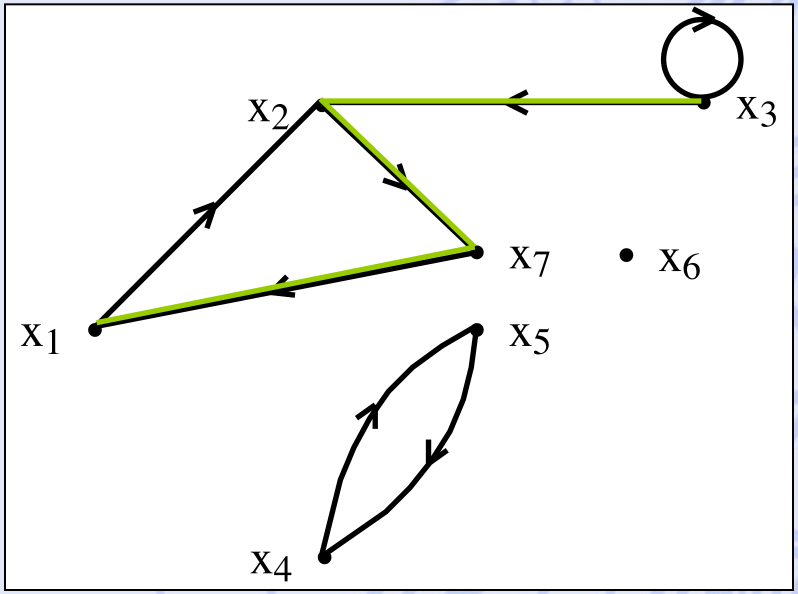
Exemple 1

Chaîne

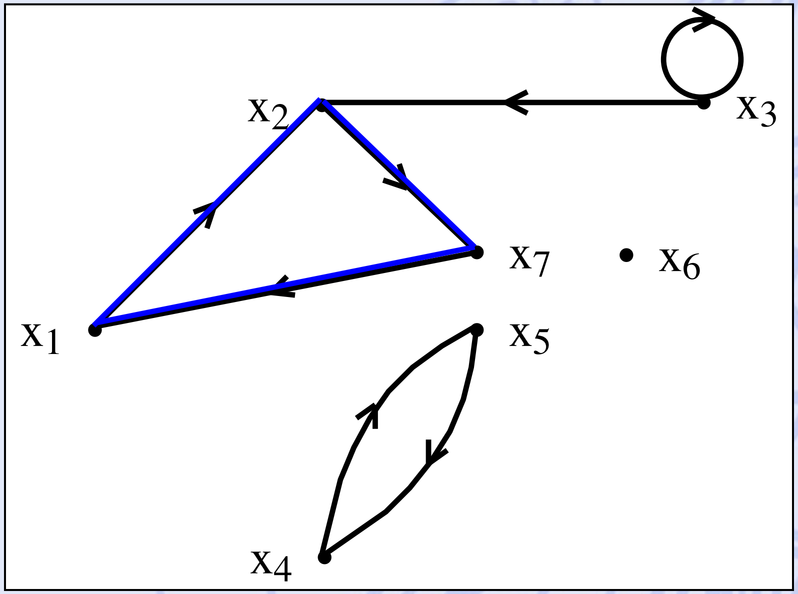


Exemple 1

Chemin



Exemple 1



Circuit

Terminologie (2)

- Circuits particuliers :
  - Circuit élémentaire,
  - Circuit hamiltonien (1! par chaque sommet),
  - Circuit eulérien (1! par chaque arc).
- **Graphe connexe** :
  $\forall$ x,y $\in X$ avec x $\neq$ y $\exists$ chaîne entre x et y.
- **Graphe fortement connexe** :
  $\forall$ x,y $\in X$ avec x $\neq$ y $\exists$ chemin de x vers y.

Terminologie (4)

- Ensemble des **successeurs** de $x \in X$:

$$\Gamma^{+}(x) = \{ y \in X \mid (x, y) \in U \}$$

- Ensemble des **prédécesseurs** de $x \in X$:

$$\Gamma^{-}(x) = \{ y \in X \mid (y, x) \in U \}$$

- **Graphe valué** : à chaque arc est associée une valeur (nombre).

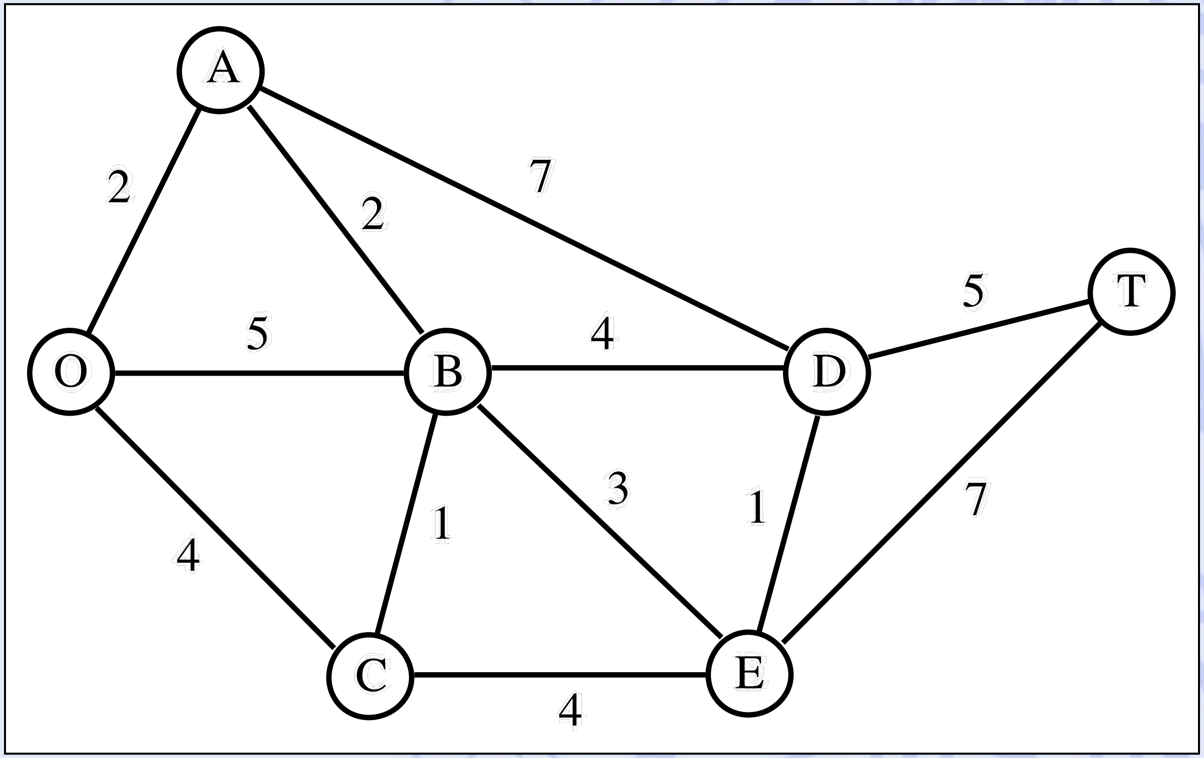
Graphe non orienté

$$G = (X, E)$$

- X : ensemble fini d'éléments appelés **sommets**,
- E : ensemble de paires de sommets dont les éléments sont appelés **arêtes**.
- **Graphe simple :**
  - Au plus une arête entre deux sommets,
  - Pas de boucles.
- Graphe orienté symétrique.

Exemple 2

- Dans une réserve naturelle :
  - Sommets : Postes de surveillance/attractions (O: entrée).
  - Arêtes : Routes.
  - Valeurs : Longueurs des routes (km).



Chemins les plus courts et les plus longs dans un graphe valué

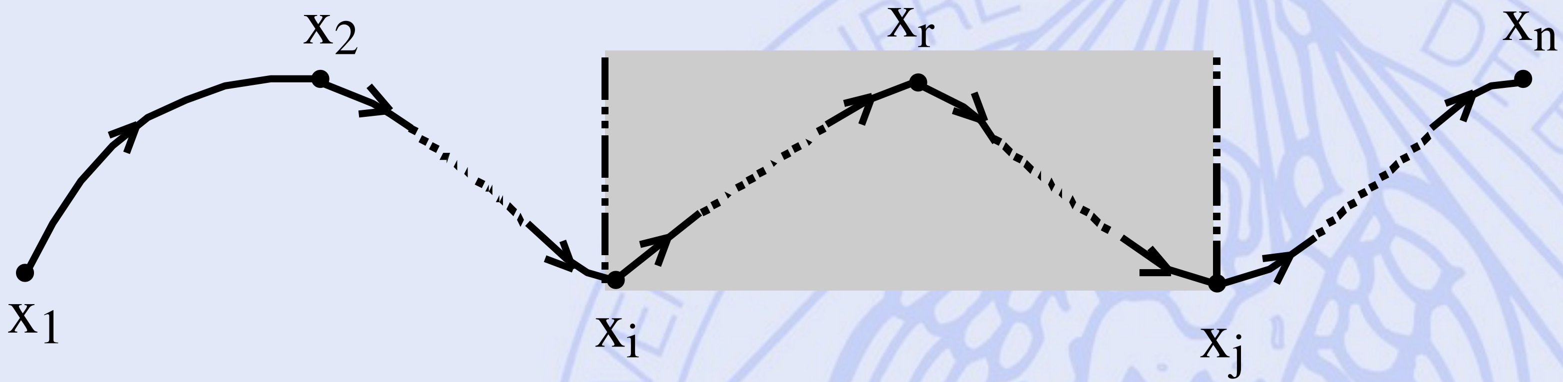
- Graphe orienté valué.
  - Valeurs : longueurs, coûts, durées, délais, …
- Problème : Chercher un chemin d'un sommet x_1 vers un sommet x_n de telle sorte que la somme des valeurs des arcs qui composent ce chemin ('longueur du chemin') soit minimum (ou maximum).

Hypothèses

- Pour un problème à maximum, pas de circuits de valeur positive.
- Pour un problème à minimum, pas de circuits de valeur négative.
- Notations :
  - arc $(x_i,x_j) \leftrightarrow$ valeur c_{ij}
  - Pour un problème à maximum : $\begin{cases} c_{ij} = -\infty & \text{si } (x_i,x_j) \notin U \text{ et } i \neq j \\ c_{ii} = 0 & \forall i \end{cases}$
  - Pour un problème à minimum : $\begin{cases} c_{ij} = +\infty & \text{si } (x_i,x_j) \notin U \text{ et } i \neq j \\ c_{ii} = 0 & \forall i \end{cases}$
  - Passage de minimum à maximum : $c'_{ij} = -c_{ij} \quad , \quad \forall i,j$

Algorithme de Bellman-Kalaba

- Principe d’optimalité de Bellman :



- Si le chemin (x_1 , x_2 , … , x_i , … , x_r , … , x_j , … , xn) est optimal entre $x1$ et xn , alors le chemin (x_i , … , x_r , … , x_j) est optimal entre x_i et x_j.

Algorithme de Bellman-Kalaba

- $\lambda_i(k)$ = valeur du chemin optimal de x_1 à x_i en au plus k arcs.

1. $$\begin{cases} \lambda_1(1) = 0 \\ \lambda_i(1) = c_{1i} \quad i = 2, \ldots, n \end{cases}$$
2. Pour $k = 2, 3, \ldots$
$$\begin{cases} \lambda_1(k) = 0 \\ \lambda_i(k) = \min\limits_{j \in \{1,2,\ldots,n\}} \left\{ \lambda_j(k-1) + c_{ji} \right\} \end{cases}$$
3. Arrêt de l'algorithme quand : $\lambda_i(k) = \lambda_i(k-1) \quad \forall\, i$

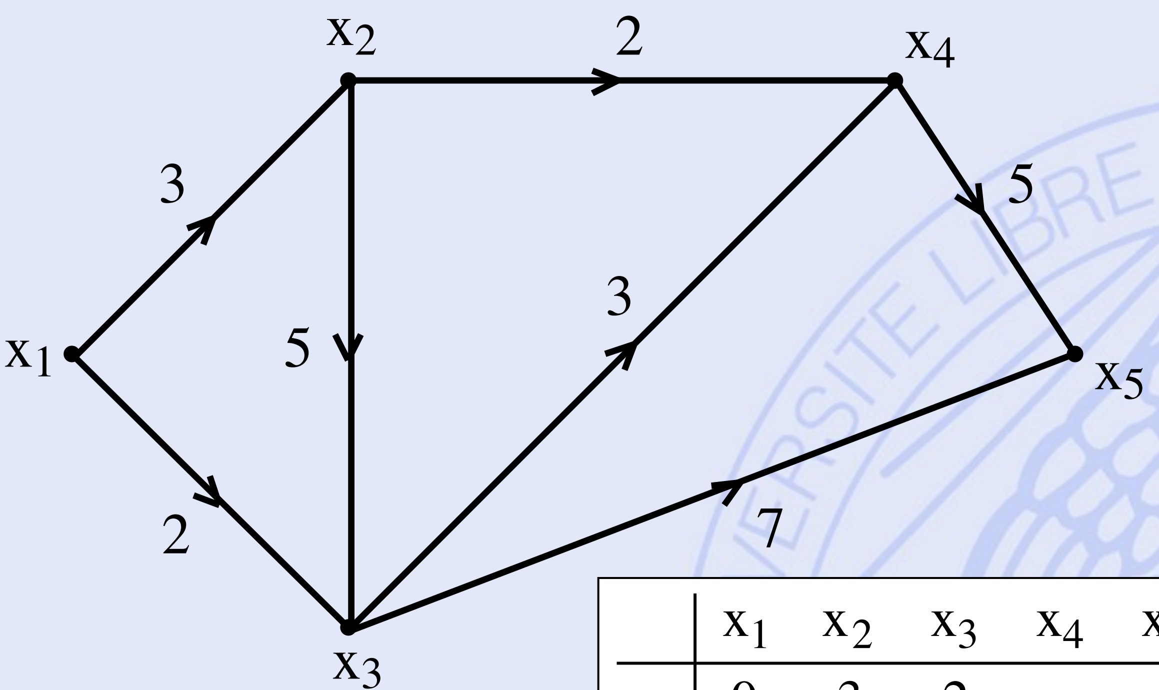
Algorithme de Bellman-Kalaba

- Convergence :
  Arrêt de l'algorithme après au plus n-1 étapes.

- Recherche de chemins les plus longs :
  Adaptation du point 2 :

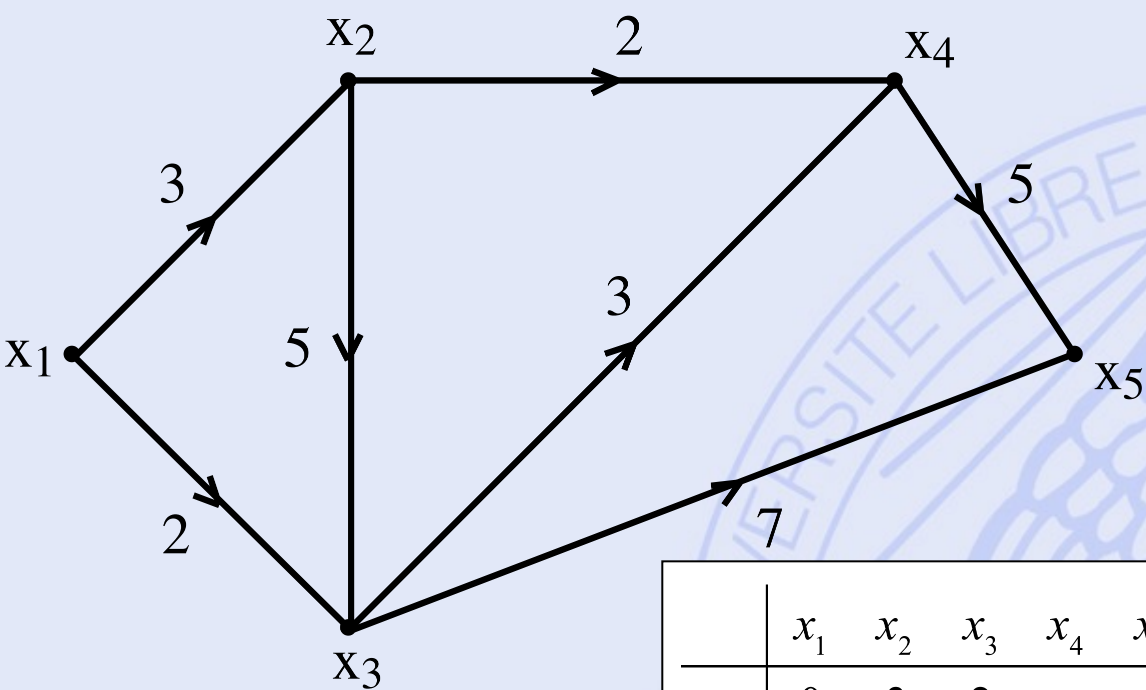
$$\lambda_i(k) = \max_j \left\{ \lambda_j(k-1) + c_{ji} \right\}$$

Exemple 3



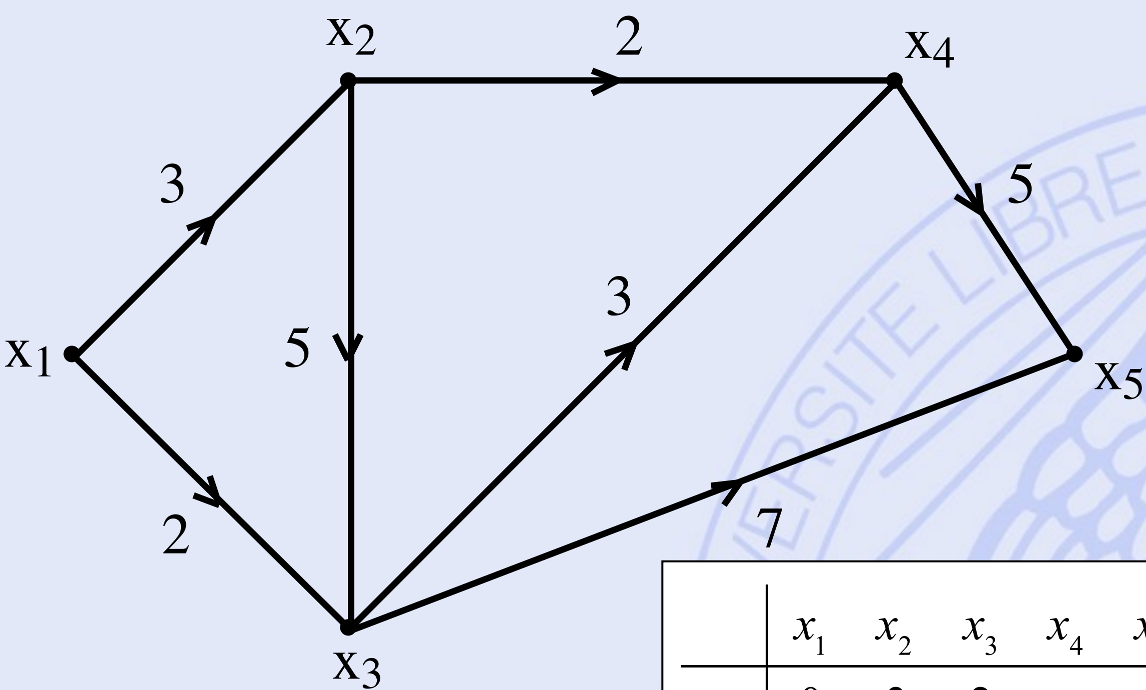
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\lambda_i(1)$	$\lambda_i(2)$	$\lambda_i(3)$
x_1	0	3	2	∞	∞			
x_2	∞	0	5	2	∞			
x_3	∞	∞	0	3	7			
x_4	∞	∞	∞	0	5			
x_5	∞	∞	∞	∞	0			

Exemple 3



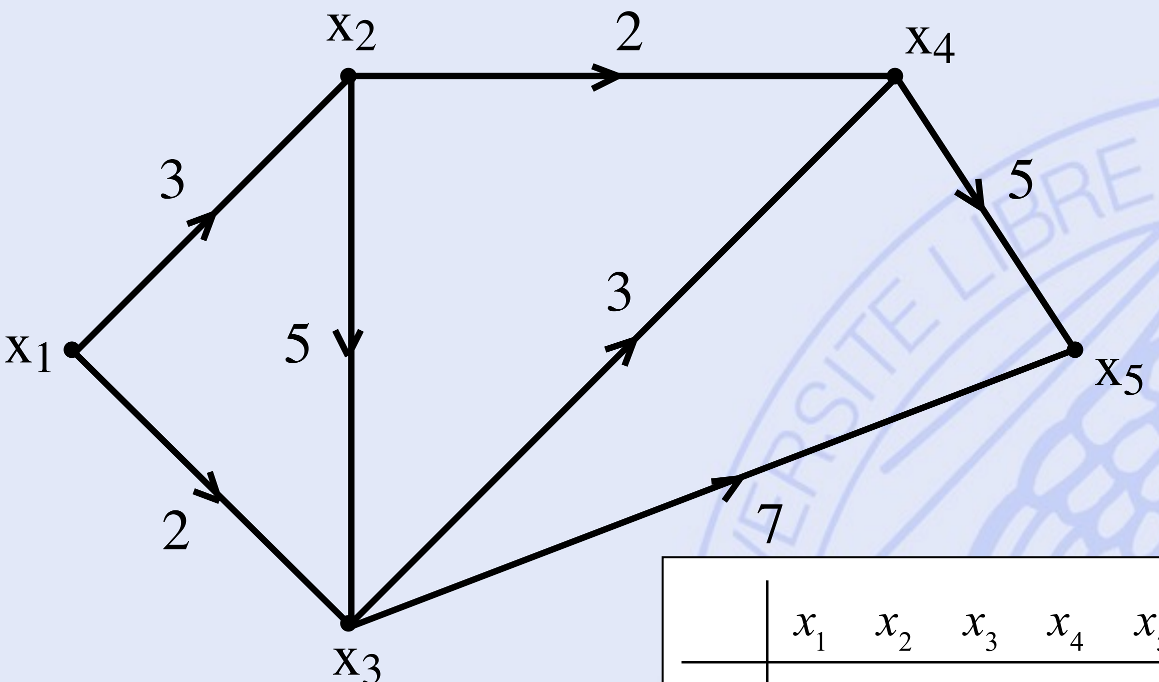
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\lambda_i(1)$	$\lambda_i(2)$	$\lambda_i(3)$
x_1	0	3	2	∞	∞	0		
x_2	∞	0	5	2	∞	3		
x_3	∞	∞	0	3	7	2		
x_4	∞	∞	∞	0	5	∞		
x_5	∞	∞	∞	∞	0	∞		

Exemple 3



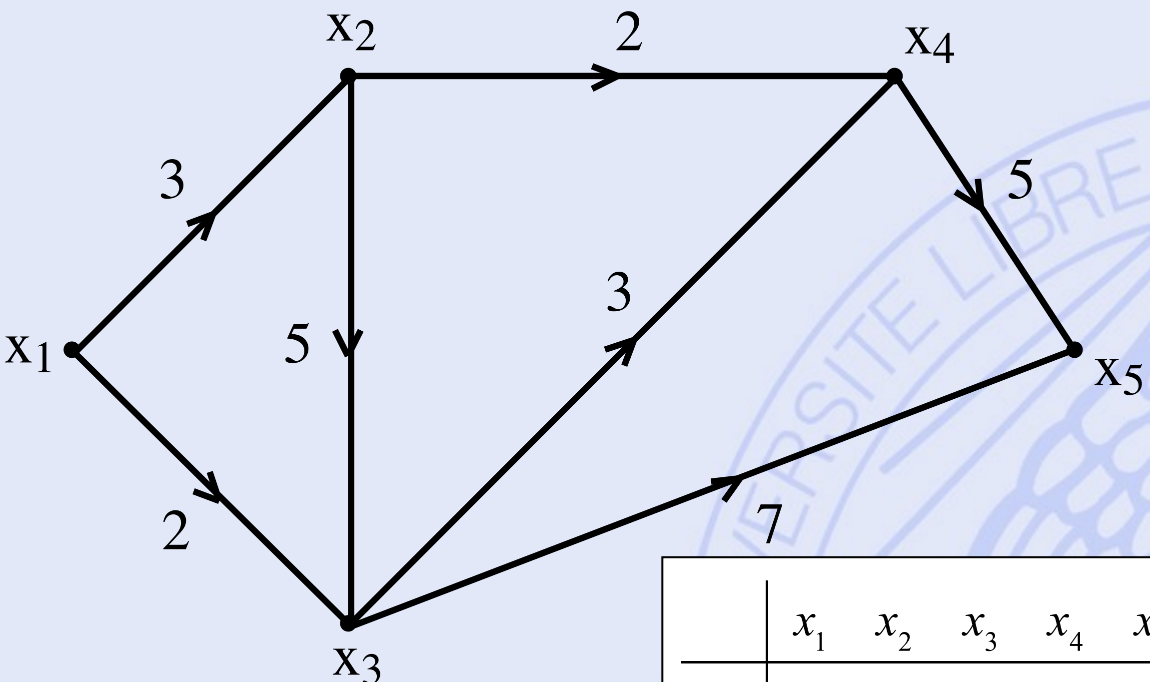
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\lambda_i(1)$	$\lambda_i(2)$	$\lambda_i(3)$
x_1	0	3	2	∞	∞	0	0	
x_2	∞	0	5	2	∞	3		
x_3	∞	∞	0	3	7	2		
x_4	∞	∞	∞	0	5	∞		
x_5	∞	∞	∞	∞	0	∞		

Exemple 3



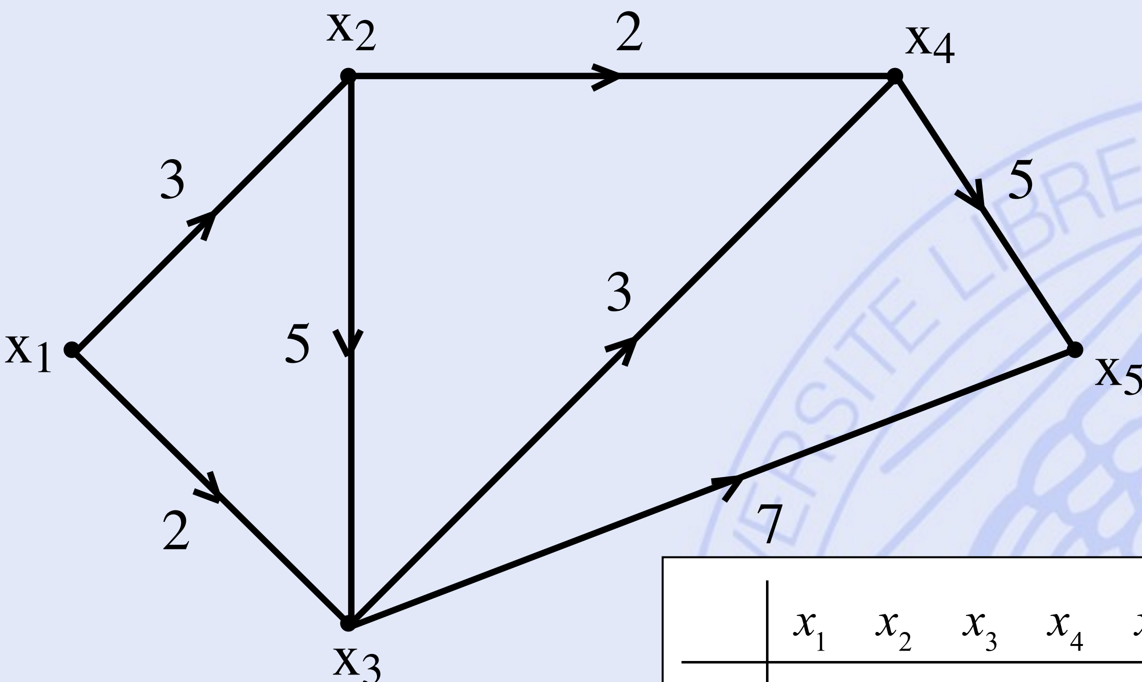
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\lambda_i(1)$	$\lambda_i(2)$	$\lambda_i(3)$
x_1	0	3	2	∞	∞	0	0	
x_2	∞	0	5	2	∞	3	3	
x_3	∞	∞	0	3	7	2	2	
x_4	∞	∞	∞	0	5	∞		
x_5	∞	∞	∞	∞	0	∞		

Exemple 3



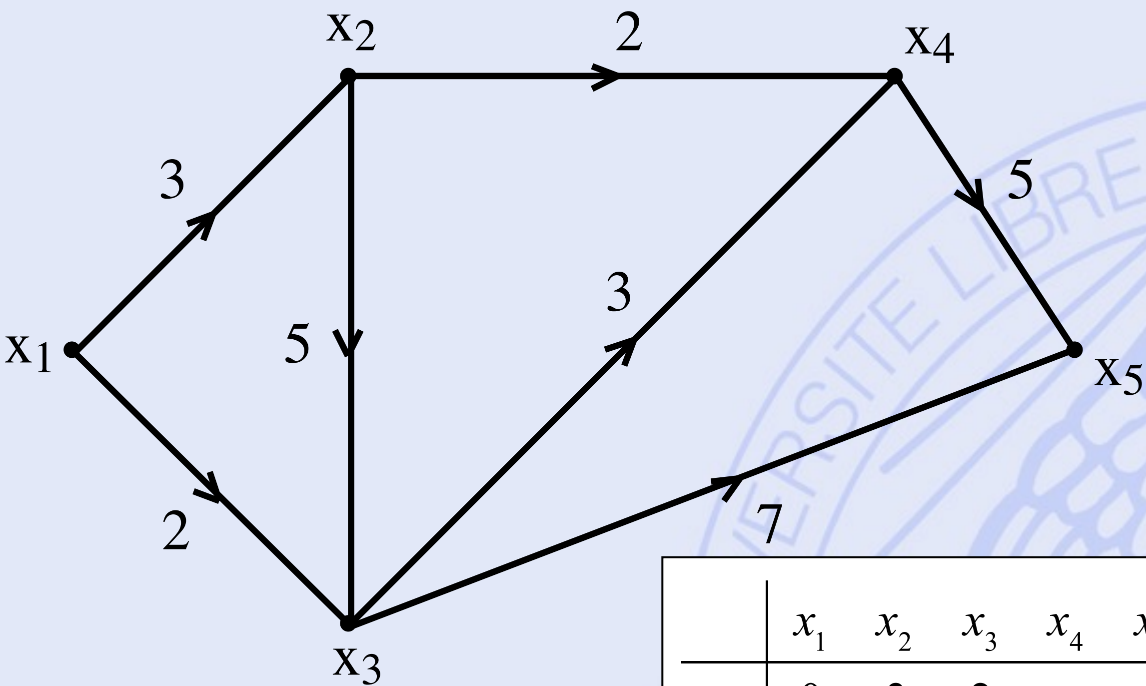
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\lambda_i(1)$	$\lambda_i(2)$	$\lambda_i(3)$
x_1	0	3	2	∞	∞	0	0	
x_2	∞	0	5	2	∞	3	3	
x_3	∞	∞	0	3	7	2	2	
x_4	∞	∞	∞	0	5	∞	5	
x_5	∞	∞	∞	∞	0	∞		

Exemple 3



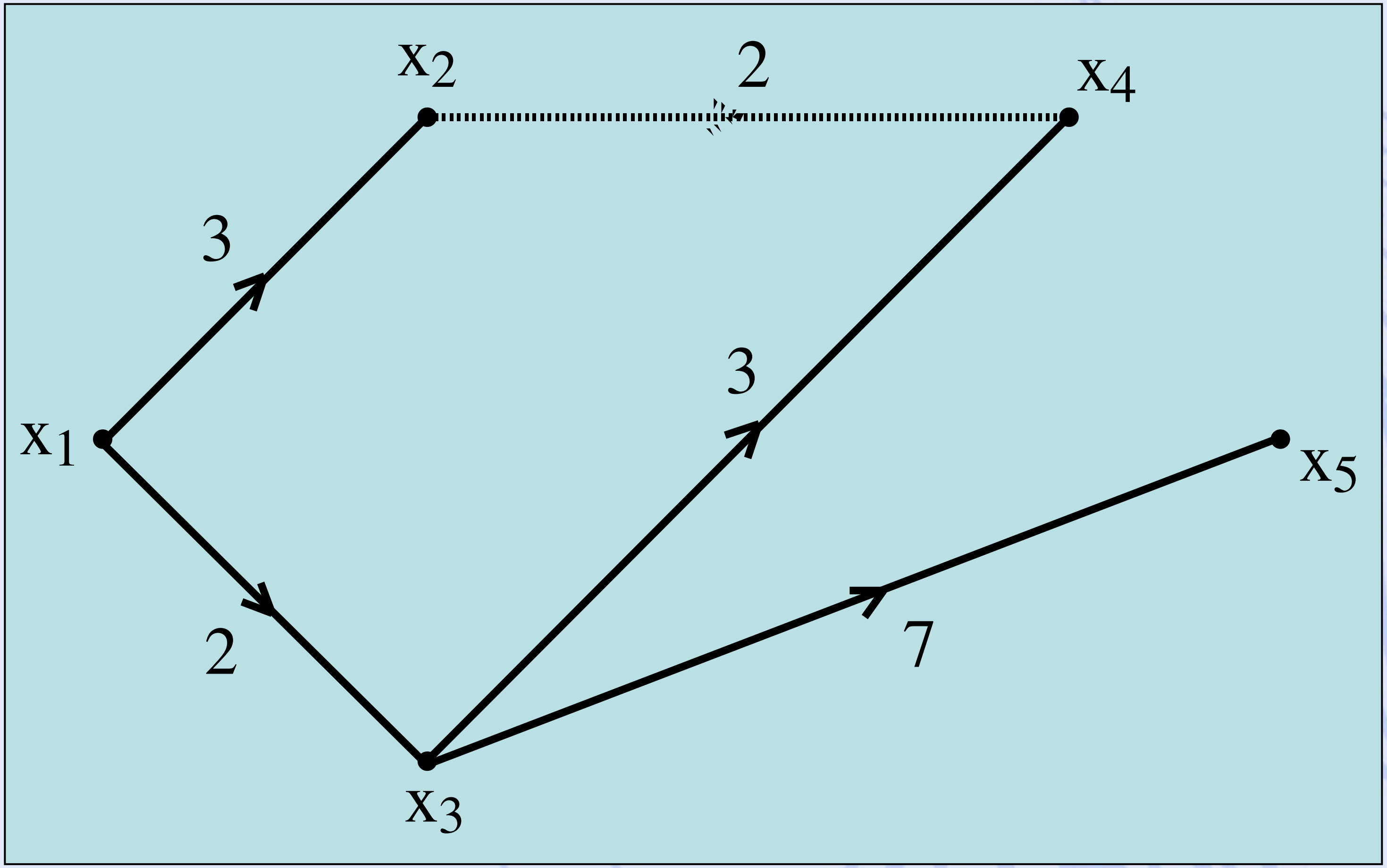
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\lambda_i(1)$	$\lambda_i(2)$	$\lambda_i(3)$
x_1	0	3	2	∞	∞	0	0	0
x_2	∞	0	5	2	∞	3	3	
x_3	∞	∞	0	3	7	2	2	
x_4	∞	∞	∞	0	5	∞	5	
x_5	∞	∞	∞	∞	0	∞	9	

Exemple 3



	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\lambda_i(1)$	$\lambda_i(2)$	$\lambda_i(3)$
x_1	0	3	2	∞	∞	0	0	0
x_2	∞	0	5	2	∞	3	3	3
x_3	∞	∞	0	3	7	2	2	2
x_4	∞	∞	∞	0	5	∞	5	5
x_5	∞	∞	∞	∞	0	∞	9	9

Arborescence des chemins les plus courts



Plan du cours

1. Introduction
   - Historique, modélisation
2. Aide multicritère à la décision
   - Choix social
   - Méthodes PROMETHEE et GAIA
3. Quelques problèmes de la théorie des graphes
   - Définitions, terminologie
   - Chemins les plus courts et les plus longs
4. Gestion de projet (ordonnancement)
   - Méthode du chemin critique
   - Contraintes cumulatives
   - Méthode PERT

A. Définition du problème

- **Réalisation en un temps minimum** d'un **projet** comportant un certain nombre de **tâches** à effectuer, en tenant compte de **contraintes** éventuelles sur l'enchaîne-ment des tâches ou sur les moyens à mettre en oeuvre.
- Exemples :
  - Construction d'une maison, chantier, campagne publicitaire, lancement d'un nouveau produit, …

Un exemple simple pas à pas

- Organisation de la fête de fin d'année.
- Sept tâches à réaliser :
  - A : Elaborer la recette du gâteau (2 jours)
  - B : Préparer le gâteau (1 jour, après A)
  - C : Répéter la chanson (chorale, 5 jours)
  - D : Réserver une salle (3 jours)
  - E : Décorer la salle (4 jours, après D)
  - F : choisir un DJ (2 jours, après D)
  - G : installation DJ (1 jour, après F)

Questions ?

- Si la fête est prévue le 22 décembre, combien de jours à l'avance faut-il s'y prendre ?
- Quel calendrier (ordonnancement des tâches) faut-il suivre pour être prêts le 22 décembre ?
- Peut-on se permettre de prendre du retard sur certaines tâches sans compromettre la date de la fête ?

Ordonnancement

- Déterminer la date de début de chaque tâche (c-à-d un ordonnancement).
- Notations :
  - Tâches : i $\quad i = 1, 2, \ldots, n$
  - Durées : $d(i)$
  - Dates de début : $t(i)$
- Prise en compte de contraintes temporelles et cumulatives.

Contraintes temporelles

- **Postériorité stricte** $$t(j) \geq t(i) + d(i)$$
- Postériorité avec délai $$t(j) \geq t(i) + d(i) + f(i,j)$$
- Postériorité partielle $$t(j) \geq t(i) + \alpha(i,j)d(i)$$
- Localisation temporelle $$t(i) \geq a(i)$$
- Continuité $$t(j) \leq t(i) + t(i,j)$$

Contraintes cumulatives

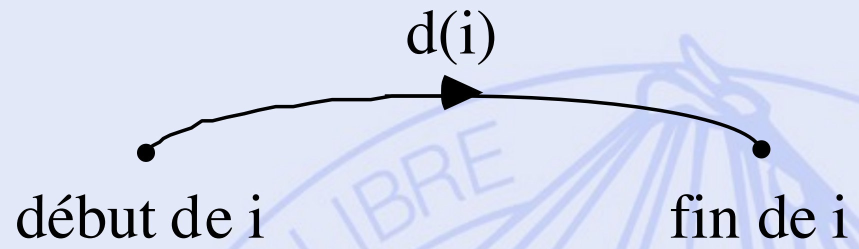
- Limites sur les ressources disponibles pendant la réalisation du projet :
  - Matériel,
  - Budget,
  - Main-d'œuvre.
- Fixes ou variables au cours du temps.

B. Méthode du chemin critique

- Contraintes temporelles uniquement.
- Durées des tâches connues avec certitude.
- Représentation sous forme de graphe valué :
  - Tâches représentées par des arcs.
  - Sommets correspondant à des étapes du projet.

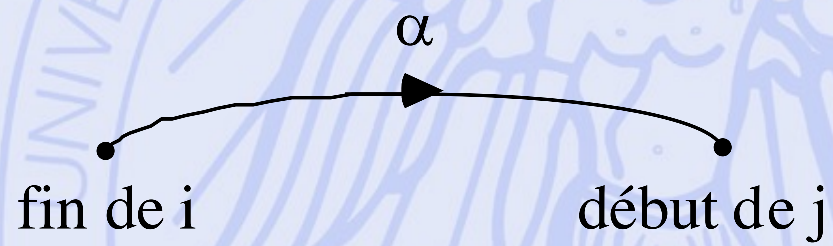
Elaboration du graphe

- Tâche i :



- Contrainte :

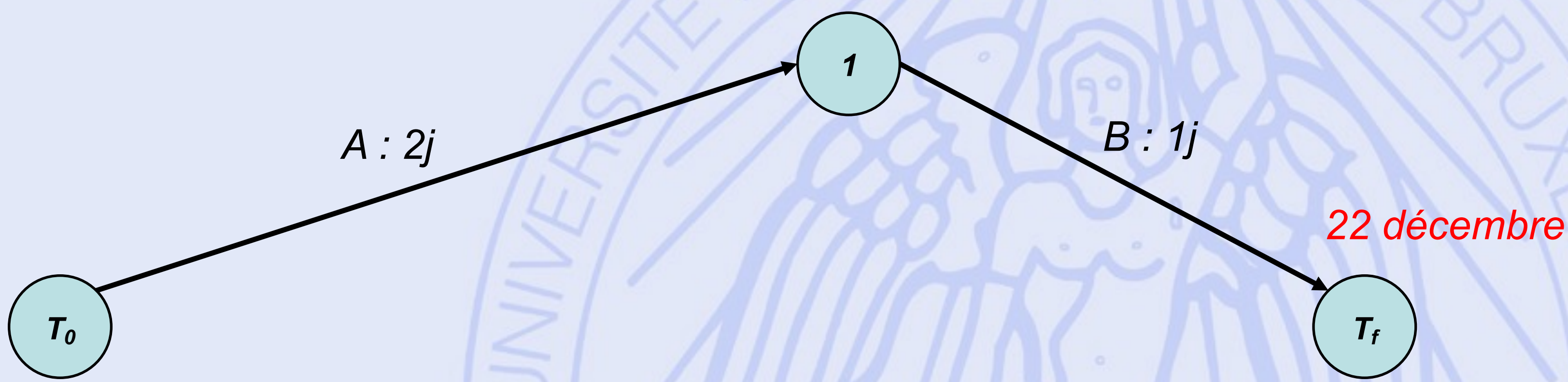
$$t(j) \geq t(i) + d(i) + \alpha$$



- Deux sommets particuliers :
  - Début du projet - étape 0,
  - Fin du projet - étape n+1.

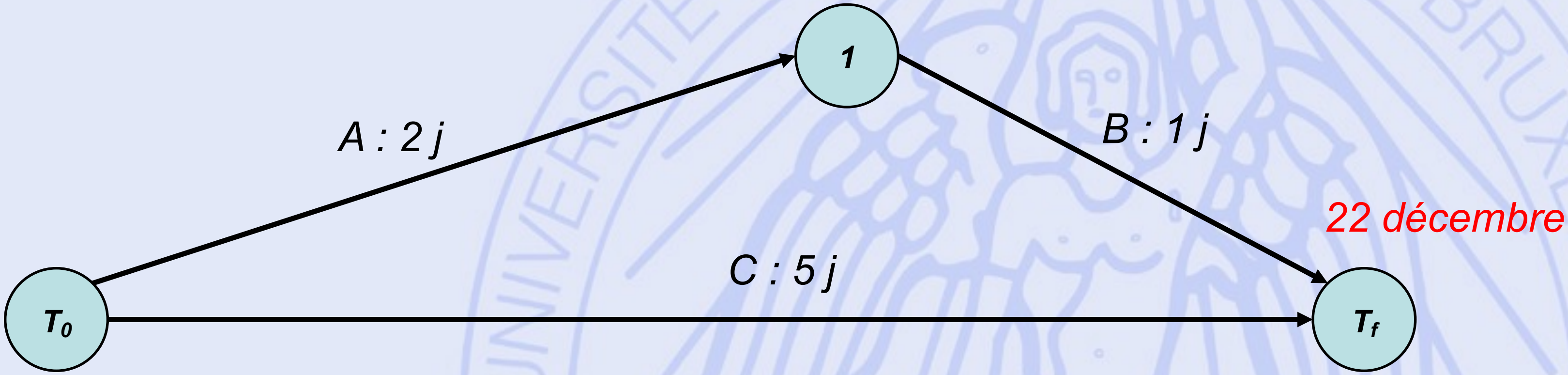
Exemple (1)

- B (prépa. gâteau, 1 jour) après A (recette, 2 jours)
- Temps minimum nécessaire : 3 jours



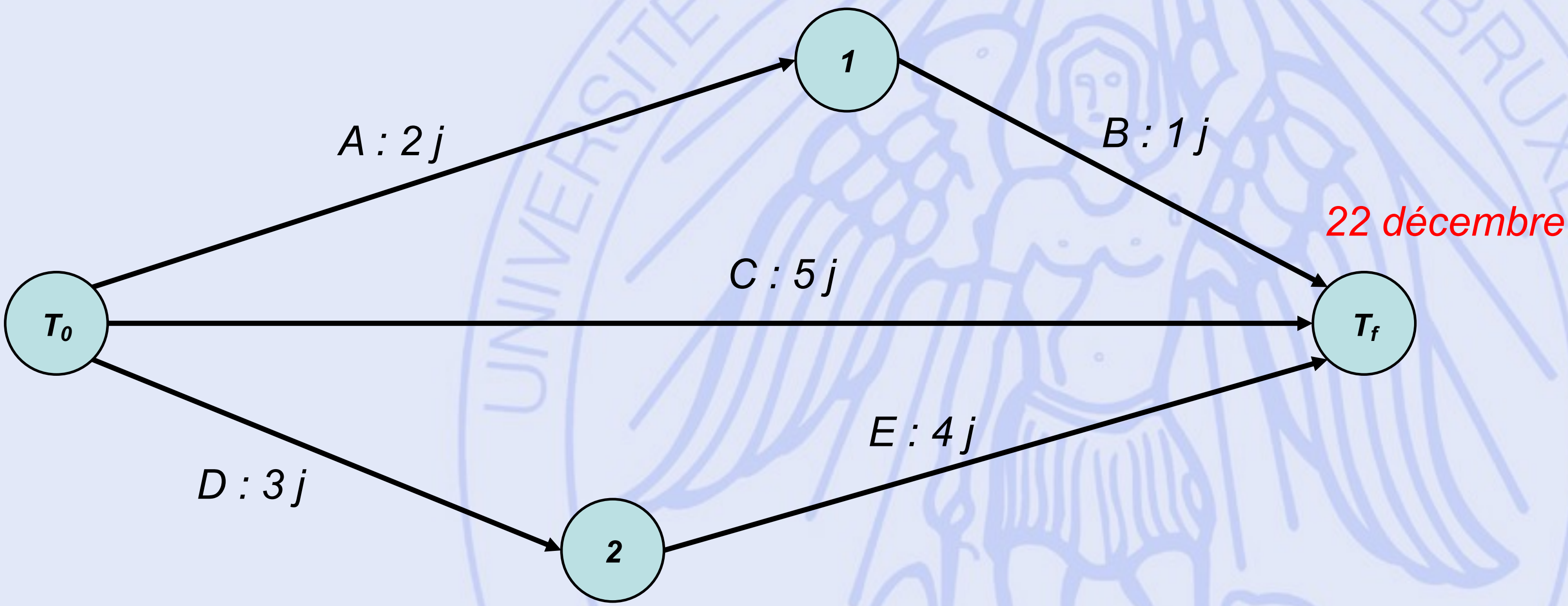
Exemple (2)

- C (répétition chorale, 5 jours)
- Temps minimum nécessaire : 5 jours



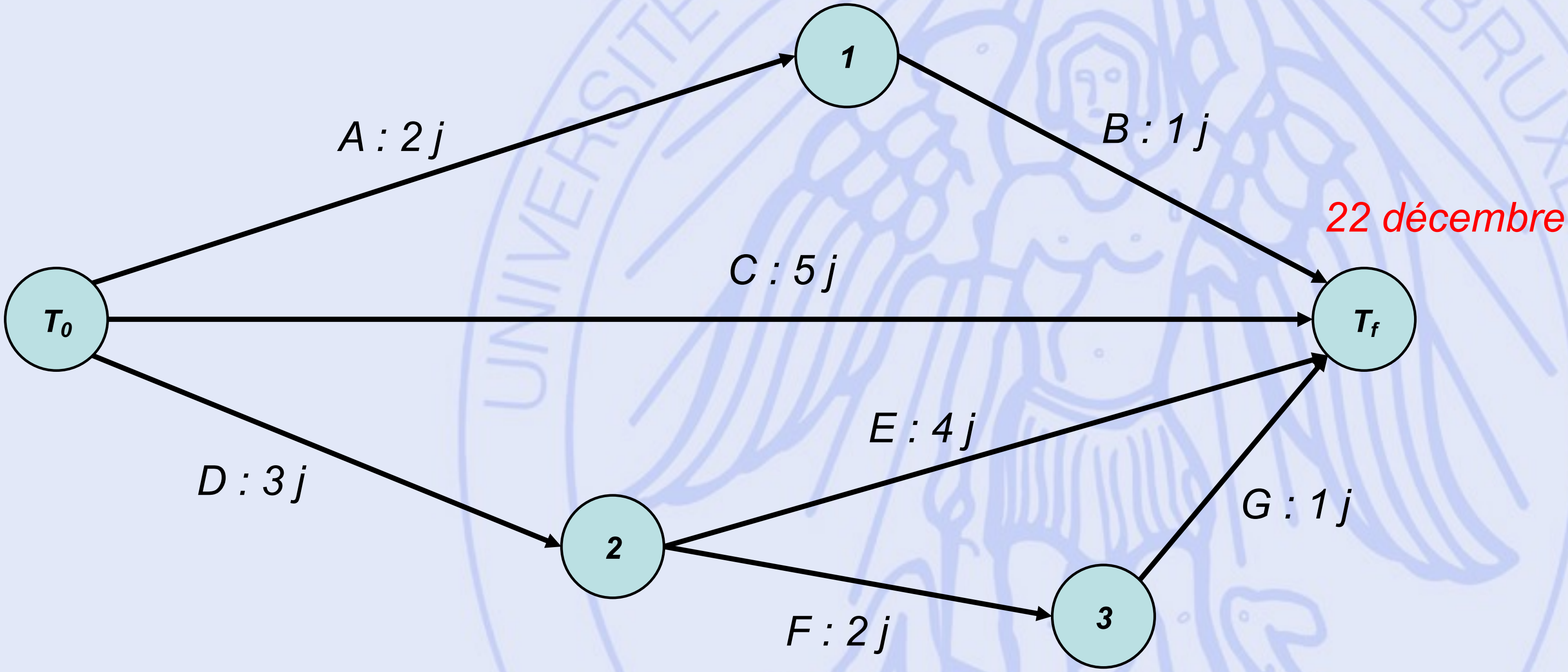
Exemple (3)

- E (déco. salle, 4 jours) après D (rés. salle, 3 jours)
- Temps minimum nécessaire : 7 jours



Exemple (4)

- G (inst. DJ, 1 jour) après F (choix DJ, 2 jours), après D (rés. Salle, 3 jours)
- Temps minimum nécessaire : 7 jours



Ordonnancement au plus tôt

- **ES(i)** = date de début au plus tôt de la tâche i

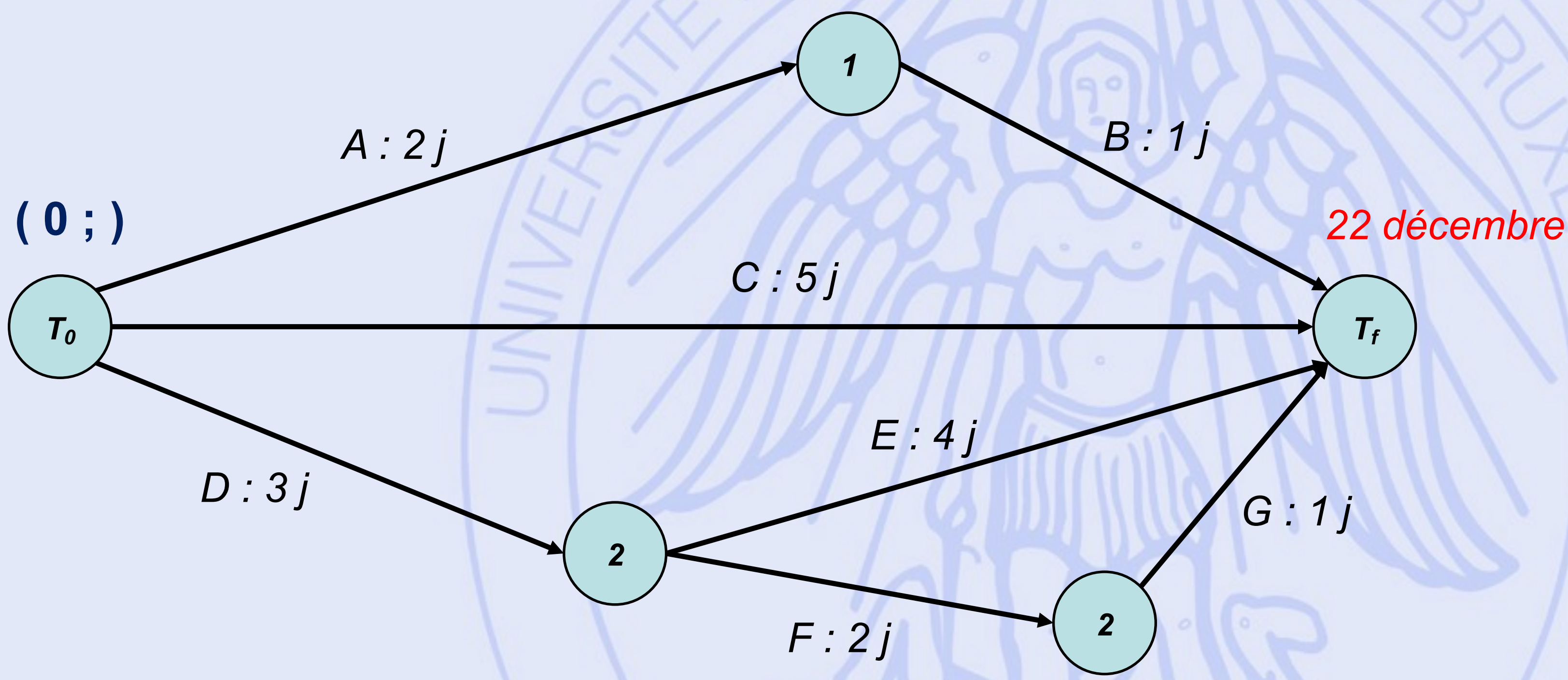
= longueur du chemin le plus long de 0 au début de i

- ES(n+1) = T = durée minimale de réalisation du projet.

- **EF(i)** = date de fin au plus tôt de la tâche i = ES(i) + d(i)

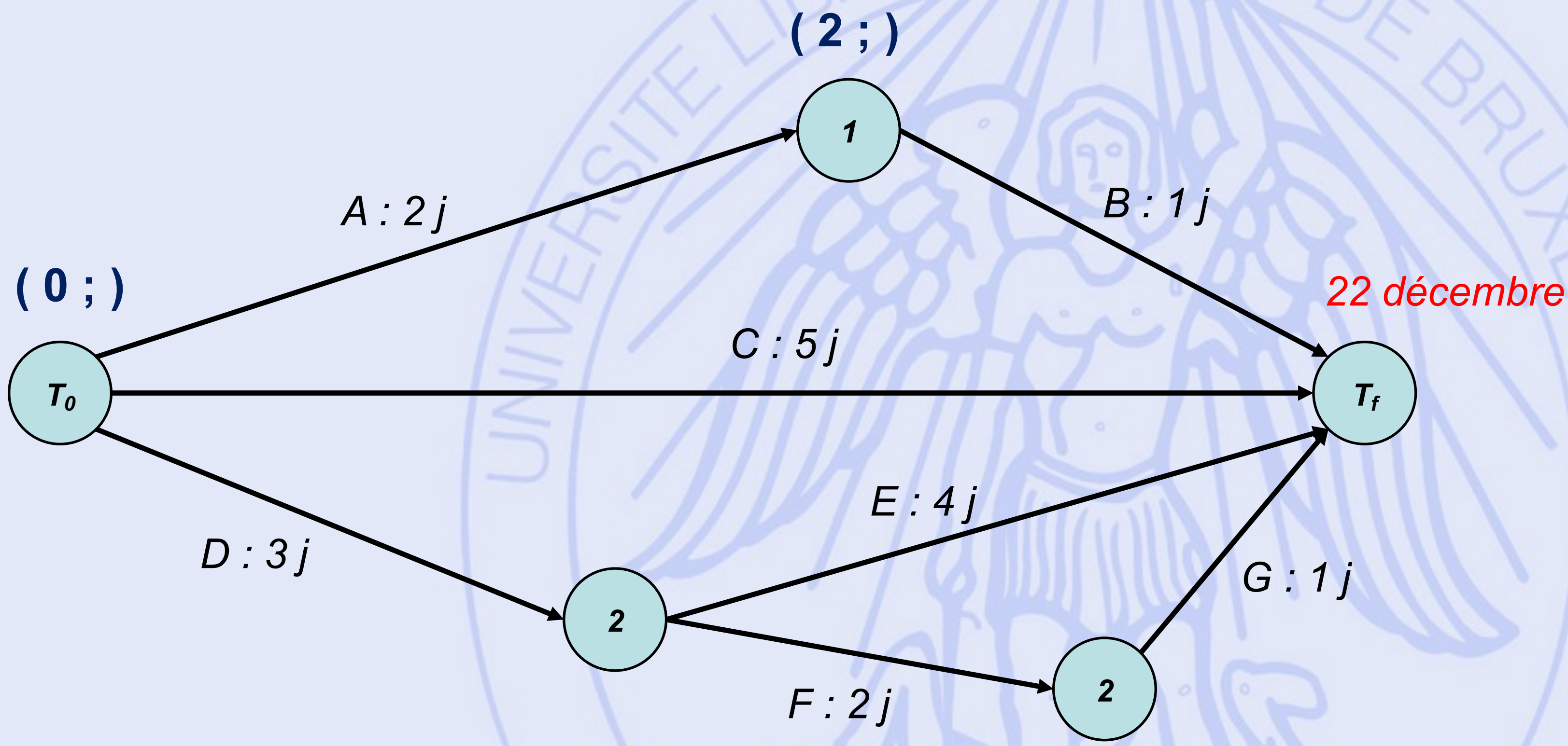
Exemple

- Date au plus tôt pour chaque sommet.
- $T_0 = 0$



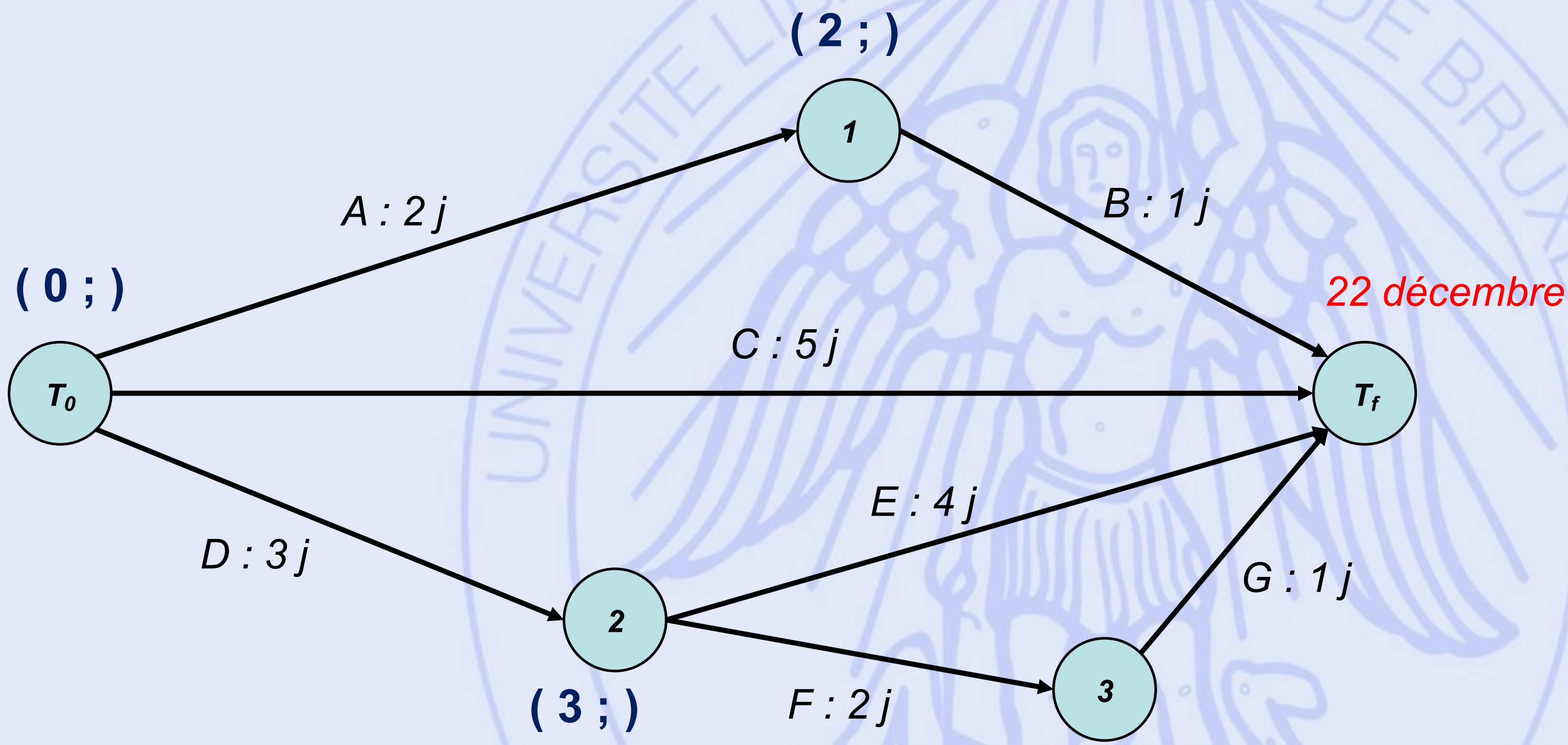
Exemple

- Date au plus tôt pour chaque sommet.
- $T_0 = 0$



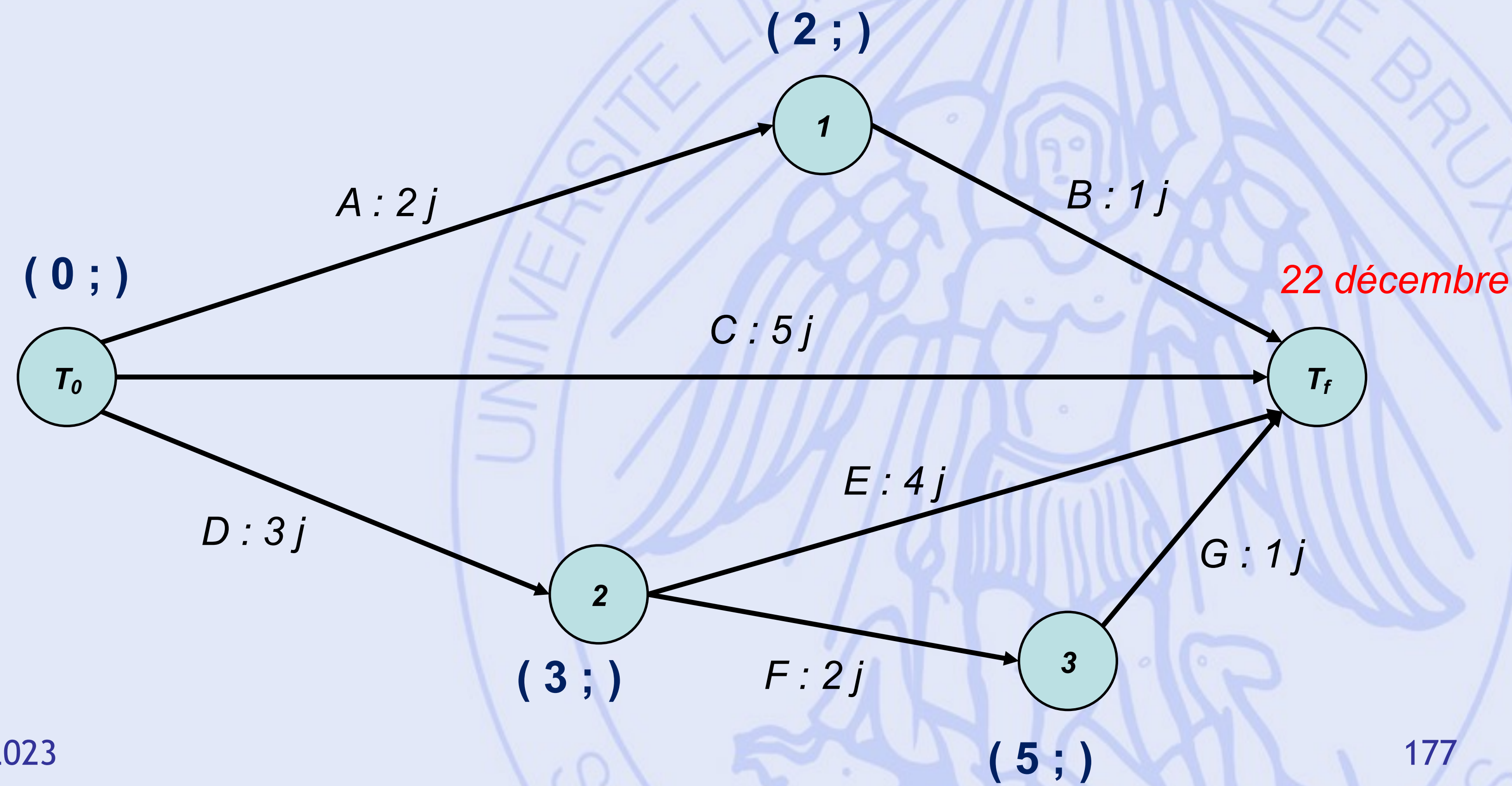
Exemple

- Date au plus tôt pour chaque sommet.
- $T_0 = 0$



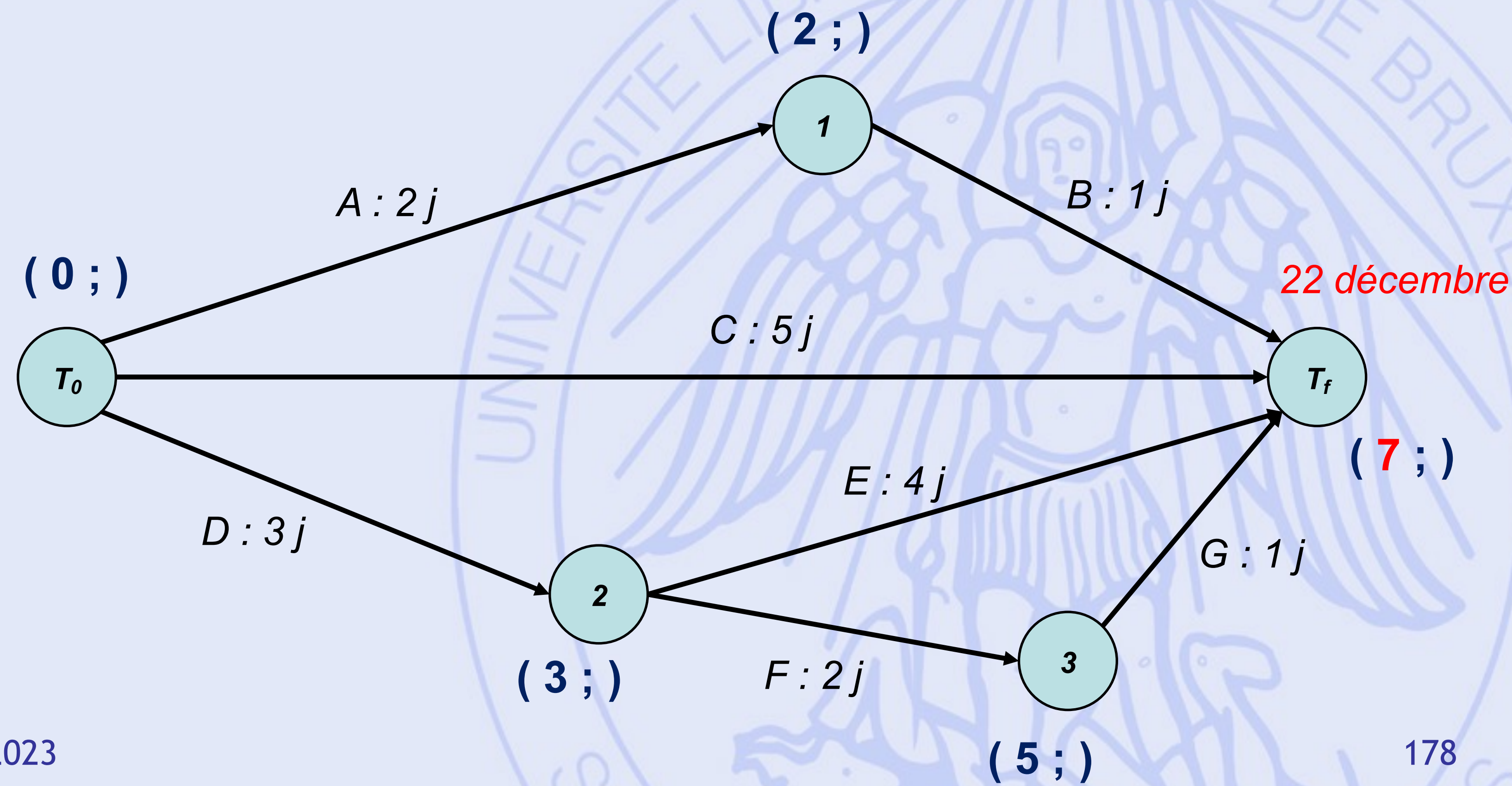
Exemple

- Date au plus tôt pour chaque sommet.
- $T_0 = 0$



Exemple

- Date au plus tôt pour chaque sommet.
- $T_0 = 0$



Ordonnancement au plus tard

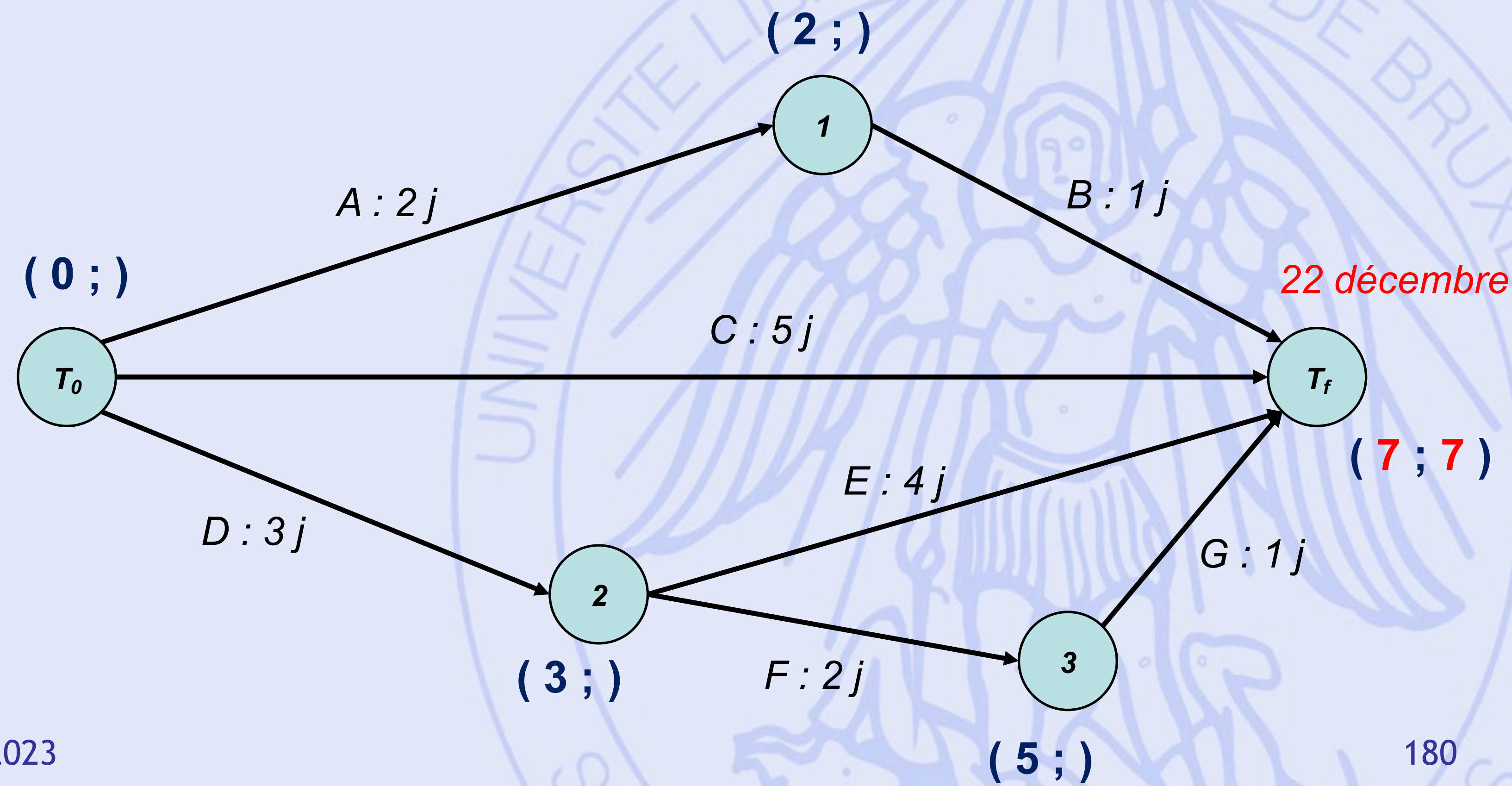
- **LF(i)** = date de fin au plus tard de la tâche i
  (*sans allonger la durée de réalisation T*)

= T – valeur du chemin de valeur maximum de la fin de i à la fin des travaux

- **LS(i)** = date de début au plus tard de la tâche i = LF(i) – d(i)

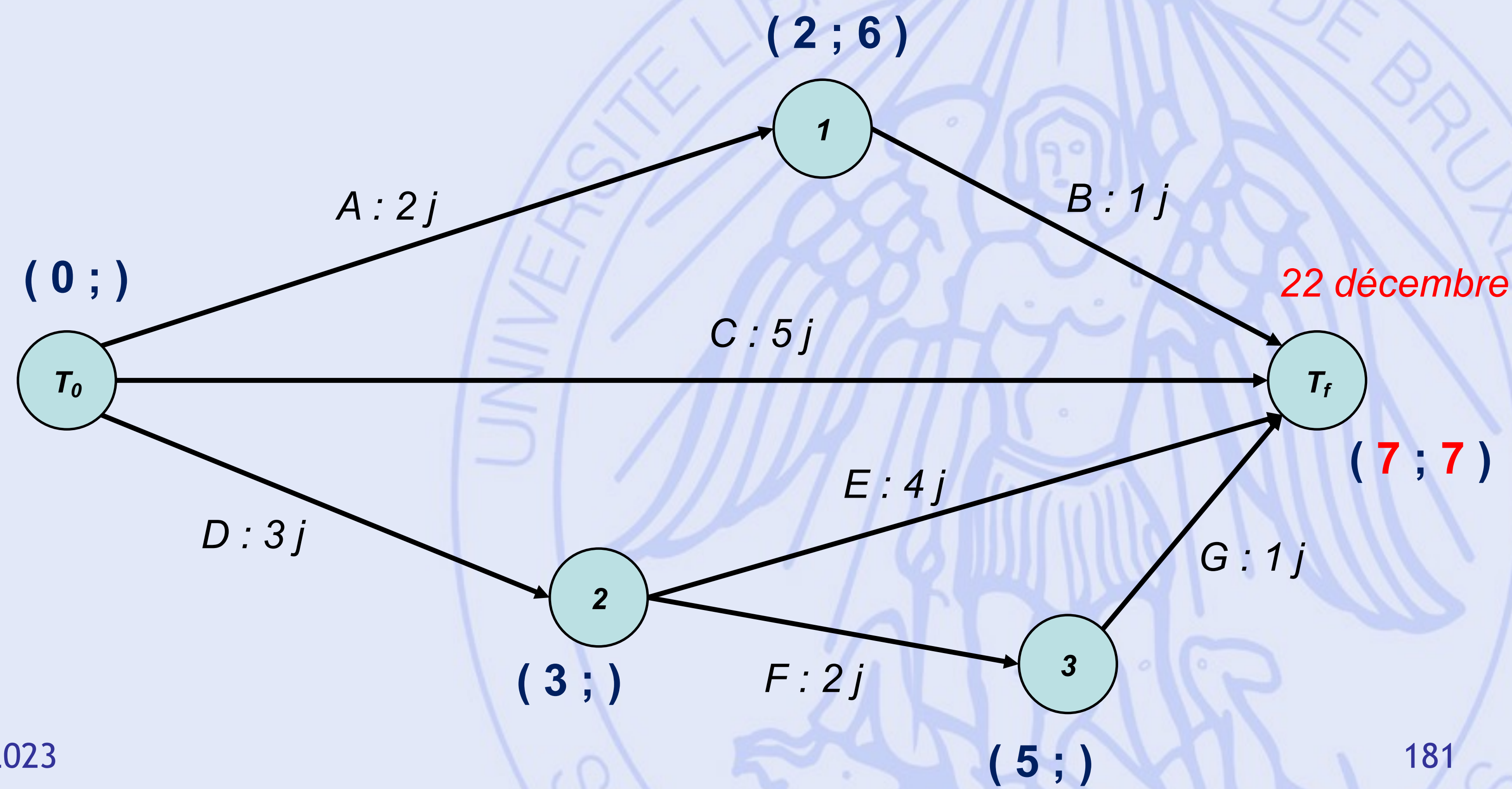
Exemple

- Date au plus tôt pour chaque sommet.
- $T_0 = 0$ - $T_f = 7$



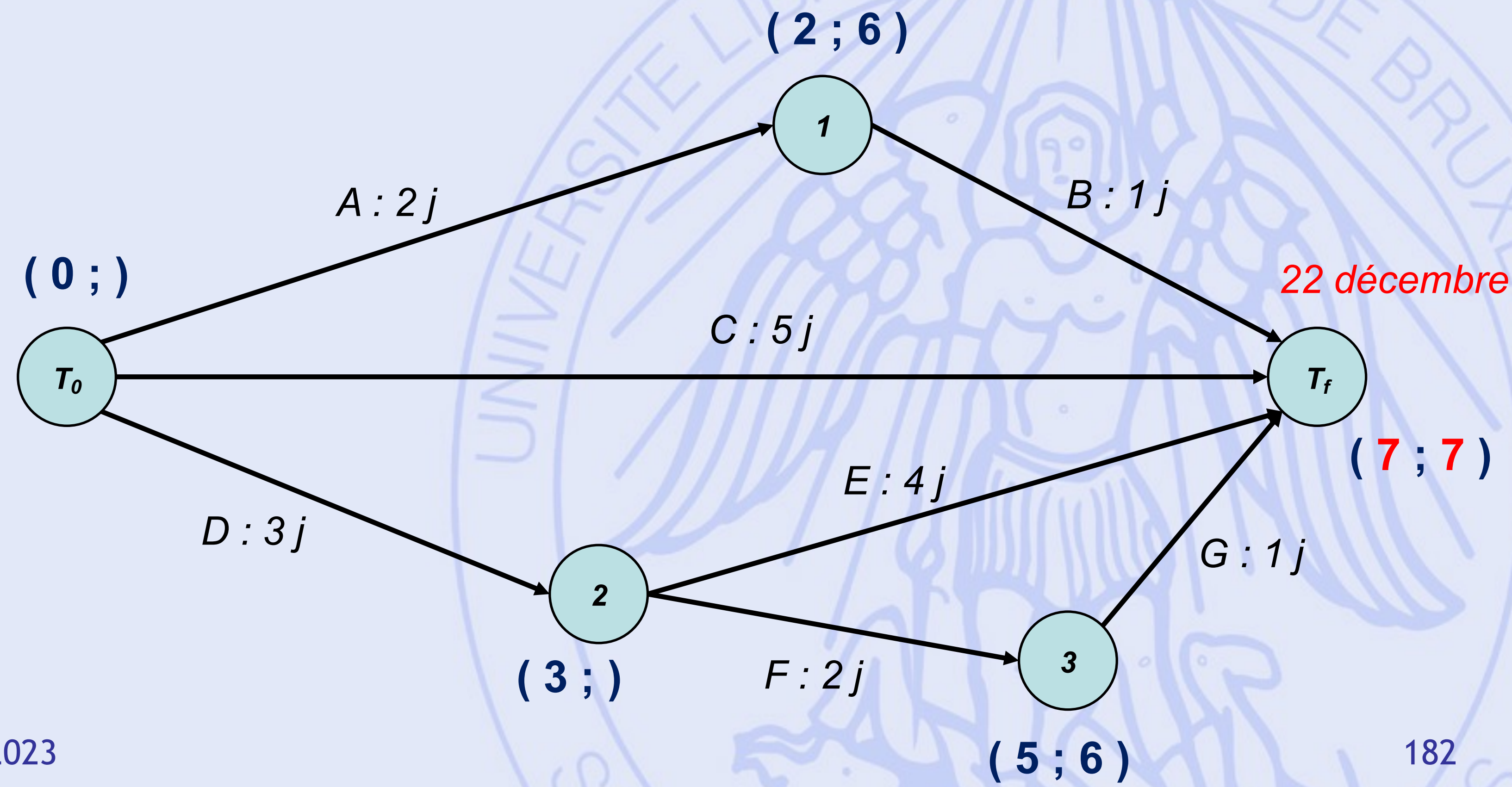
Exemple

- Date au plus tard pour chaque sommet.
- $T_0 = 0$ - $T_f = 7$



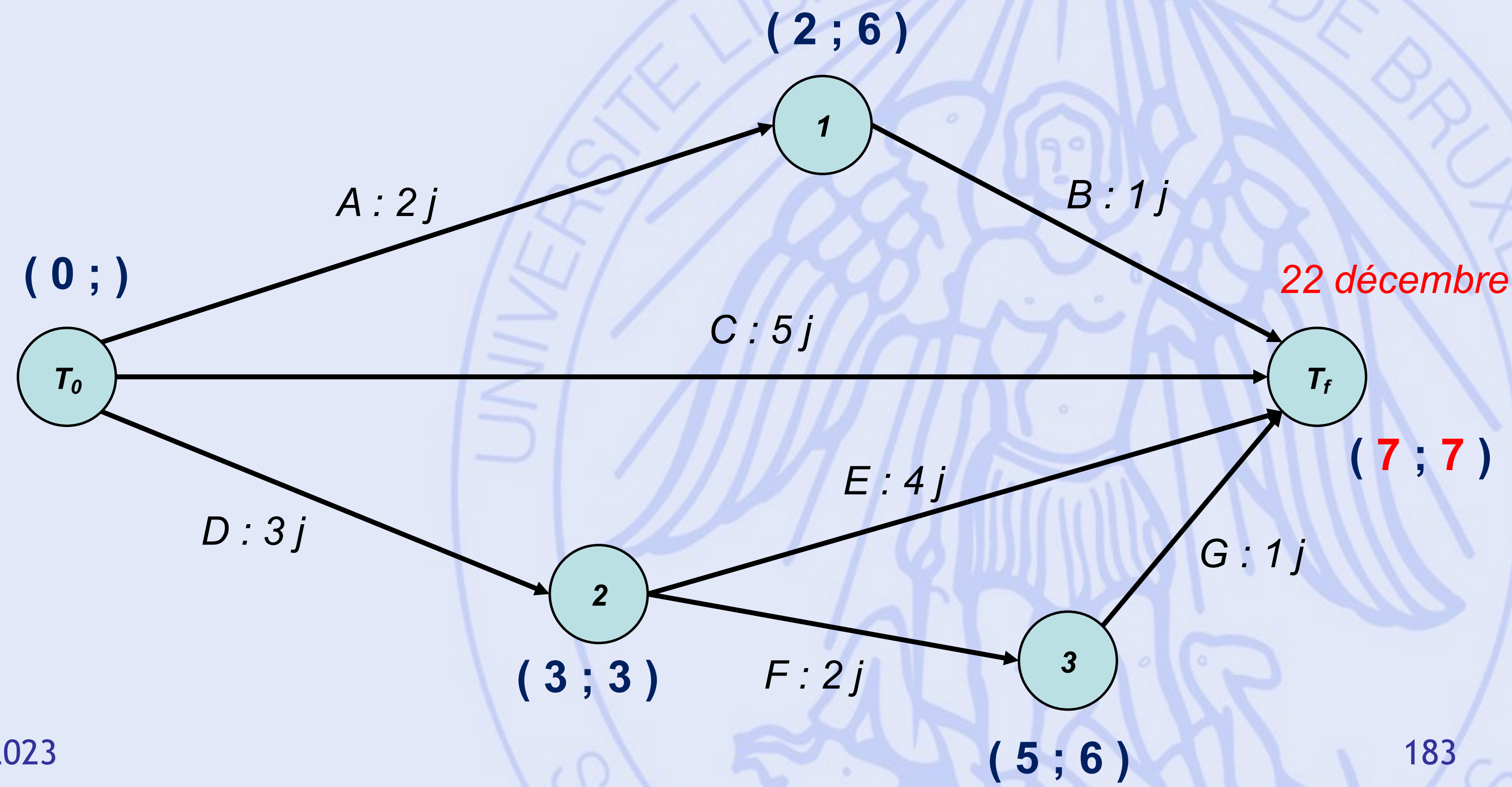
Exemple

- Date au plus tard pour chaque sommet.
- $T_0 = 0$ - $T_f = 7$



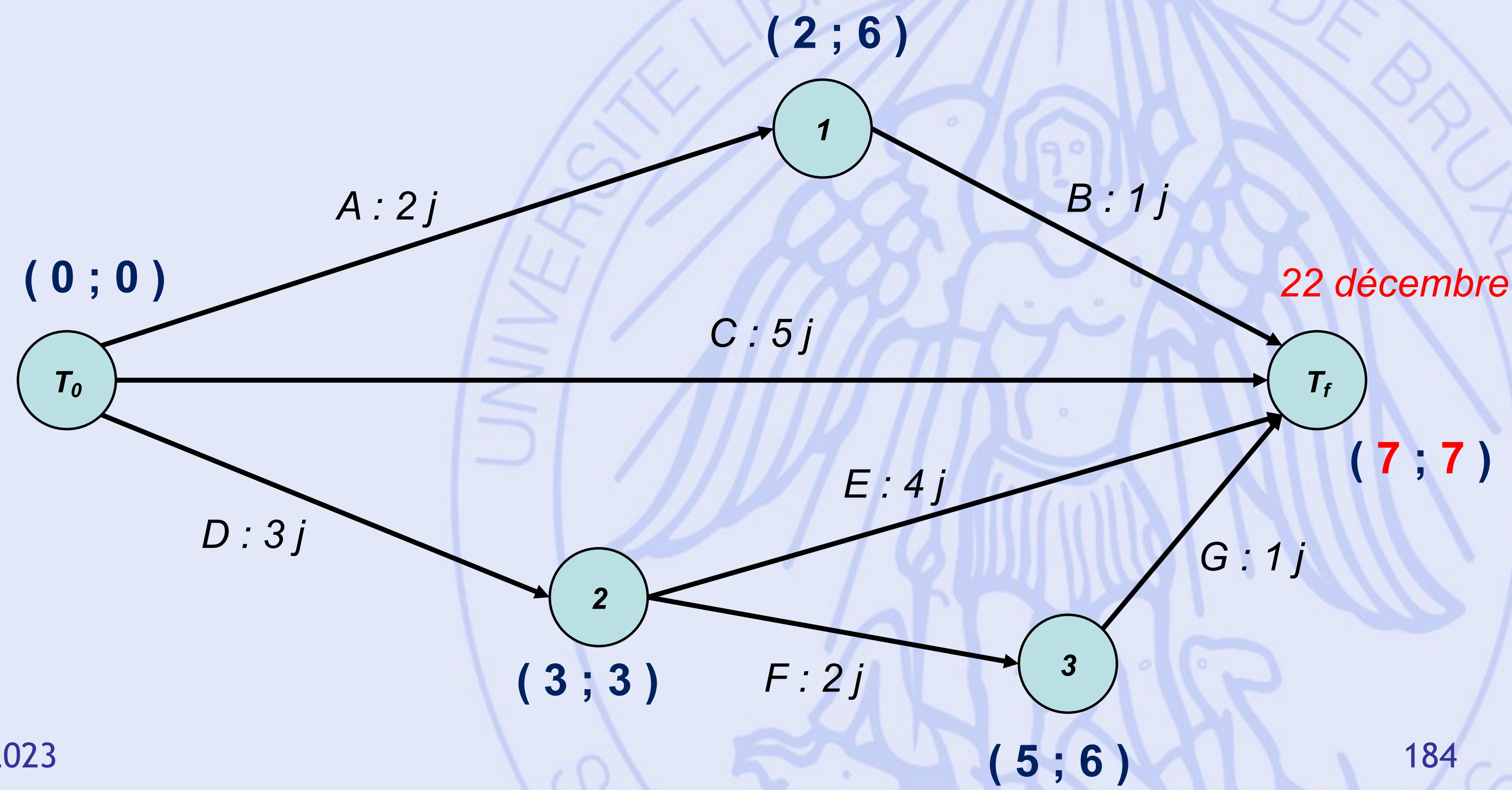
Exemple

- Date au plus tard pour chaque sommet.
- $T_0 = 0$ - $T_f = 7$



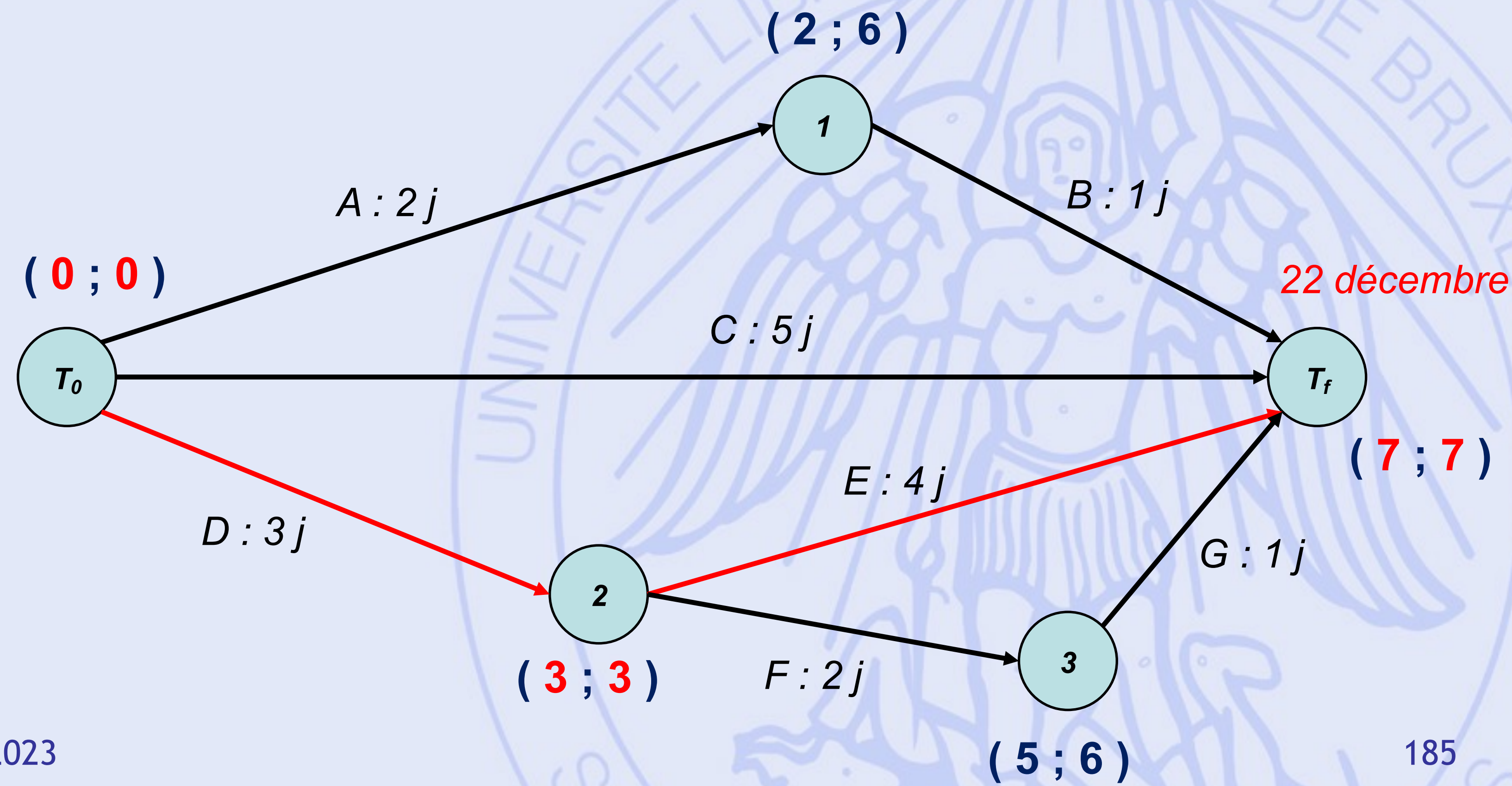
Exemple

- Date au plus tard pour chaque sommet.
- $T_0 = 0$ - $T_f = 7$



Exemple

- Date au plus tard pour chaque sommet.
- $T_0 = 0$ - $T_f = 7$



Calcul

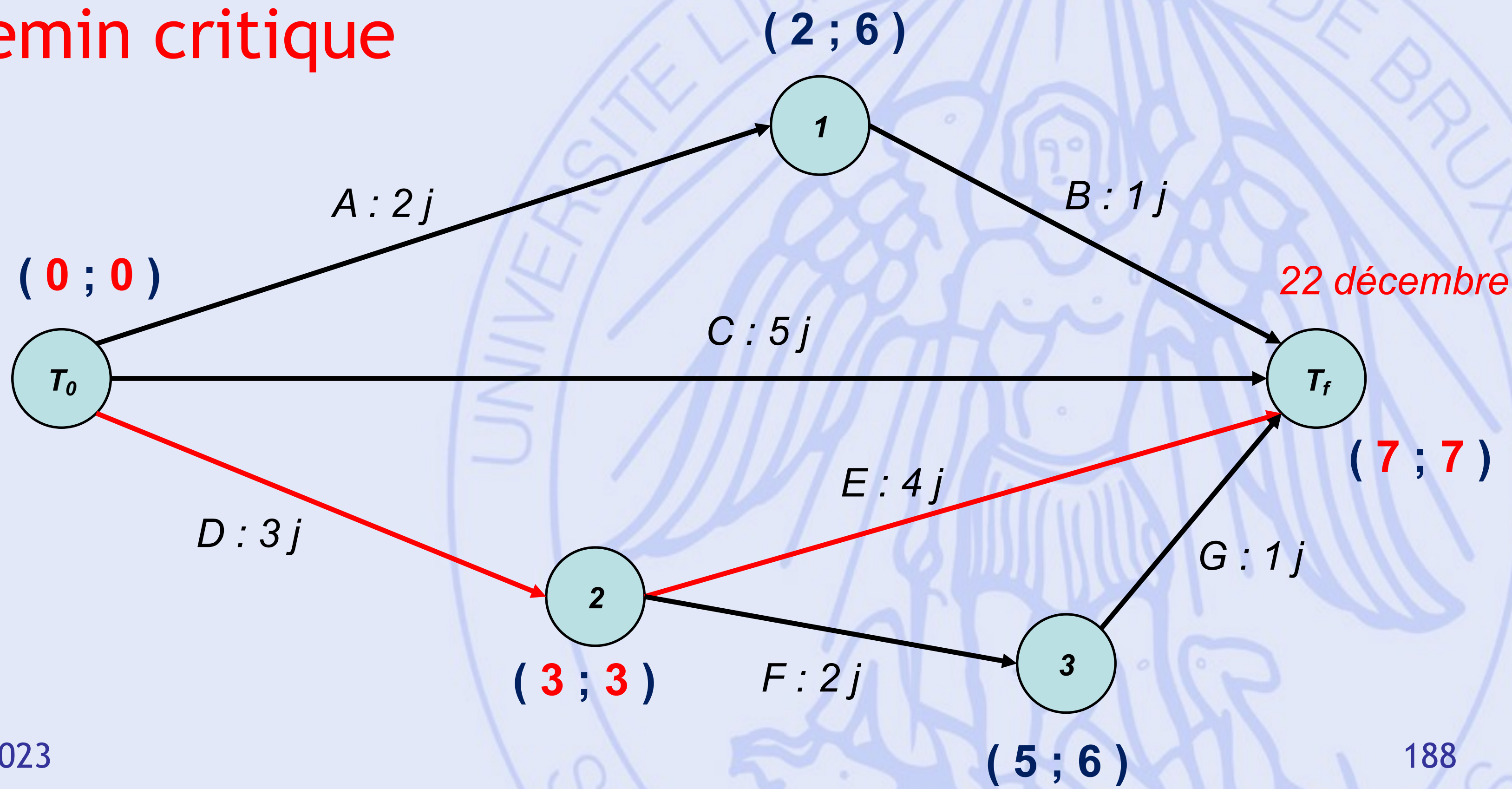
- Forme simplifiée de l'algorithme de Bellman-Kalaba pour un graphe sans circuits.
- Classement des sommets en k niveaux.
- Calcul des dates de début au plus tôt pour les sommets, par niveau décroissant, depuis le début des travaux :
  - $ES(0) = 0$
  - ensuite : $ES(i) = \max \{ ES(j) + c_{ji} \mid j \in \Gamma^{-}(i) \}$
- Puis calcul des dates au plus tard en repartant de la fin des travaux.

Chemin critique

- Le chemin critique est le chemin le plus long entre le début et la fin des travaux.
- Tâches critiques :
  - Tâches situées sur le chemin critique.
  - Tout retard sur une tâche critique rallonge d’autant la durée minimale de réalisation du projet.

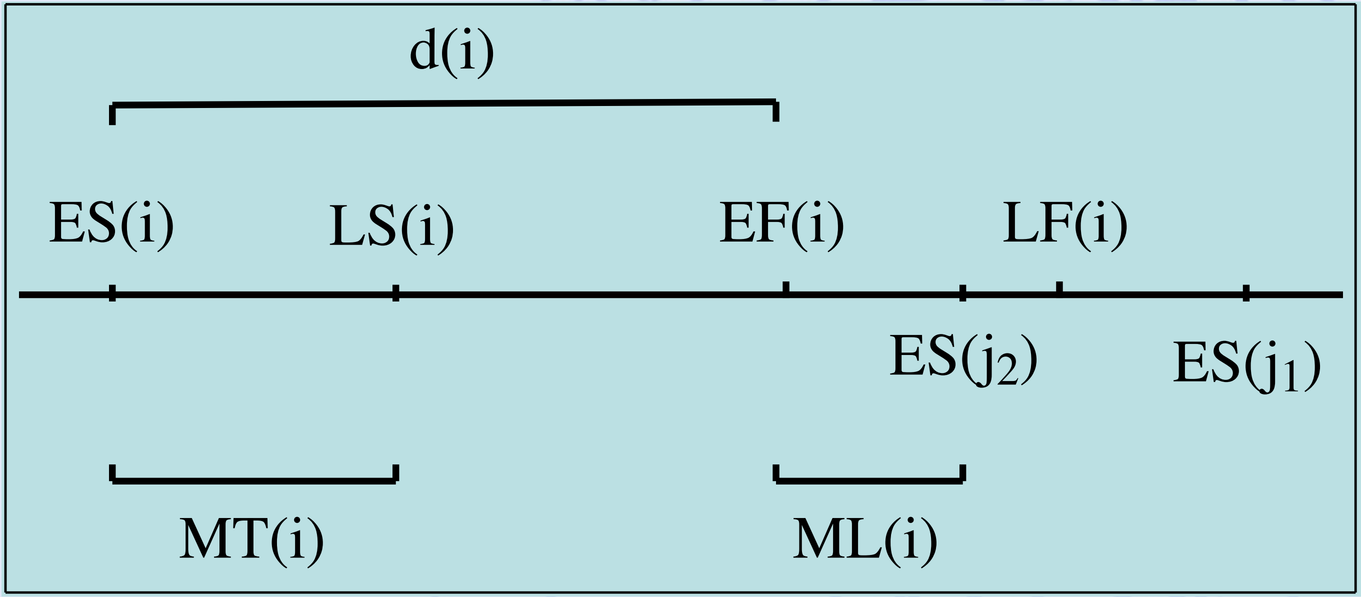
Exemple

- Date au plus tôt pour chaque sommet.
- $T_0 = 0$ - $T_f = 7$
- Chemin critique



Marges

- Retards possibles sur les tâches non-critiques, sans augmenter T ?



Marges

- Marge totale de la tâche i :

  MT(i) = LS(i) – ES(i)

➢ Retard maximum sans augmenter T.

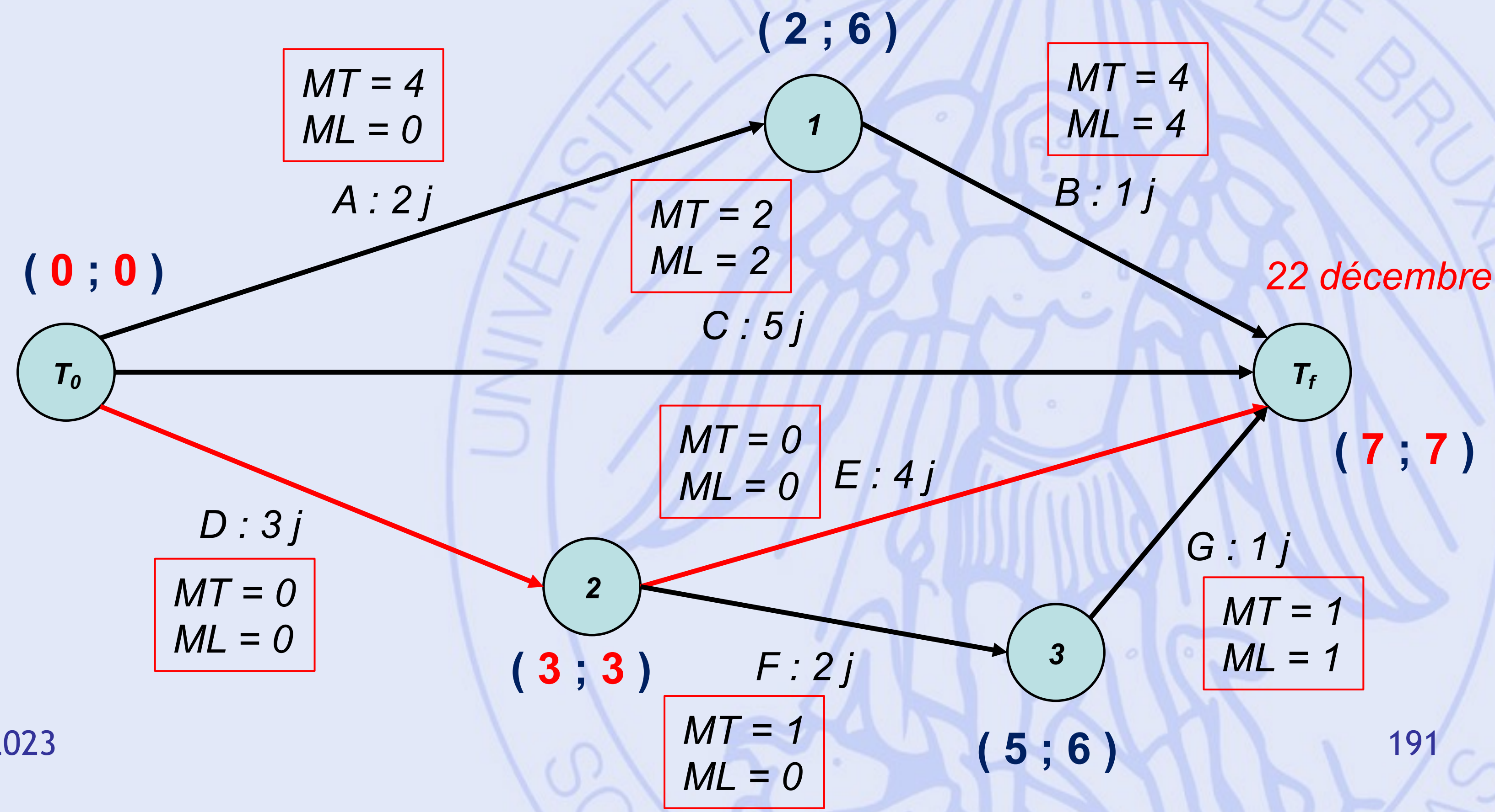
- Marge libre de la tâche i :

  ML(i) = min { ES(j) – EF(i) | j suit i }

➢ Retard maximum sans perturber les dates au plus tôt.

Exemple

- Date au plus tôt pour chaque sommet.
- $T_0 = 0$ - $T_f = 7$



Exemple 2 - Exploitation minière

- En vue de l'exploitation d'une mine, on construit :
  - un port sur un canal proche du site d'extraction,
  - ainsi qu'une route et une voie de chemin de fer qui relient la mine au port.
- Au total, il y a 10 tâches à effectuer (durées exprimées en mois).
- Contraintes temporelles uniquement (dans un premier temps).

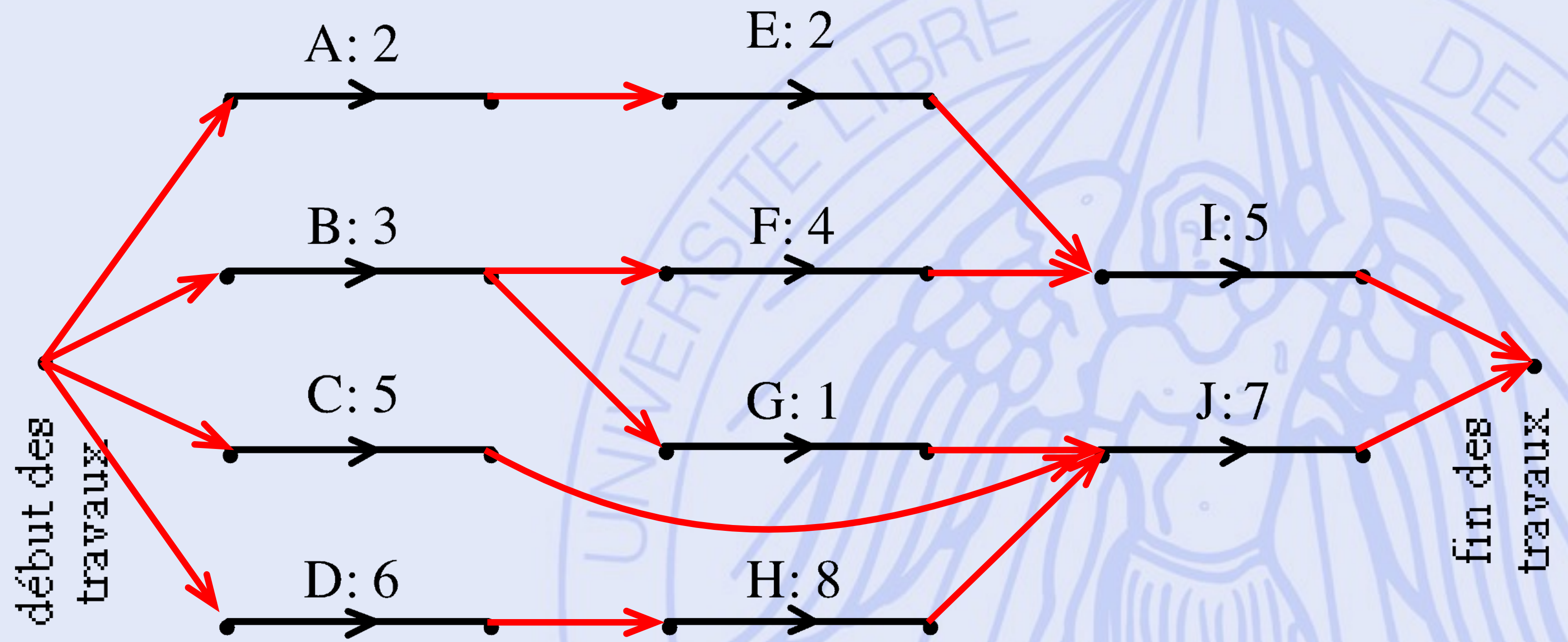
Exemple 2 - Liste des tâches

Tâches	Durées	Contraintes
A: Construction d'un port provisoire	2	-
B: Déblai pour route et voie ferrée	3	-
C: Commande du matériel minier	5	-
D: Commande du matériel portuaire	6	-
E: Implantation du port définitif	2	Après A.
F: Construction de la route	4	Après B.
G: Pose de la voie ferrée	1	Après B.
H: Installation portuaire	8	Après D.
I : Construction d'une cité	5	Après A,B,E,F.
J: Installation minière	7	Après B,C,D,G,H.

Exemple 2 – Questions

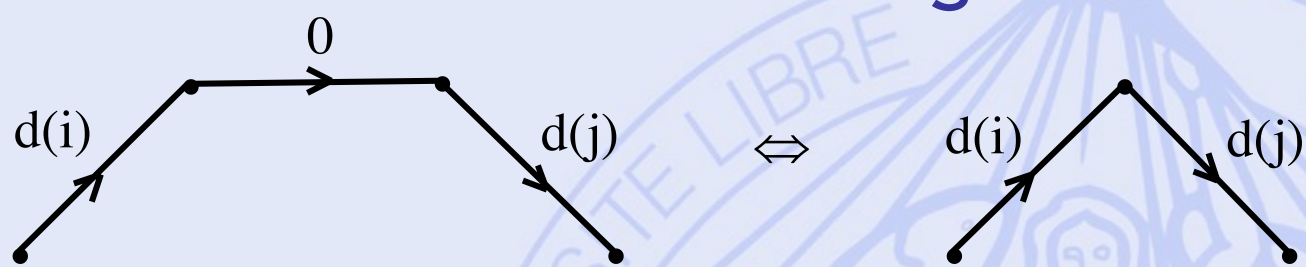
- Quelle est la durée de réalisation minimale des travaux, en tenant compte des contraintes ?
- Quel est le calendrier d'exécution des différentes tâches correspondant ?
- On pourrait aussi prendre en compte le nombre d'ouvriers disponibles et leurs qualifications, …

Exemple 2 - graphe

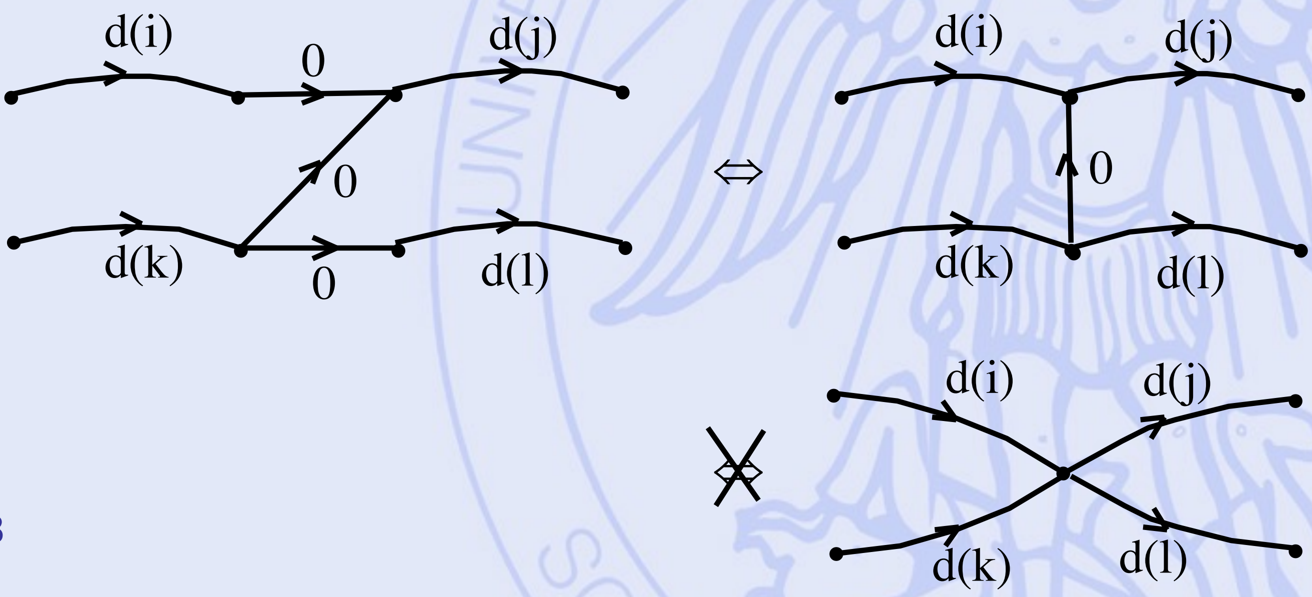


Simplification du graphe

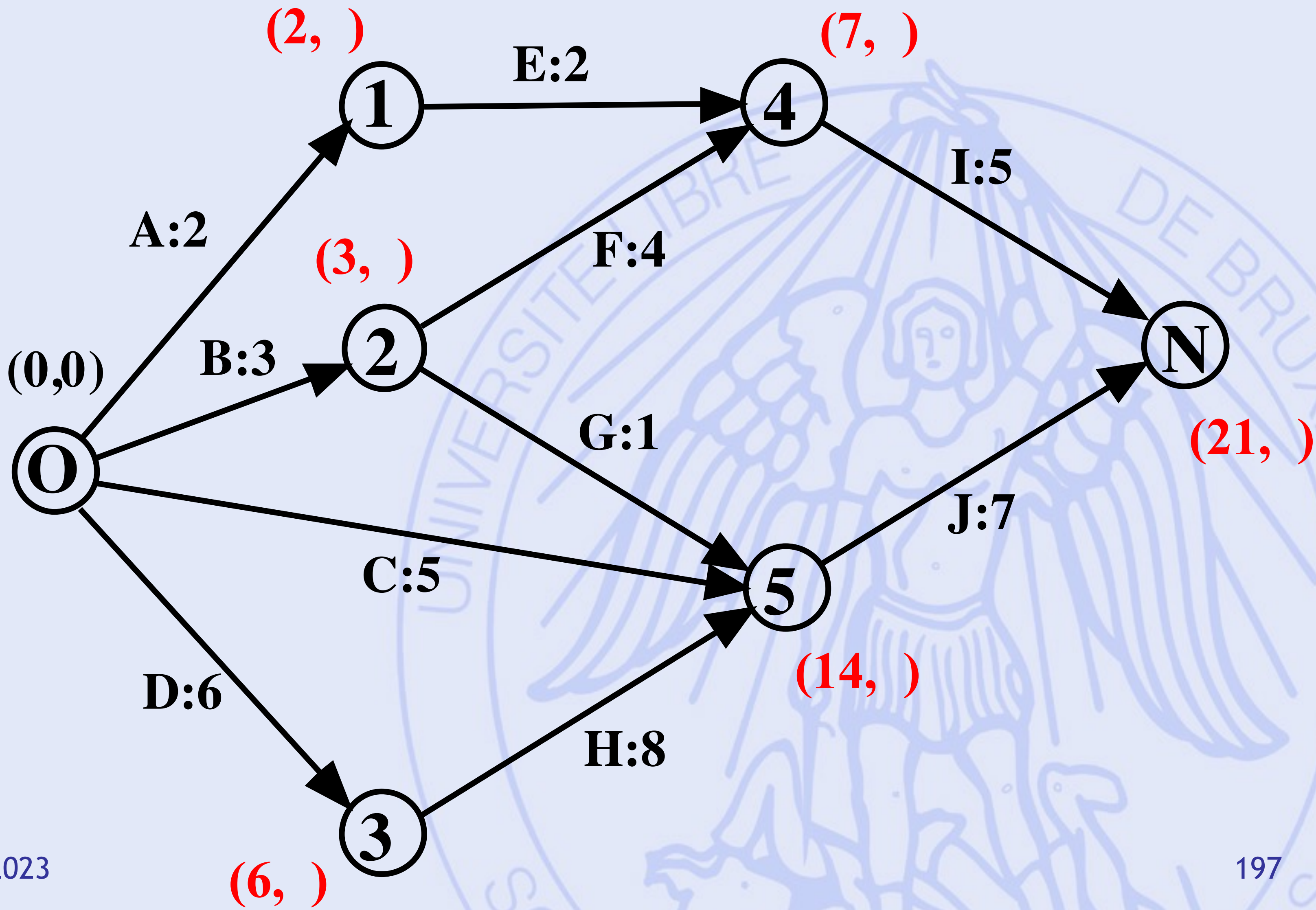
- Elimination des arcs de longueur nulle :



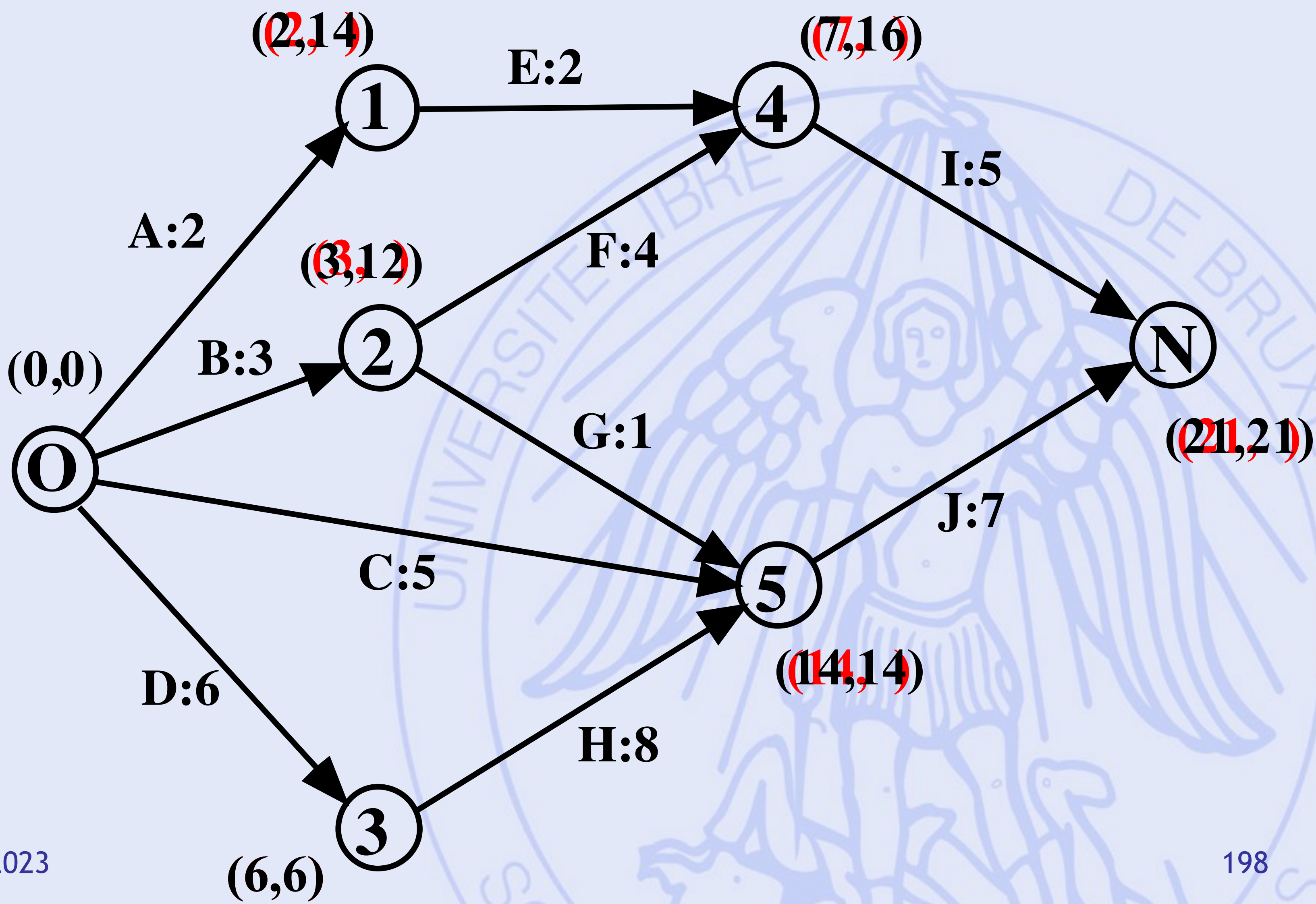
- Attention :



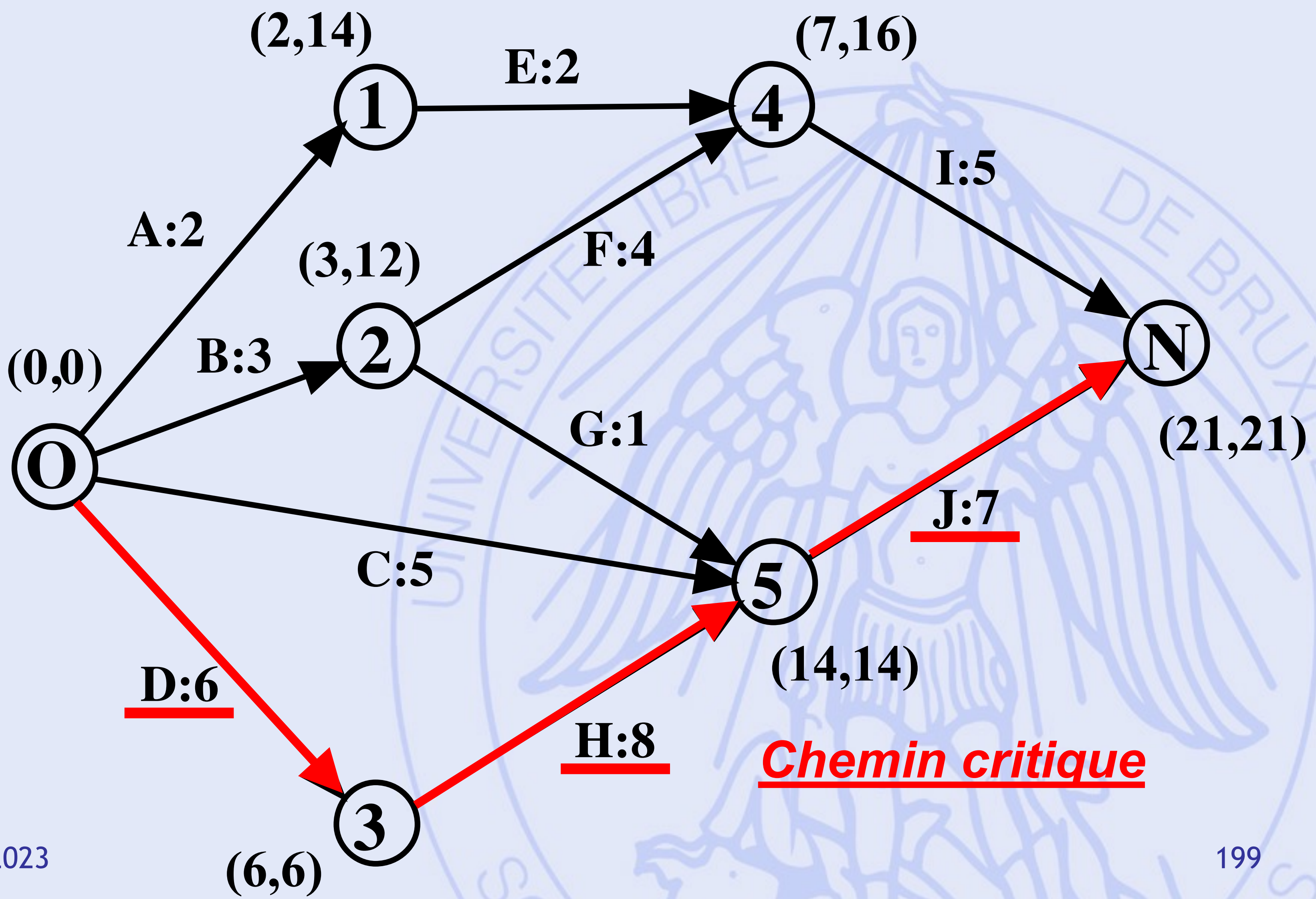
Exemple 2 – graphe simplifié



Exemple 2 - graphe simplifié



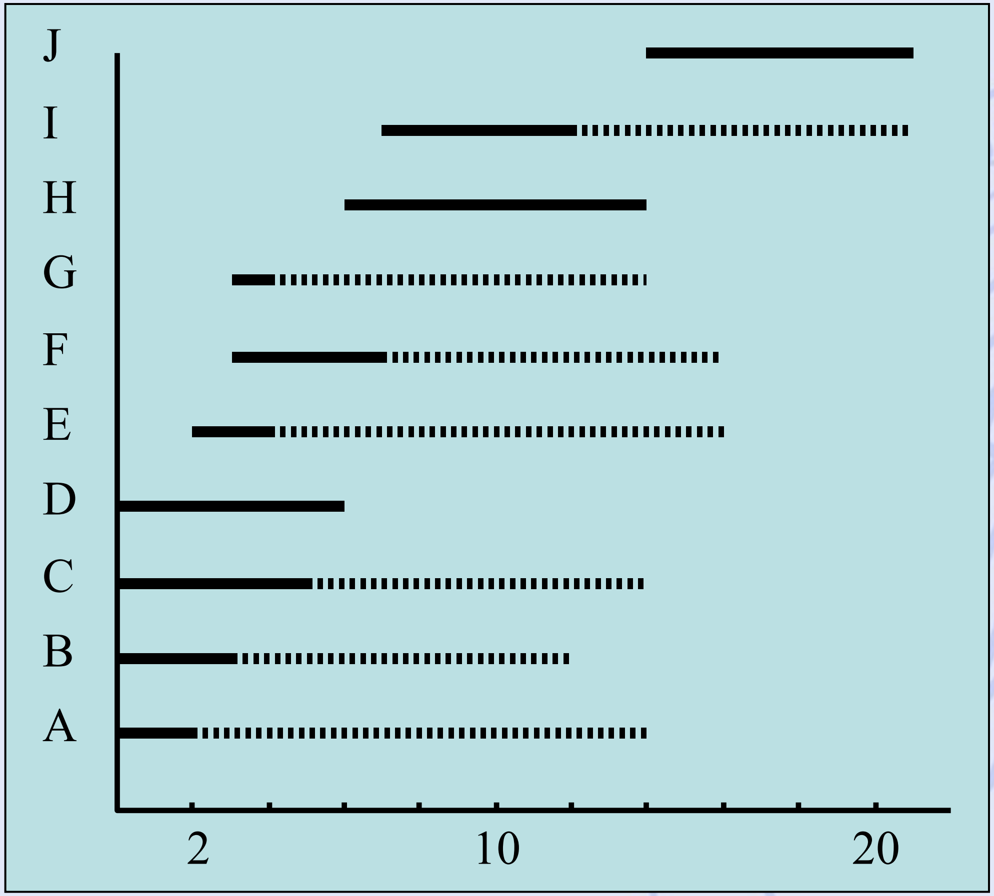
Exemple 2 – graphe simplifié



Exemple 2 - résultats

Tâche	Durée	Après	ES	EF	LS	LF	ML	MT
A	2	-	0	2	12	14	0	12
B	3	-	0	3	9	12	0	9
C	5	-	0	5	9	14	9	9
D	6	-	**0**	**6**	**0**	**6**	**0**	**0**
E	2	A	2	4	14	16	3	12
F	4	B	3	7	12	16	0	9
G	1	B	3	4	13	14	10	10
H	8	D	**6**	**14**	**6**	**14**	**0**	**0**
I	5	A,B,E,F	7	12	16	21	9	9
J	7	B,C,D,G,H	**14**	**21**	**14**	**21**	**0**	**0**

Diagramme de Gantt



- Trait plein :
  - Ordonnancement au plus tôt.
- Pointillés :
  - Marge totale.

Contraintes cumulatives

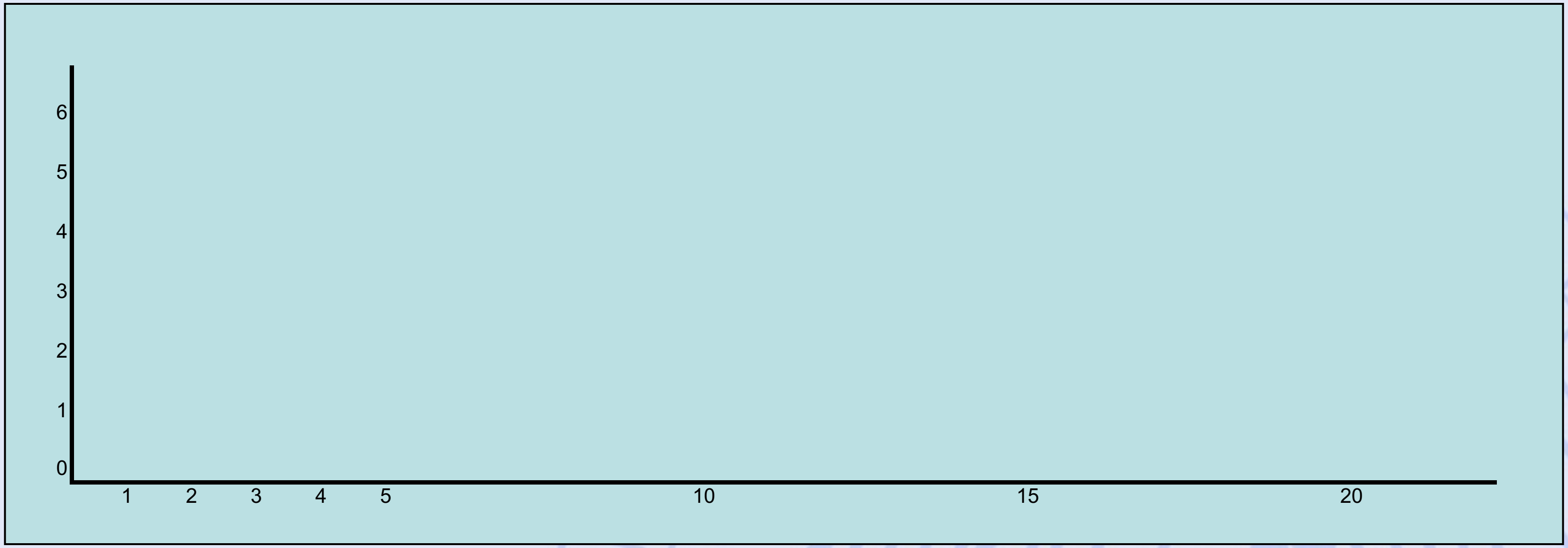
- Origine :
  - Utilisation de ressources disponibles en quantités limitées :
    outils, matières premières, ouvriers, budget, …
- Courbe de charge :
  - Pour un type de ressource et pour un ordonnancement donné : quantités cumulées nécessaires en fonction du temps.
- Problèmes :
  - Respecter un profil maximum pour la courbe de charge (contrainte).
  - Lisser la courbe de charge (éviter les pics).

Exemple 2

- Ressource : 3 équipes d'ouvriers disponibles.
- Equipes nécessaires par tâche :
  (pendant toute la durée de la tâche)

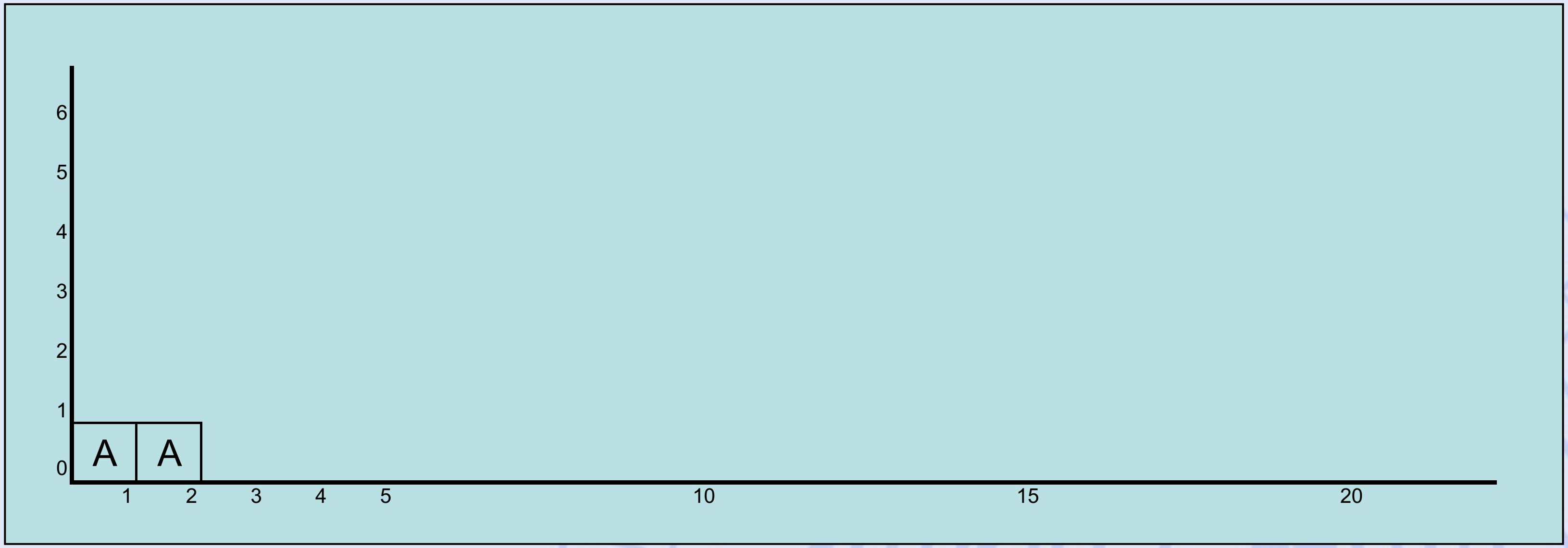
A : 1	B : 1	C : 0	D : 0	E : 3
F : 2	G : 1	H : 0	I : 3	J : 1

Courbe de charge



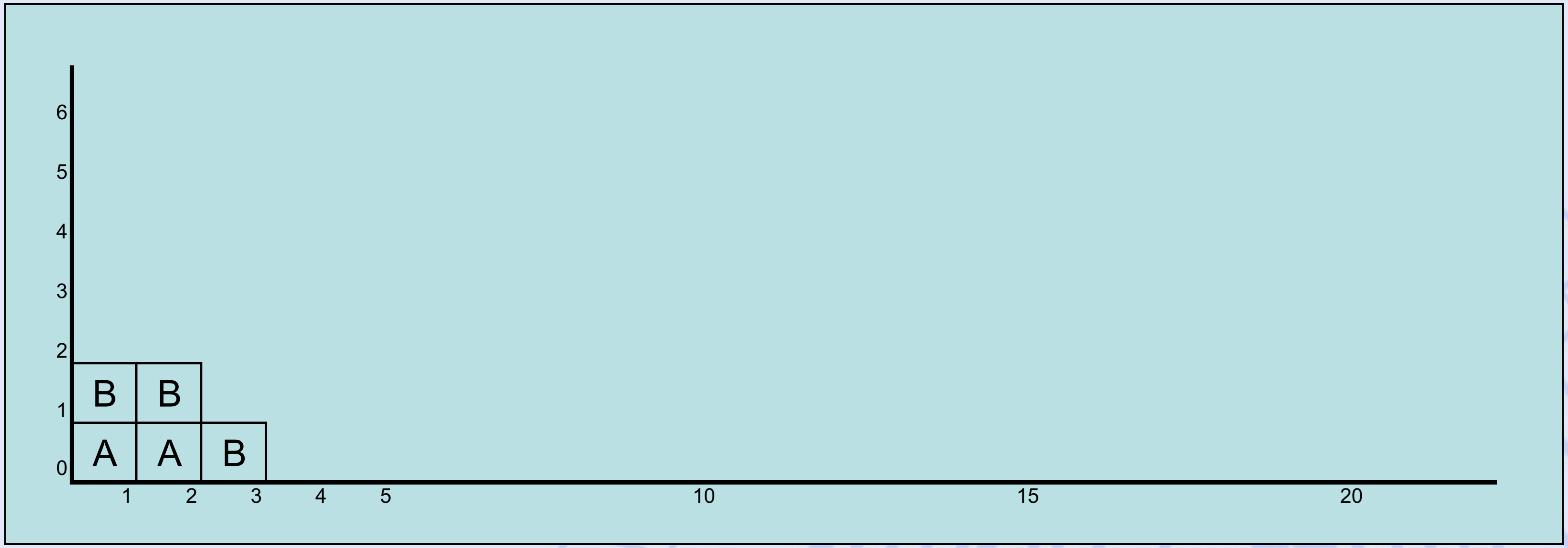
- Tâche A :
  - Durée : 2 mois,
  - Dès le début des travaux,
  - 1 équipe d'ouvriers.

Courbe de charge



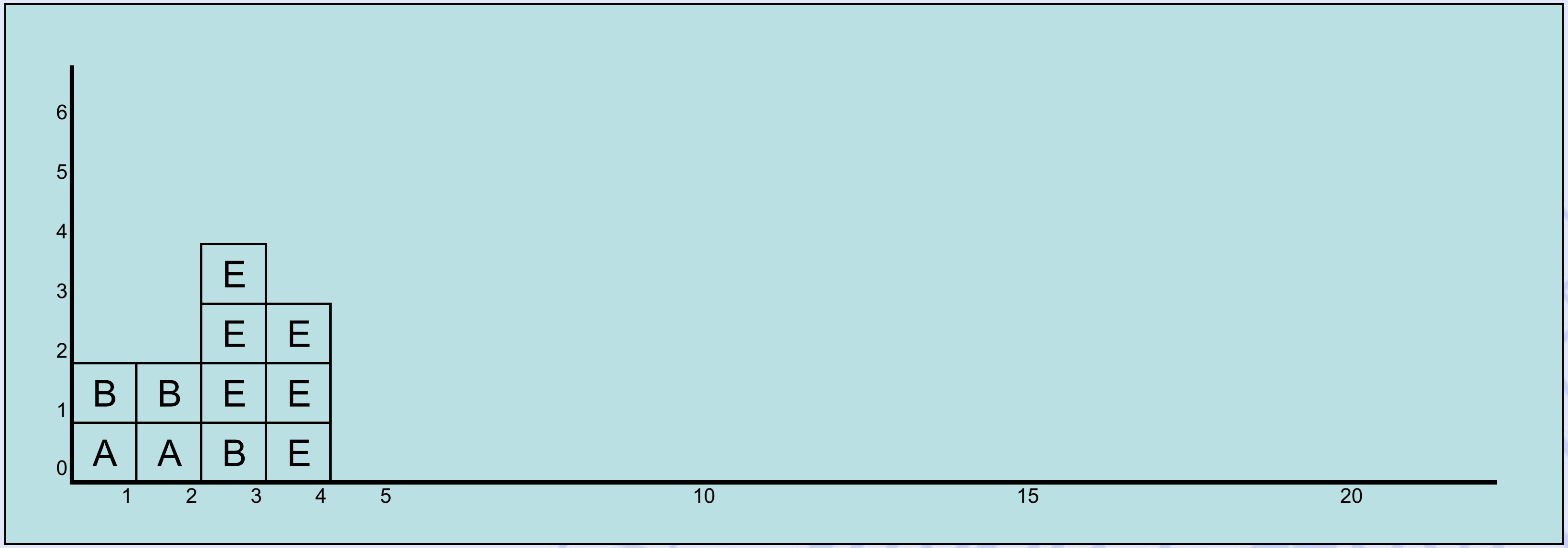
- Tâche B :
  - Durée : 3 mois,
  - Dès le début des travaux,
  - 1 équipe d'ouvriers.

Courbe de charge



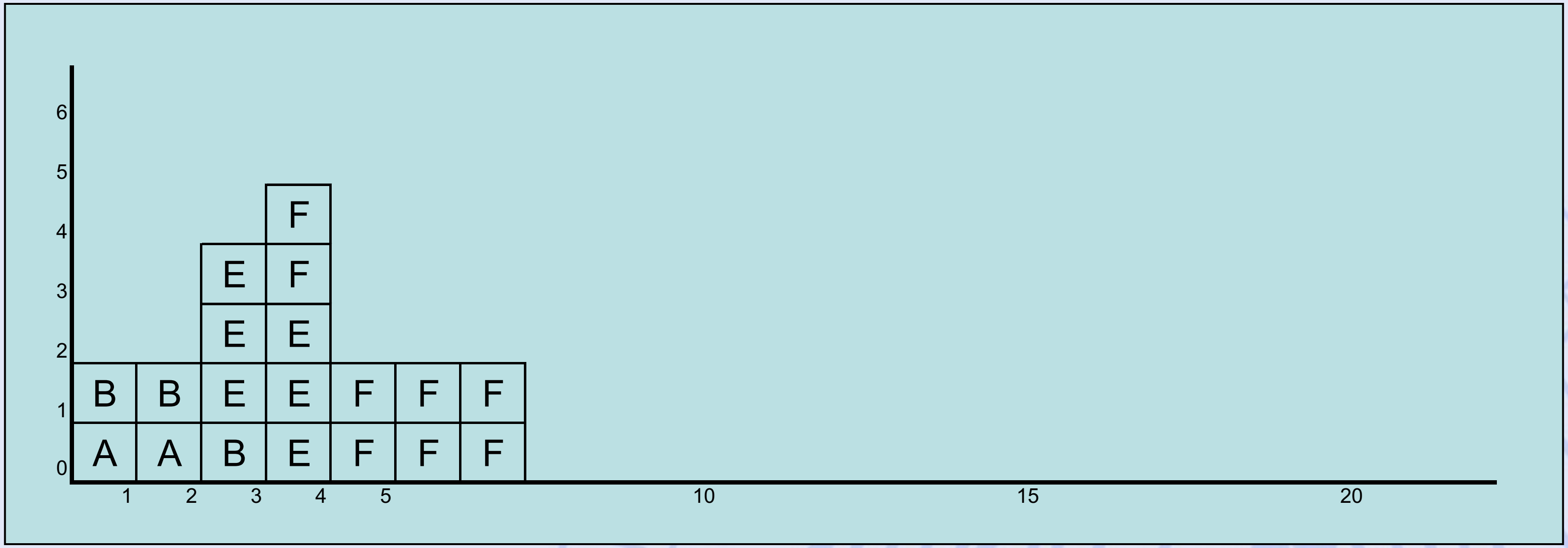
- Tâche E :
  - Durée : 2 mois,
  - Au plus tôt 2 mois après le début des travaux,
  - 3 équipes d'ouvriers.

Courbe de charge



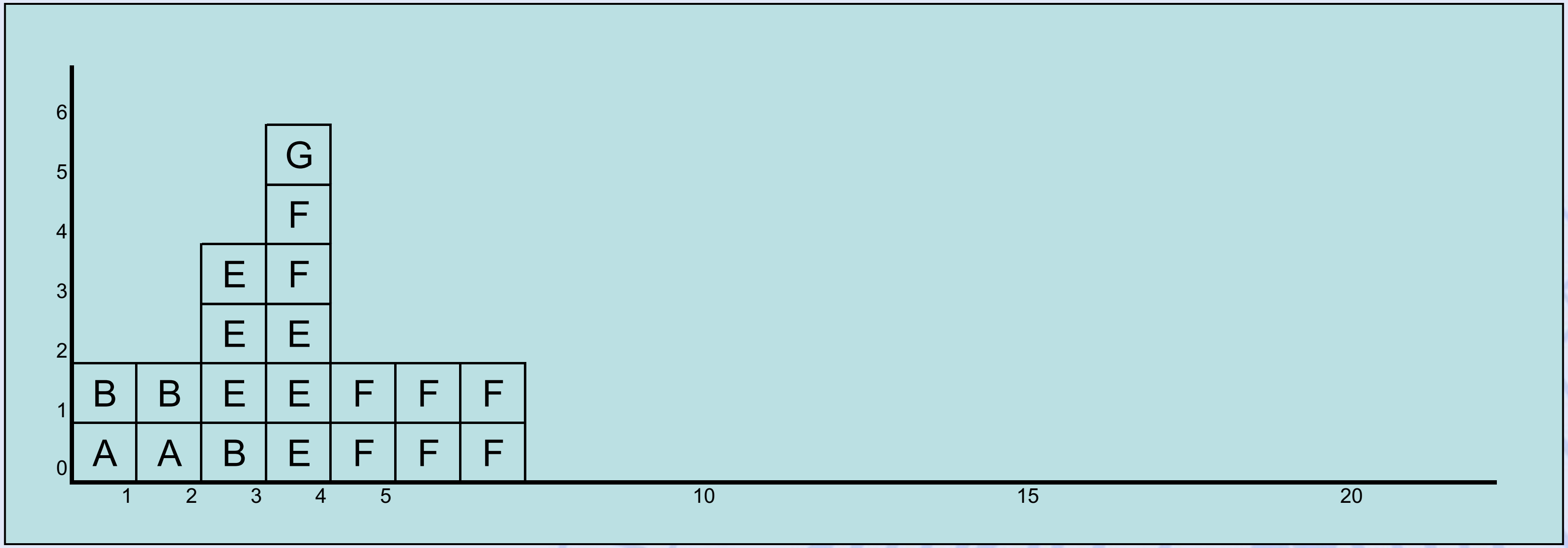
- Tâche F :
  - Durée : 4 mois,
  - Au plus tôt 3 mois après le début des travaux,
  - 2 équipes d’ouvriers.

Courbe de charge



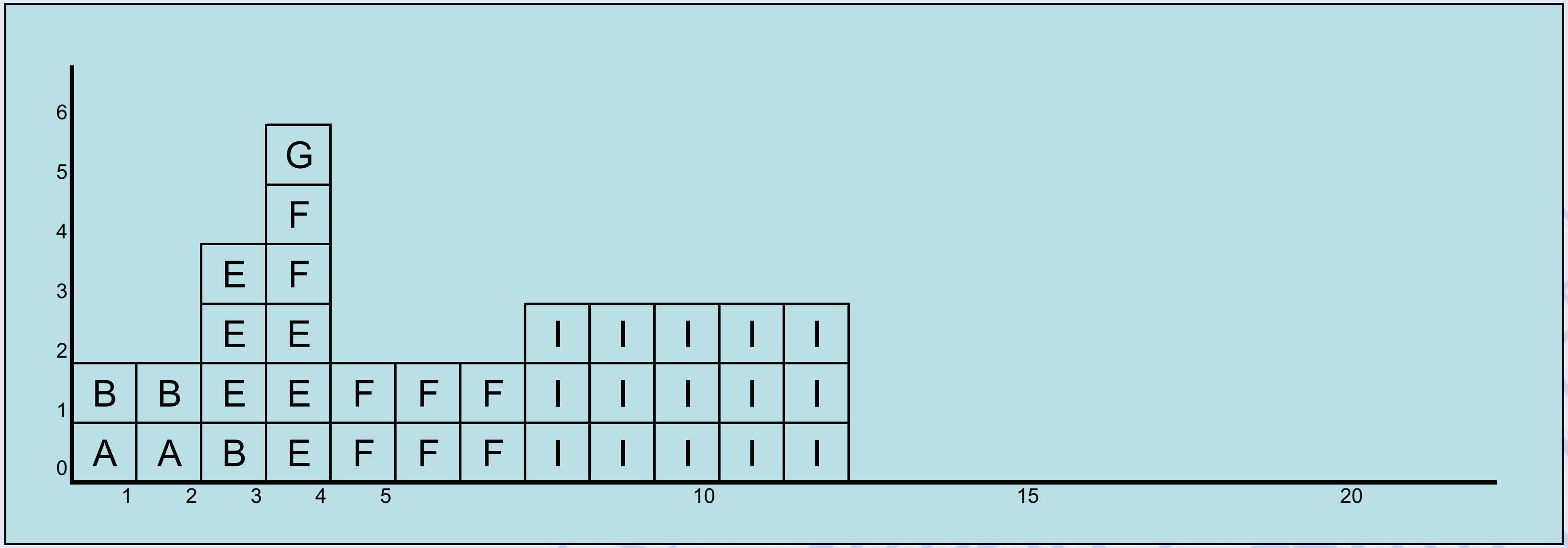
- Tâche G :
  - Durée : 1 mois,
  - Au plus tôt 3 mois après le début des travaux,
  - 1 équipe d'ouvriers.

Courbe de charge



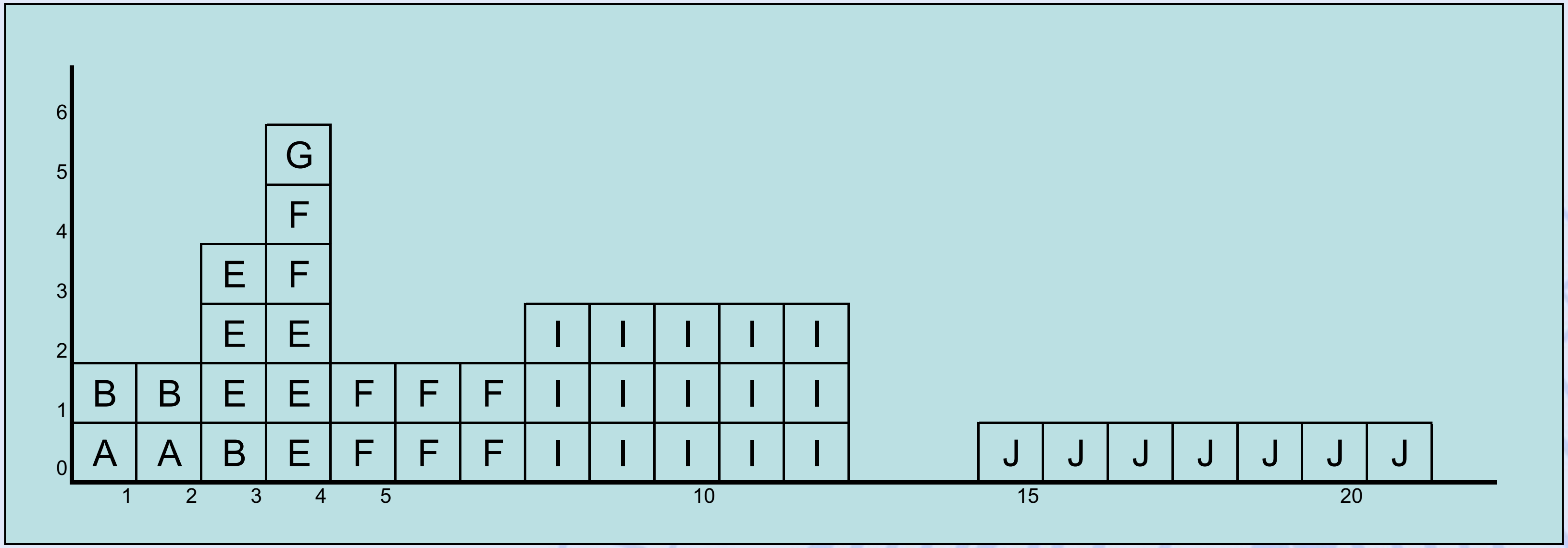
- Tâche I :
  - Durée : 5 mois,
  - Au plus tôt 7 mois après le début des travaux,
  - 3 équipes d'ouvriers.

Courbe de charge



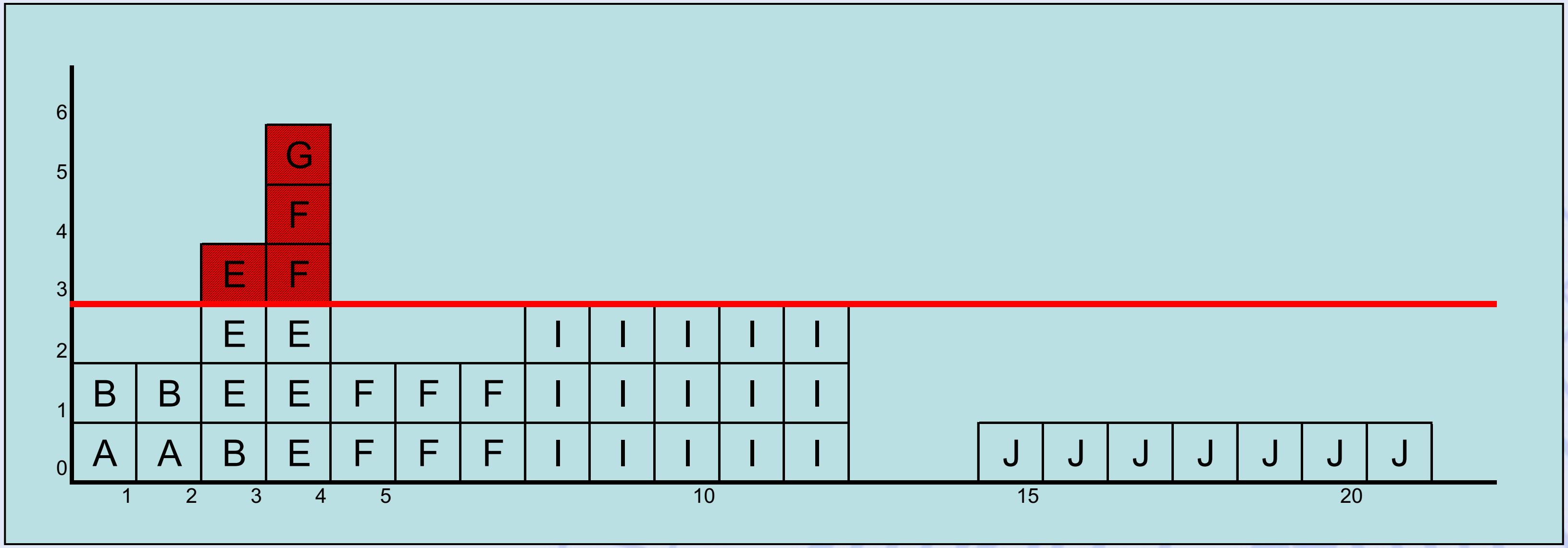
- Tâche J :
  - Durée : 7 mois,
  - Au plus tôt 14 mois après le début des travaux,
  - 1 équipe d’ouvriers.

Courbe de charge



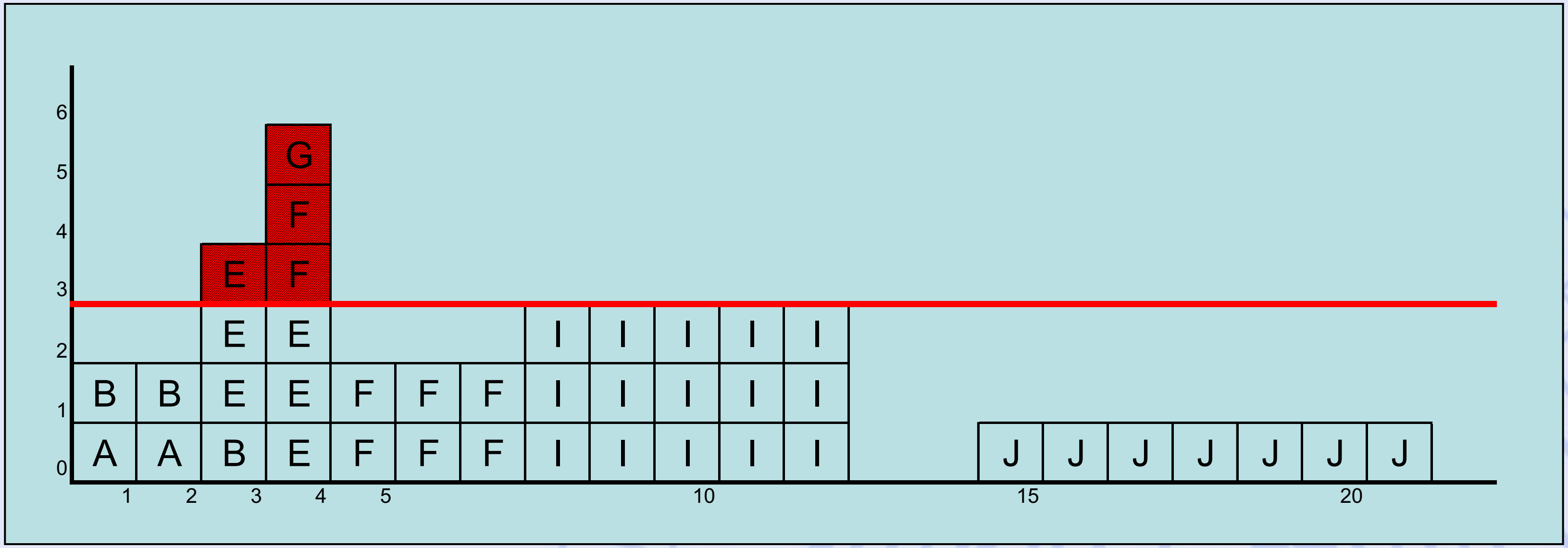
- Courbe de charge peu équilibrée :
  - De 0 à 6 équipes par mois !

Courbe de charge



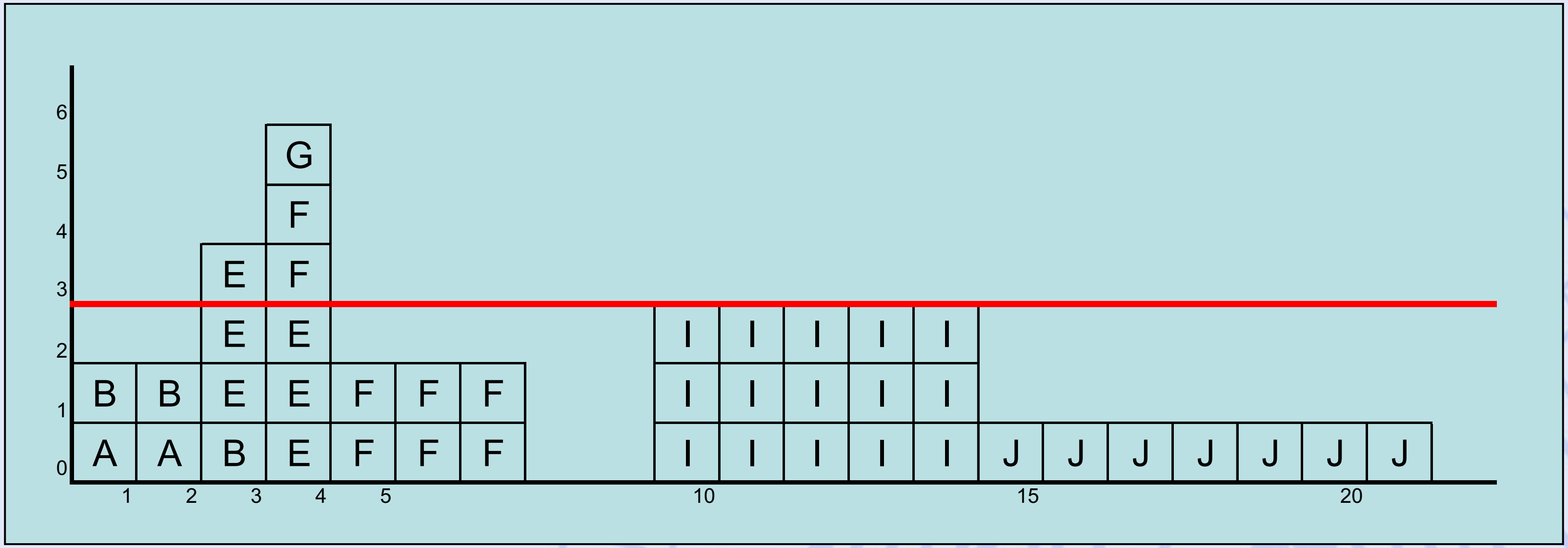
- Contrainte cumulative non respectée :
  - Plus de 3 équipes pendant 2 mois !

Lissage manuel



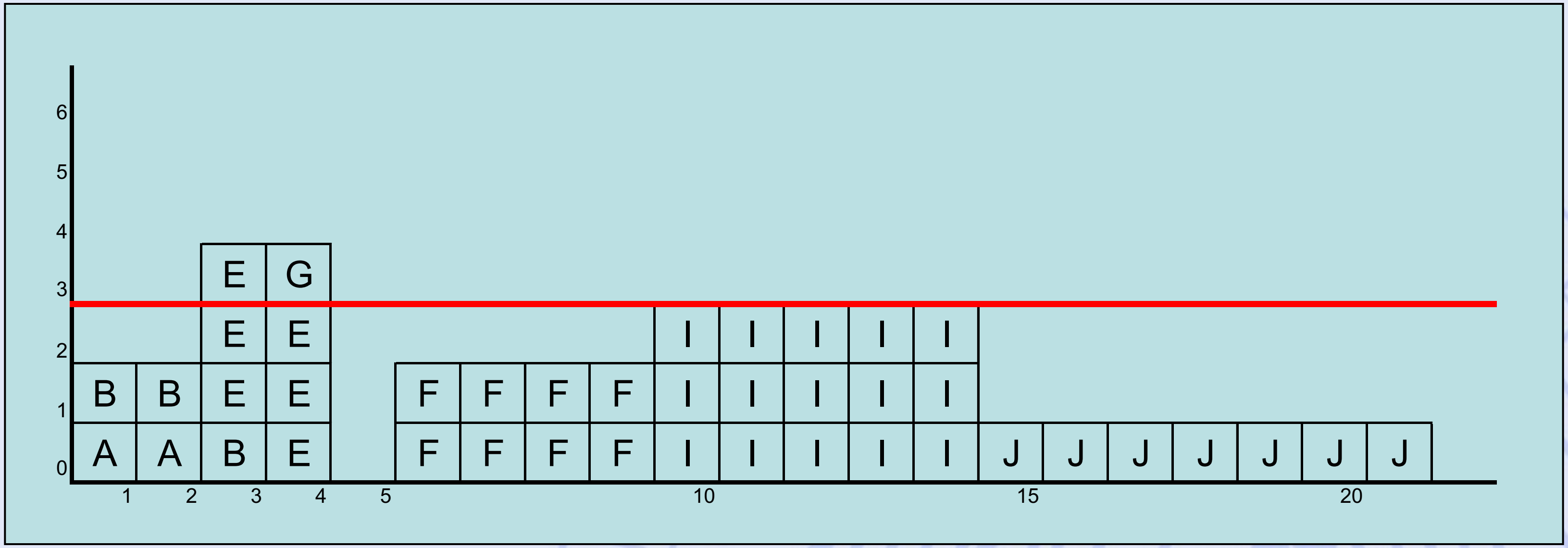
- Reculer la tâche I de 2 mois.

Lissage manuel



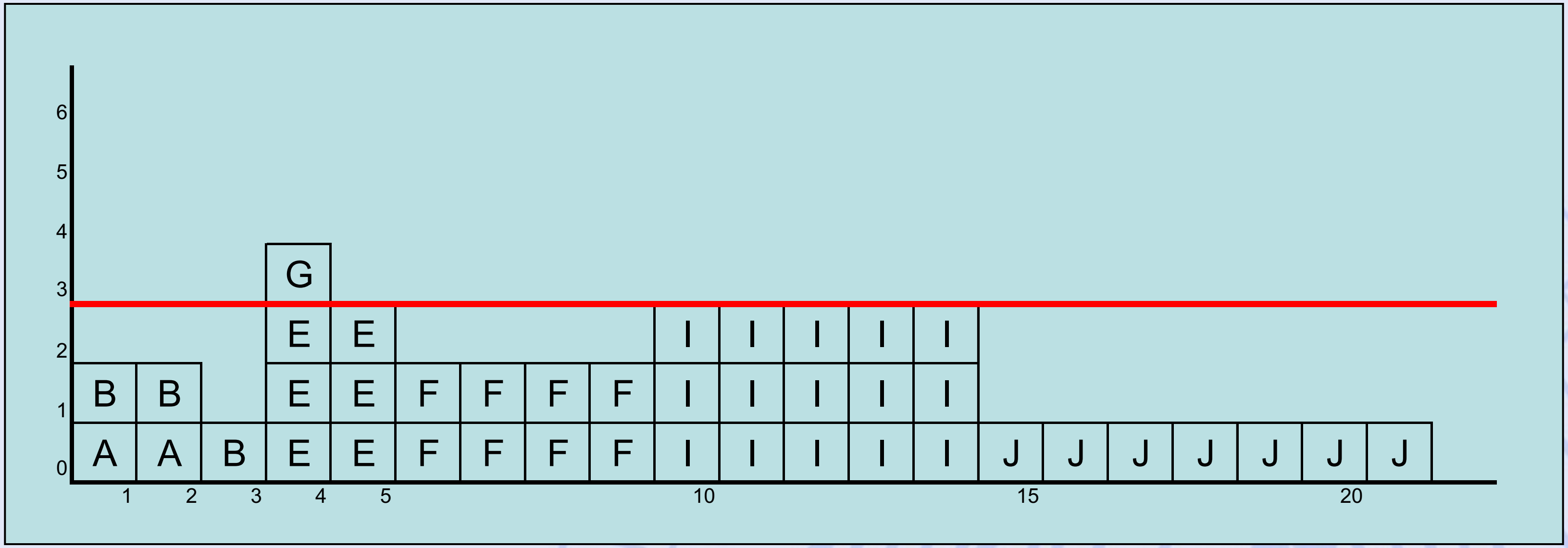
- Reculer la tâche F de 2 mois.

Lissage manuel



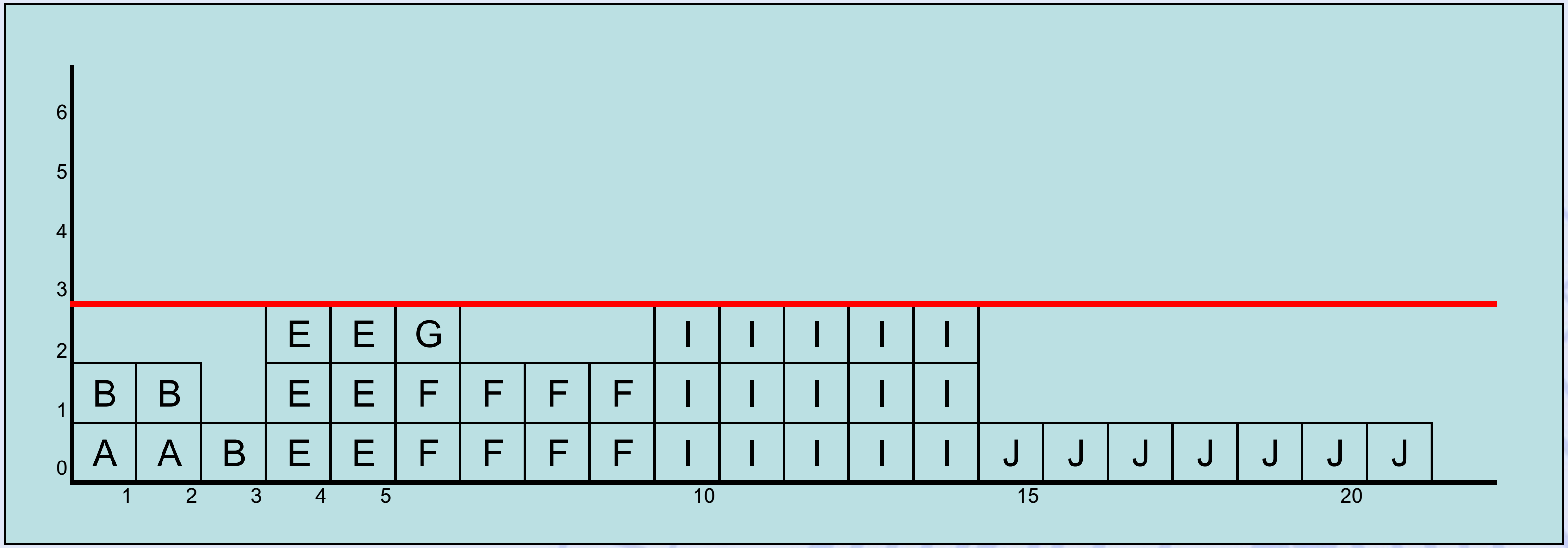
- Reculer la tâche E de 1 mois.

Lissage manuel



- Reculer la tâche G de 2 mois.

Lissage manuel



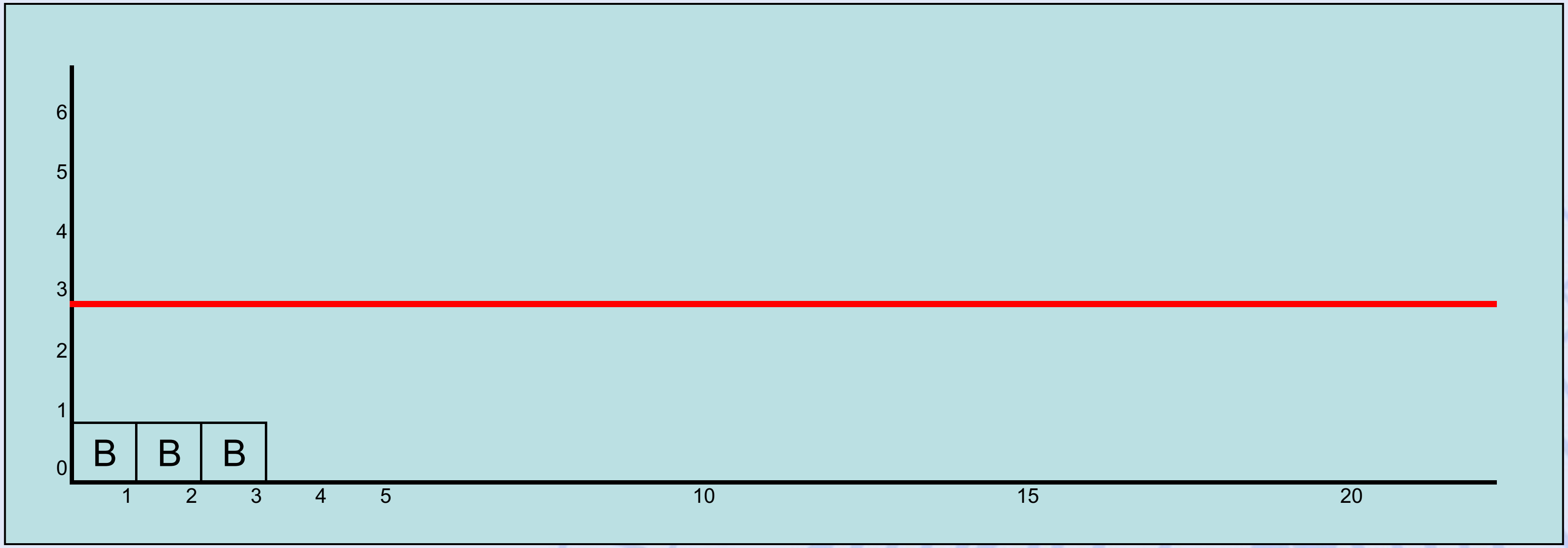
- Contrainte respectée.
- En 21 mois malgré tout (coup de chance) !
- Approche systématique ?

Algorithme MILORD

- Ranger les tâches par ordre croissant de leur date de début au plus tard. Départager les ex-aequo par leur marge libre.
- Placer successivement les tâches au plus tôt, en tenant compte des contraintes.

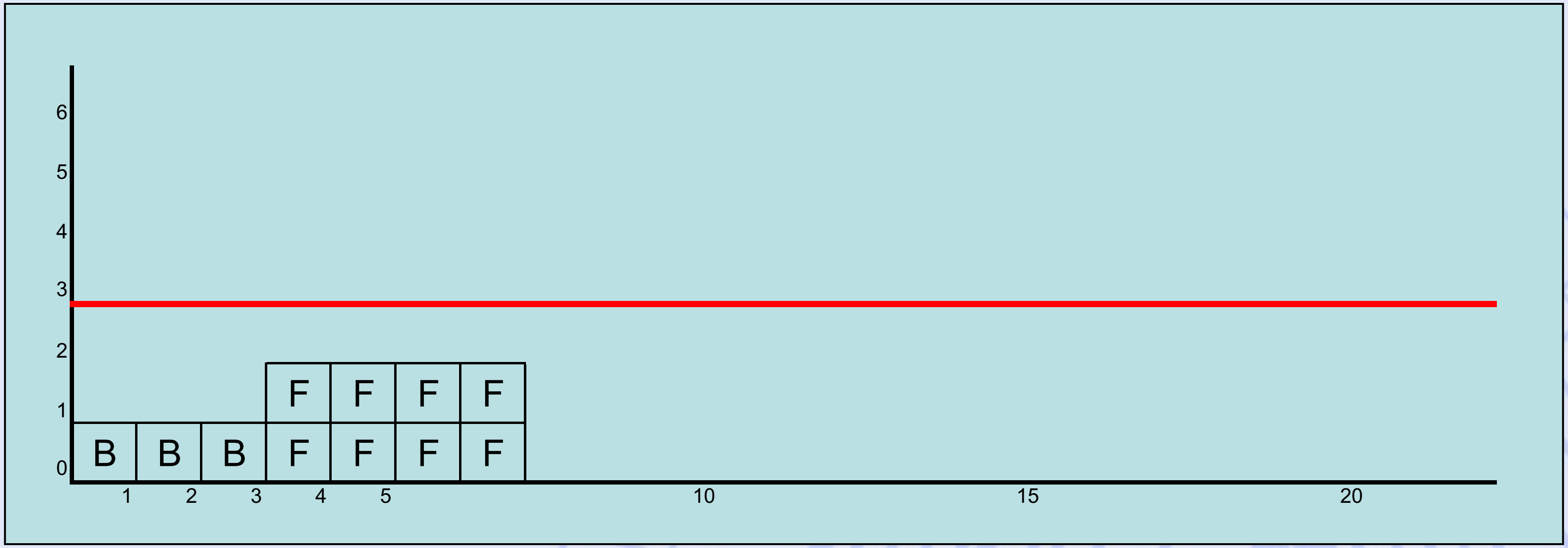
	D	H	B	C	F	A	G	J	E	I
LS	0	6	9	9	12	12	13	14	14	16
ML	0	0	0	9	0	0	10	0	3	9
ES	0	6	0	0	3	0	3	14	2	7

MILORD



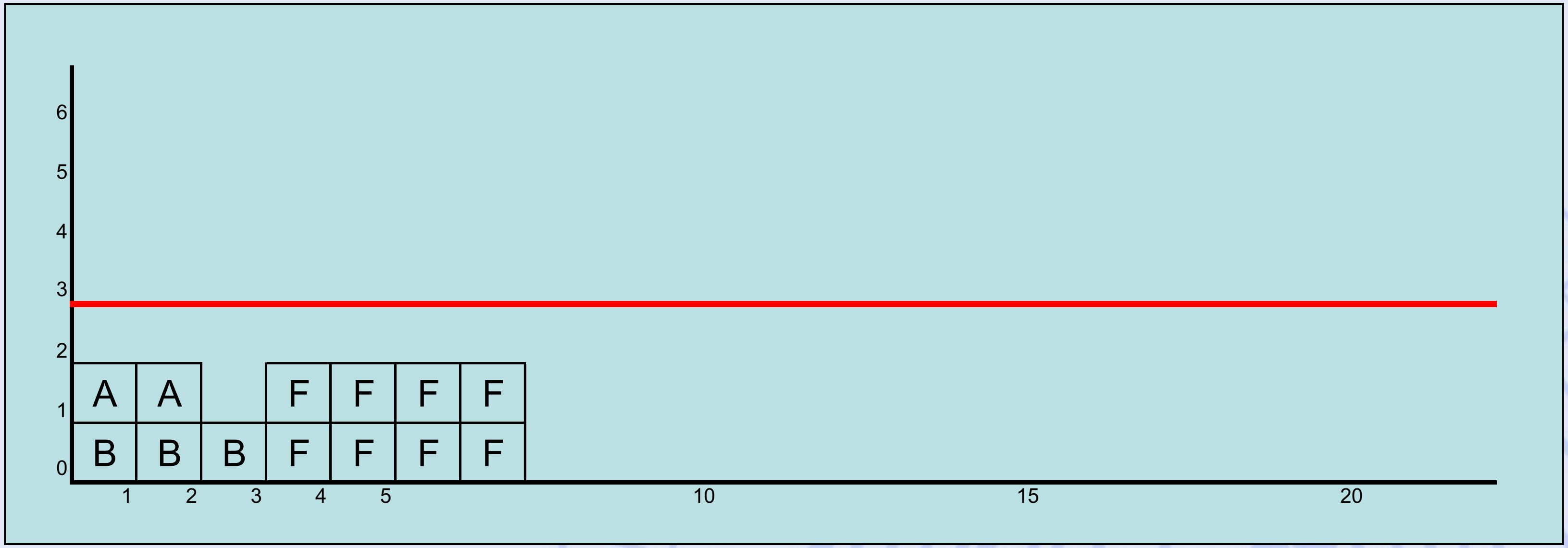
- Placer la tâche F (ES = 3).

MILORD



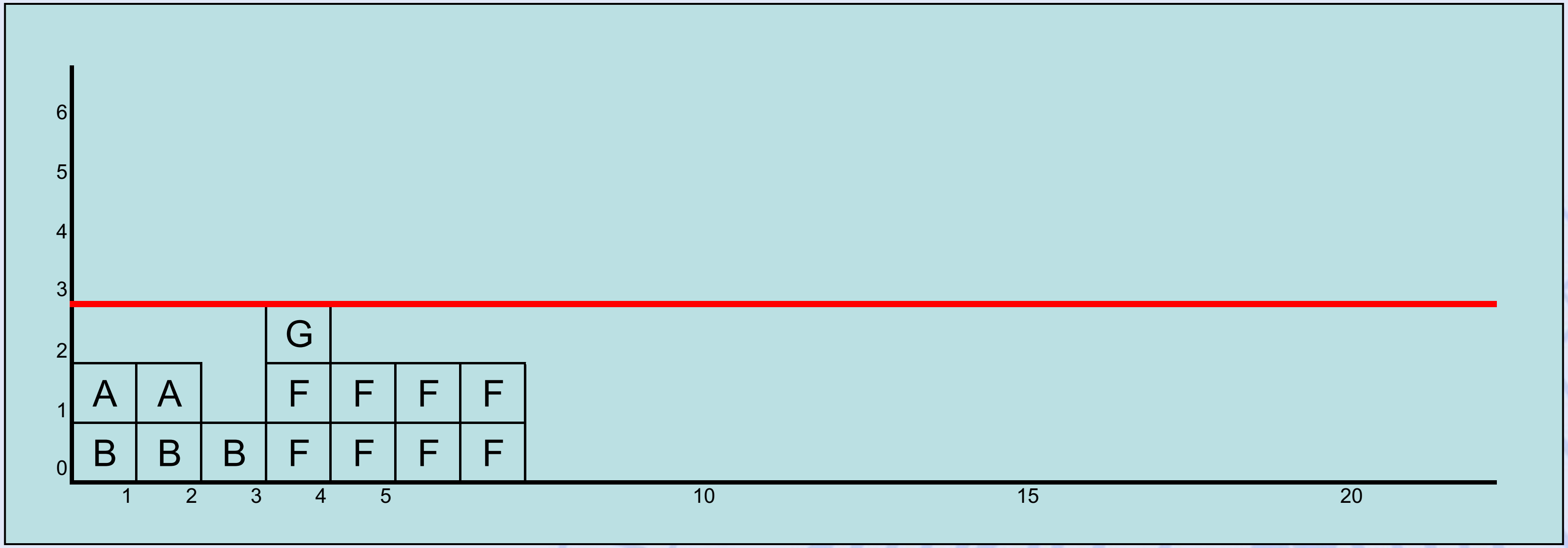
- Placer la tâche A (ES = 0).

MILORD



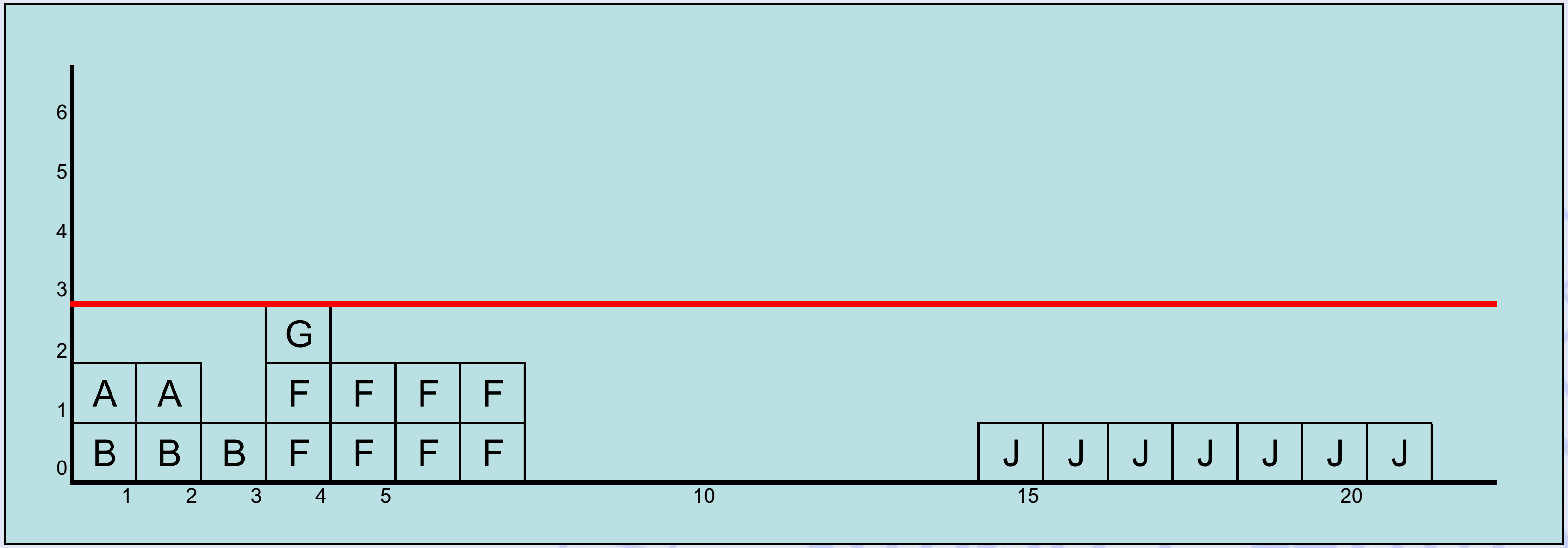
- Placer la tâche G (ES = 3).

MILORD



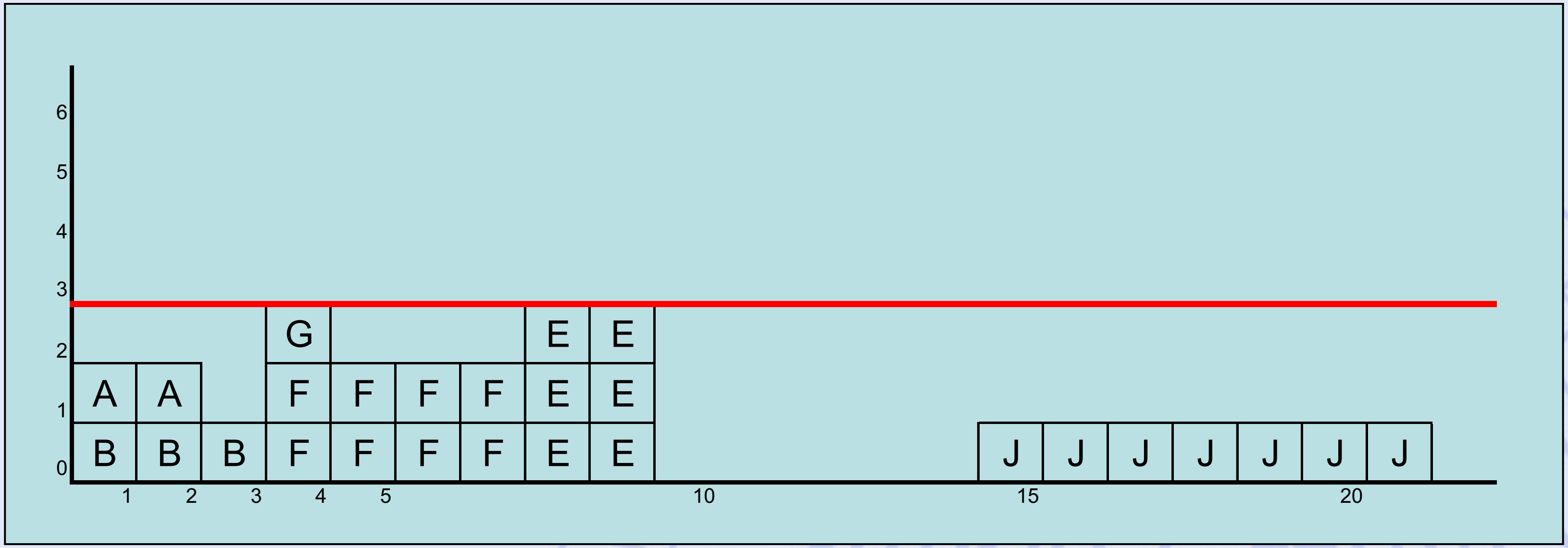
- Placer la tâche J (ES = 14).

MILORD



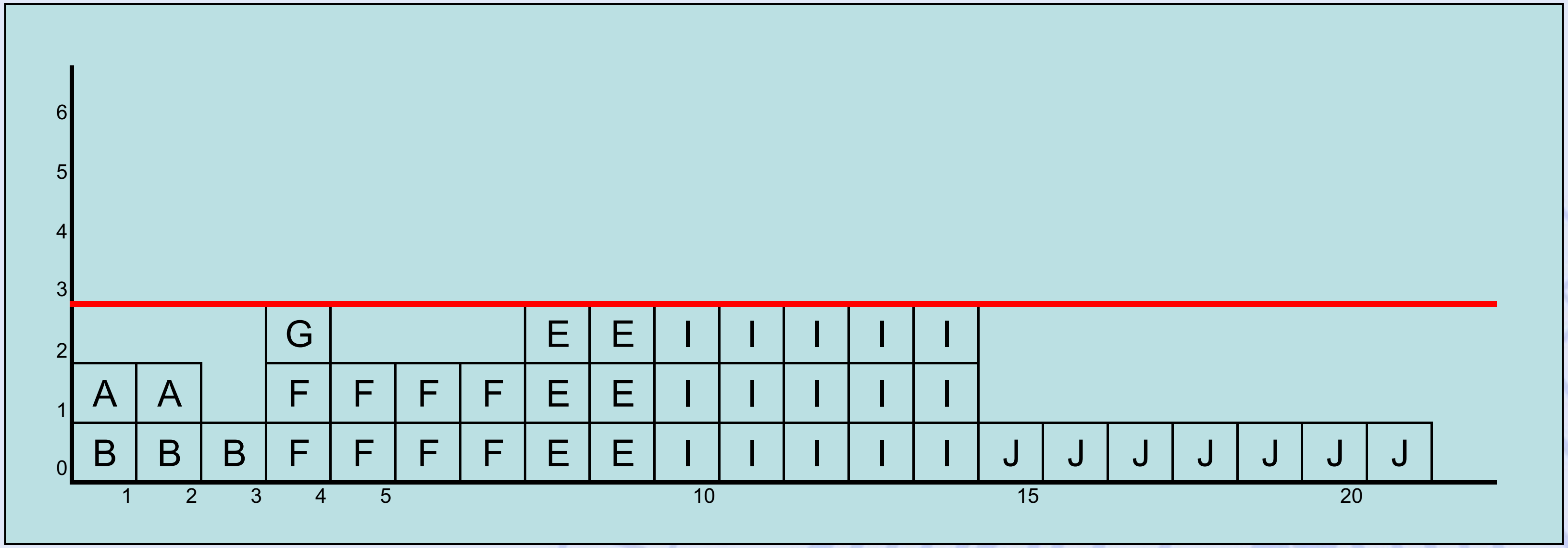
- Placer la tâche E (ES = 2).
- Reculée jusqu’en 7 !

MILORD



- Placer la tâche I (ES = 7).
- Reculée jusqu'en 9 !
- Tout juste…

MILORD



6
5
4
3
2
1
0
G
E E I I I I I
A A F F F F E E I I I I I
B B B F F F F E E I I I I I J J J J J J J
1 2 3 4 5 10 15 20

- Fin…

Variantes

- Méthode des potentiels :
  - Autre mise en graphe : sommets = tâches.
- Méthode PERT :
  - Incertitude sur la durée de réalisation des tâches.
- Prise en compte du coût vs durée de réalisation des tâches.