

□

METHODES QUANTITATIVES DE GESTION

Bertrand Mareschal

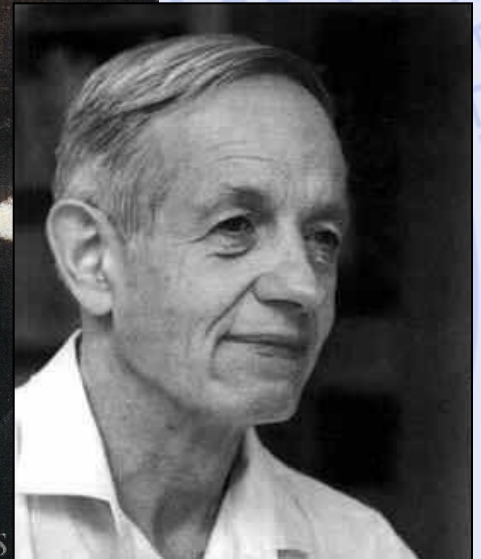
bmaresc@ulb.ac.be

<https://bertrand.mareschal.web.ulb.be/stat-d-206.html>



2001...

John Nash
Nobel
d'Economie
1994



Plan du cours

1. Introduction

- Historique, modélisation

2. Aide multicritère à la décision

- Choix social
- Méthodes PROMETHEE et GAIA

3. *Quelques problèmes de la théorie des graphes*

- Définitions, terminologie
- Chemins les plus courts et les plus longs

4. *Gestion de projet (ordonnancement)*

- Méthode du chemin critique
- Contraintes cumulatives
- Méthode PERT

En pratique...

- Organisation du cours :
 - Théorie
 - Travaux pratiques (Luc Pirau)
- Evaluation :
 - Examen écrit :
 - Partie théorique (sans notes)
 - Partie pratique (avec notes)
 - Travail personnel :
 - Aide à la decision (PROMETHEE et GAIA)

Travail d'aide à la décision

- Travail de groupe (2 étudiant.e.s).
- Elaborer un problème de décision : min. 8 actions, 5 critères et 2 scénarios.
- Modéliser le problème avec PROMETHEE.
- Analyser le problème avec Visual PROMETHEE:
 - Classements PROMETHEE.
 - Analyse GAIA.
 - Analyse de sensibilité:
 - Poids des critères.
 - Différents scénarios.
 - Bonus: catégories, groupes, clusters, ...
- Présentation orale en fin de cours.
- Rapport écrit à rentrer au plus tard le jour de l'examen.

Calendrier 2023

- 01 - 20/09 : théorie
- 02 - 04/10 : théorie
- 03 - 11/10 : théorie
- 04 - 18/10 : théorie
- 05 - 25/10 : théorie
- 06 - 08/11 : théorie
- 07 - 15/11 : travaux pratiques
- 08 - 22/11 : travaux pratiques
- 09 - 29/11 : travaux pratiques
- 10 - 06/12 : travaux pratiques
- 11 - 13/12 : présentations
- 12 - 20/12 : présentations

1. Introduction

- Contexte
- Historique
- Prise de décision
- Aide à la décision
- Modélisation
- Principaux outils
- Exemples d'applications

Contexte

- Augmentation de la taille et de la complexité des organisations.
- Division du travail, spécialisation, décentralisation des responsabilités et de la gestion.
- Nouveaux problèmes liés à la spécialisation :
 - Plus grande autonomie des départements au sein des organisations,
 - Manque de coordination,
 - Objectifs conflictuels,
 - Difficulté d'allouer des ressources limitées aux départements d'une façon globalement optimale.





Historique

2ème guerre mondiale

- Allocation de ressources limitées aux opérations militaires.
- Idée : approche scientifique (UK - USA).
- “Research on Operations” par des équipes multidisciplinaires de scientifiques (Cf. “Blackett’s Circus”, UK).
- Grand succès : amélioration de l’efficacité des opérations militaires complexes
 - déploiement des radars en Angleterre,
 - détermination de la taille des convois,
 - logistique ...

Déploiement des radars



Déploiement des radars



RADAR puts the finger on our enemies!

Hiding above the clouds there's a plane. Anti-aircraft guns let loose—down crashes the enemy bomber.

How can you hit enemies you can't see—through clouds, darkness and fog? The answer is Radar—radio detecting and ranging equipment.

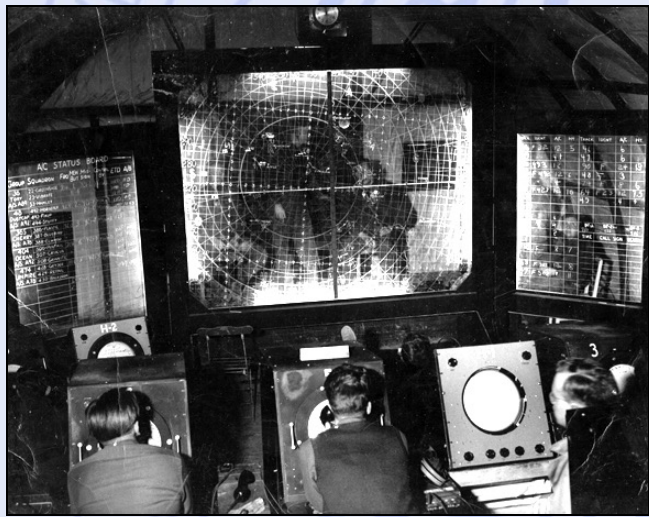
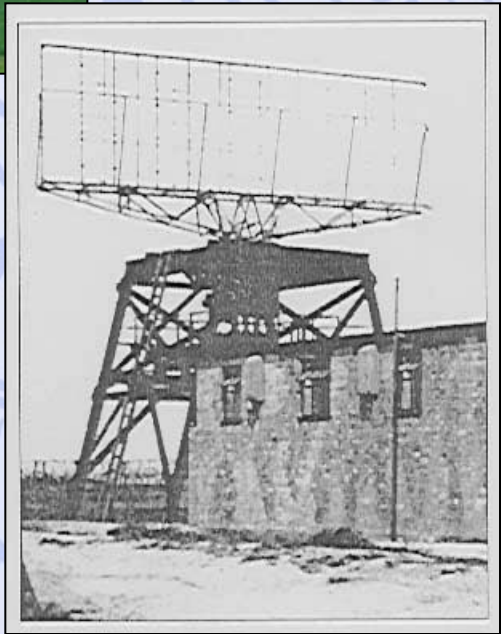
How Radar does it

Radar sends out a wave which searches the sky or sea. When this beam hits a plane or ship, it bounces back to the Radar. Traveling with the speed of light, the beam makes this round trip in a few thousandths of a second and tells you... there he is!

You keep the Radar focused on him. It tells you his direction, distance, speed, whether he's climbing or descending. Having this information, gunners direct their fire with deadly accuracy.

Radar is the result of the work of many research groups in this country and abroad. Bell Telephone Laboratories has played an important part in its development. Western Electric today is one of the world's largest manufacturers of Radar.

Western Electric
IN PEACE... SOURCE OF SUPPLY FOR THE BELL SYSTEM.
IN WAR... ARSENAL OF COMMUNICATIONS EQUIPMENT.



Protection des convois





Historique

Après-guerre

- Succès des applications militaires.
- Intérêt marqué des entreprises pour la RO.
- Applications civiles, d'abord dans les grandes entreprises industrielles :
 - Ex: industrie pétrolière - programmation linéaire pour la gestion de la production
- Plus tard, résultats utilisés (à moindre coût) par des organisations plus petites.
- Facteur clé : développement de l'informatique.

Prise de Décision



- Décrire la Réalité,
- Comprendre la Réalité,
- Gérer la Réalité.

2 Approches :

- Approche Qualitative,
- Approche Quantitative.

Aide à la Décision



Modèle quantitatif

- Décisions possibles ?
- Comment les comparer ?
- Préférences, Objectifs ?

Aide à la Décision



- Approximation de la réalité !
- Aide à la décision.

Quelques techniques

- Statistique
- Programmation mathématique (optimisation)
- Aide à la décision de type multicritère (MCDA)
- Simulation
- **PERT/CPM**
- Gestion des stocks et de la production
- Réseaux (transport)
- Fiabilité des équipements

Plan du cours

1. Introduction

- Historique, modélisation

2. Aide multicritère à la décision

- Choix social
- Méthodes PROMETHEE et GAIA

3. Quelques problèmes de la théorie des graphes

- Définitions, terminologie
- Chemins les plus courts et les plus longs

4. Gestion de projet (ordonnancement)

- Méthode du chemin critique
- Contraintes cumulatives
- Méthode PERT

Un tunnel entre l'Espagne et le Maroc ?



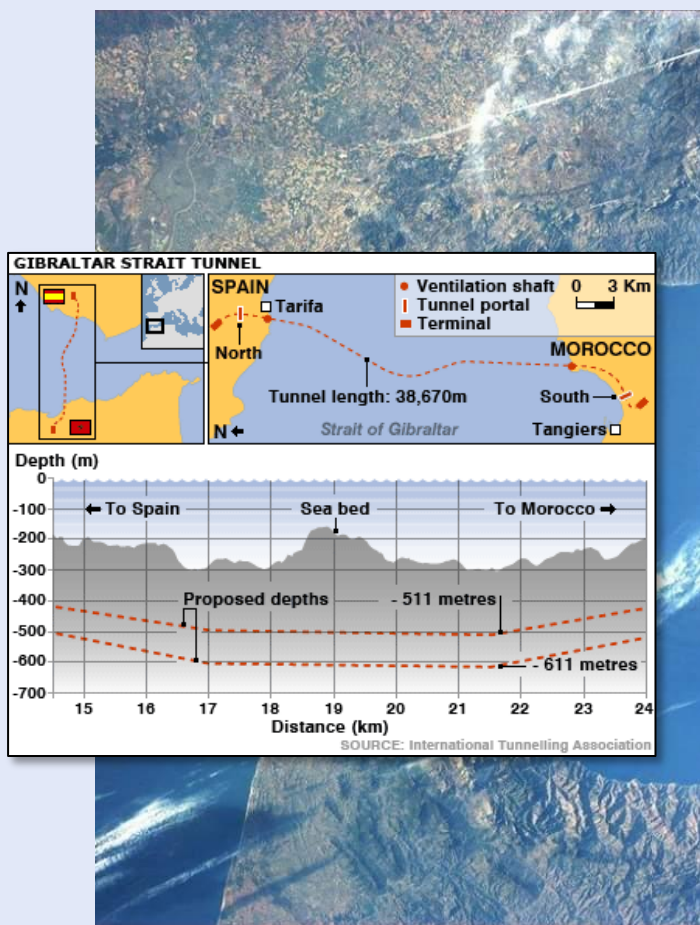
- **Pas-de-Calais :**

- 33,3 km

- **Détroit de Gibraltar :**

- 14,4 km

Un tunnel entre l'Espagne et le Maroc ?



- D'où (MA) ?
- A où (ES) ?
- Par où ?

- Différents tracés possibles.
- Lequel choisir ?

Un tunnel entre l'Espagne et le Maroc ?



- Meilleur tracé ?
 - Coût
 - Vitesse commerciale
 - Retombées économiques
 - Impacts sociaux (expropriations, bruit, emplois, ...)
 - Impacts environnementaux (paysage, faune, ...)
- Lequel choisir ?

Un tunnel entre l'Espagne et le Maroc ?



- Un problème multicritère
- Et multi-acteurs :
 - Pouvoirs publics (MA et ES)
 - ONCF
 - Renfe
 - Opérateurs (transport)
 - Industries
 - Populations
 - ONGs et experts
- Un problème difficile !

Un tunnel entre l'Espagne et le Maroc ?



- Comment résoudre le problème ?
- Recherche d'un compromis.
- Recherche d'un consensus.
- Aide à la décision de type multicritère.

Quelques Problèmes de Décision et d'Évaluation

- Définir le tracé d'un tunnel, d'une LGV, ...
- Choisir le site d'implantation d'une nouvelle usine, d'un magasin, ...
- Engager du personnel, GRH.
- Acheter du matériel.
- Évaluer des projets (R&D).
- Choisir une stratégie d'investissement.

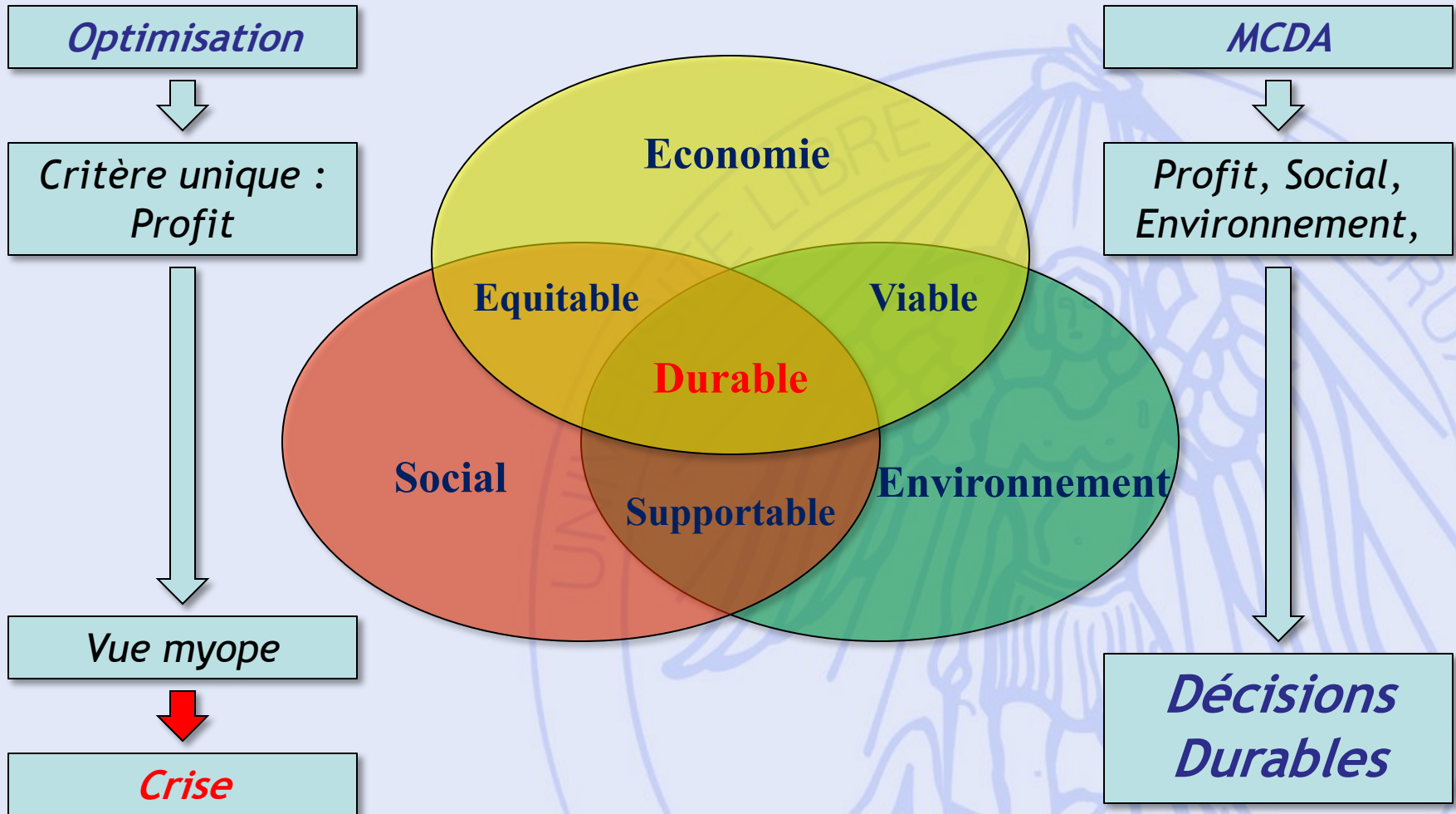
Modèle Multicritère vs Unicritère

- Modèle unicritère :

$$\text{Optimiser } \{g(a) \mid a \in A\}$$

- Mathématiquement bien posé :
 - Notion de solution optimale,
 - Classement complet des actions.
- Humainement mal posé :
 - Un seul critère ? Peu réaliste.
 - Notion de critère : seuils de perception, ...

MCDA vs Optimisation



Modèle

Multicritère vs Unicritère

- Modèle multicritère (MCDA) :

Optimiser $\{g_1(a), g_2(a), \dots, g_k(a) \mid a \in A\}$

- Mathématiquement mal posé :
 - Pas de solution optimale,
 - Pas de sens mathématique.
- Humainement bien posé :
 - Plus proche du problème de décision réel,
 - Recherche d'une solution de compromis.

Tableau Multicritère

- Actions :
 - décisions possibles,
 - items à évaluer.
- Critères :
 - quantitatifs,
 - qualitatifs.

Tableau Multicritère

Action 1	
Action 2	
Action 3	
Action 4	
Action 5	
...	

Tableau Multicritère

	Crit. 1 (unité)	Crit. 2 (unité)	Crit. 3 (unité)	Crit. 4 (unité)	...
Action 1					
Action 2					
Action 3					
Action 4					
Action 5					
...					

Tableau Multicritère

	Crit. 1 (/20)	Crit. 2 (cote)	Crit. 3 (appréc.)	Crit. 4 (O/N)	...
Action 1	18	135	B	Oui	...
Action 2	9	147	M	Oui	...
Action 3	15	129	TB	Non	...
Action 4	12	146	TM	?	...
Action 5	7	121	B	Oui	...
...

Localisation d'une Usine

	Investissement (MEUR)	Coûts (kEUR)	Environn. (estimation)	...
Site 1	18	135	B	...
Site 2	9	147	M	...
Site 3	15	129	TB	...
Site 4	12	146	TM	...
Site 5	7	121	B	...
...

Possibilité d'Achats

	Prix (kEUR)	Fiabilité (jours)	Maintenance (estimation)	...
Produit A	18	135	B	...
Produit B	9	147	M	...
Produit C	15	129	TB	...
Produit D	12	146	TM	...
Produit E	7	121	B	...
...

Un Exemple

Achat d'une automobile

Objectifs :

- Economie à l'achat (prix),
- Economie à l'usage (consommation),
- Performances (puissance),
- Confort,
- Habitabilité.

Tableau Multicritère

Marque	Prix	Puissance	Consomm.	Habitabilité	Confort
Moyenne A	26000	75	8,0	3	3
Sport	29000	110	9,0	1	2
Moyenne B	25500	85	7,0	4	3
Luxe 1	38000	90	8,5	4	5
Economic	15000	50	7,5	2	1
Luxe 2	35000	85	9,0	5	4

- Quel est le meilleur achat ?

1: *TM*
2: *M*
3: *Mo*
4: *B*
5: *TB*

Tableau Multicritère

Marque	Prix	Puissance	Consomm.	Habitabilité	Confort
Moyenne A	26000	75	8,0	3	3
Sport	29000	110	9,0	1	2
Moyenne B	25500	85	7,0	4	3
Luxe 1	38000	90	8,5	4	5
Economic	15000	50	7,5	2	1
Luxe 2	35000	85	9,0	5	4

- Quel est le meilleur achat ?

Tableau Multicritère

Marque	Prix	Puissance	Consomm.	Habitabilité	Confort
Moyenne A	26000	75	8,0	3	3
Sport	29000	110	9,0	1	2
Moyenne B	25500	85	7,0	4	3
Luxe 1	38000	90	8,5	4	5
Economic	15000	50	7,5	2	1
Luxe 2	35000	85	9,0	5	4

- Quel est le meilleur achat ?
- Quel est le meilleur compromis ?

Tableau Multicritère

Marque	Prix	Puissance	Consomm.	Habitabilité	Confort
Moyenne A	26000	75	8,0	3	3
Sport	29000	110	9,0	1	2
Moyenne B	25500	85	7,0	4	3
Luxe 1	38000	90	8,5	4	5
Economic	15000	50	7,5	2	1
Luxe 2	35000	85	9,0	5	4

- Quel est le meilleur achat ?
- Quel est le meilleur compromis ?
- Quelles sont les priorités de l'acheteur ?



Théorie du choix social

- Problème :
 - Un groupe de personnes doivent choisir un candidat parmi plusieurs (élection).
 - Chaque personne (électeur) classe les candidats par ordre de préférence.
 - Quel candidat doit être élu ?
- Quelle est la « meilleure » procédure de vote ?
- Analogie avec les modèles multicritères :
 - Candidats \leftrightarrow actions,
 - Electeurs \leftrightarrow critères.

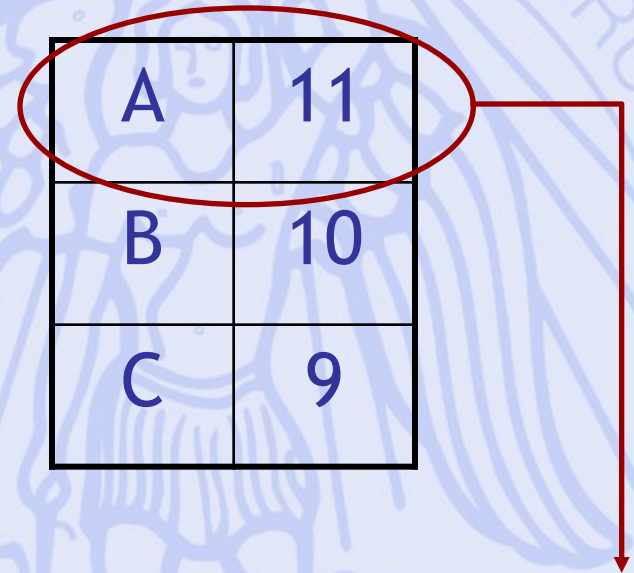
5 procédures... ... parmi d'autres...

1. Majorité relative.
2. Condorcet.
3. Scrutin à 2 tours (présidentielle).
4. Borda.
5. Éliminations successives.

Procédure 1 : Majorité relative

3 candidats: Albert, Bruno, Claire
 30 votants:

11 votants	10 votants	9 votants
A	B	C
B	C	B
C	A	A



Albert est élu

Procédure 1 : Majorité relative

3 candidats: Albert, Bruno, Claire

30 votants:

11 votants	10 votants	9 votants
A	B	C
B	C	B
C	A	A

A	11
B	10
C	9

Problème : B et C préférés à A
par une majorité de votants !

Albert est élu

Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat Marquis de Condorcet 1743 - 1794



Procédure 2 : Condorcet

3 candidats: Albert, Bruno, Claire
 30 votants:

11 votants	10 votants	9 votants
A	B	C
B	C	B
C	A	A

B meilleur que A	19 votes
B meilleur que C	21 votes
C meilleur que A	19 votes

Bruno est élu

Procédure 2 : Paradoxe de Condorcet

3 candidats: Albert, Bruno, Claire
9 votants:

4 votants	3 votants	2 votants
A	B	C
B	C	A
C	A	B

A meilleur que B	6 votes
B meilleur que C	7 votes
C meilleur que A	5 votes



pas d'élus !

Procédure 3 : Scrutin à 2 tours (élection présidentielle française)

4 candidats: Albert, Bruno, Claire, Diane

63 votants:

22 votants	21 votants	20 votants
B	C	D
A	A	A
C	D	C
D	B	B

1^{er} tour: B et C

2^{ème} tour: C bat B (41 contre 22)

Claire est élue

Procédure 3 : Scrutin à 2 tours

(élection présidentielle française)

4 candidats: Albert, Bruno, Claire, Diane

63 votants:

22 votants	21 votants	20 votants
B	C	D
A	A	A
C	D	C
D	B	B

Claire est élue !!!

...alors que

A meilleur que C	42 votes
A meilleur que B	41 votes
A meilleur que D	43 votes

Procédure 3 : scrutin à 2 tours (élection présidentielle française)

3 candidats: Albert, Bruno, Claire

17 votants:

5 votants	6 votants	4 votants	2 votants
C	A	B	B
A	B	C	A
B	C	A	C

1^{er} tour:	A et B
-----------------------------	--------

2^{ème} tour:	A bat B (11 contre 6)
------------------------------	-----------------------

Albert est élu

Procédure 3 : scrutin à 2 tours

(élection présidentielle française)

3 candidats: Albert, Bruno, Claire

17 votants:

5 votants	6 votants	4 votants	2 votants
C	A	B	AB
A	B	C	BA
B	C	A	C

Albert était élu

1^{er} tour:

A et C

2^{ème} tour:

C bat A (9
contre 8)

Claire est élue !

Problème : non-monotonicité !

Jean Charles de Borda

1733 - 1799



Procédure 4 : Borda

3 candidats: Albert, Bruno, Claire
 81 votants:

30 votants	29 votants	10 votants	10 votants	1 votant	1 votant
A	C	C	B	A	B
C	A	B	A	B	C
B	B	A	C	C	A

Points	Score
2	A 101
1	B 33
0	C 109

$$31 \times 2 + 39 \times 1$$

$$11 \times 2 + 11 \times 1$$

$$39 \times 2 + 31 \times 1$$

Claire est élue !

Procédure 4 : Borda

3 candidats: Albert, Bruno, Claire

81 votants:

30 votants	29 votants	10 votants	10 votants	1 votant	1 votant
A	C	C	B	A	B
C	A	B	A	B	C
B	B	A	C	C	A

Points	Scores	
2	A	101
1	B	33
0	C	109

A meilleur que C : 41 sur 81

Procédure 4 : Borda

4 candidats: Albert, Bruno, Claire, Diane

7 votants:

3 votants	2 votants	2 votants	Points
C	B	A	3
B	A	D	2
A	D	C	1
D	C	B	0

Scores		Classement
A	13	A
B	12	B
C	11	C
D	6	D

Procédure 4 : Borda

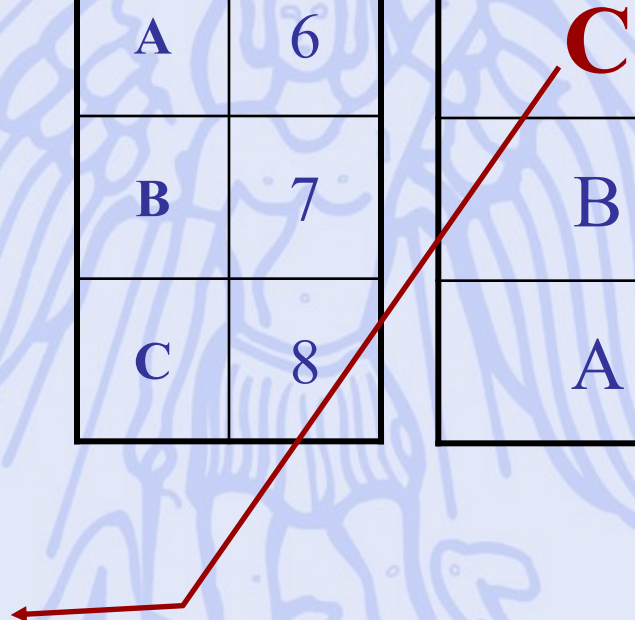
4 candidats: Albert, Bruno, Claire, ~~Diane~~

7 votants:

3 votants	2 votants	2 votants	Points	
C	B	A		2
B	A	C		1
A	C	B		0

Scores		Classement
A	6	C
B	7	B
C	8	A

Claire est élue



Borda (manipulation)

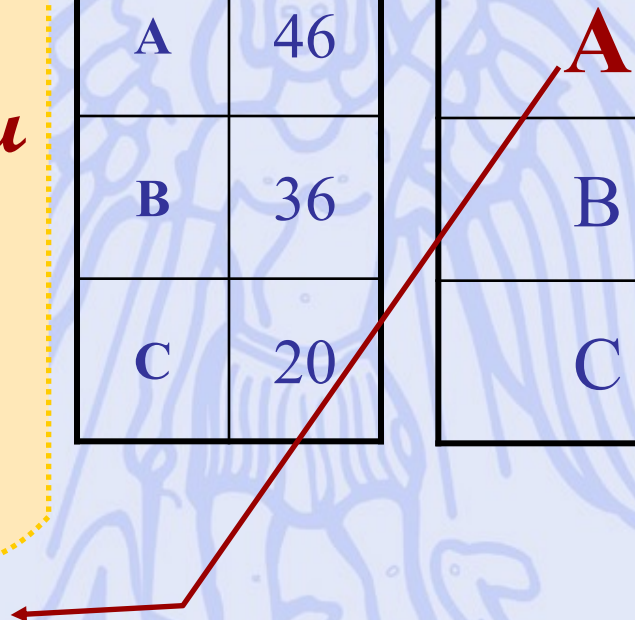
3 candidats: Albert, Bruno, Claire

34 votants:

*Les partisans de Bruno
suscitent la candidature du
candidat x (« candidat
bidon »)*

Scores		Classement
A	46	A
B	36	B
C	20	C

Albert est élu



Borda (manipulation)

4 candidats: Albert, Bruno, Claire, x

34 votants:

12 votants	12 votants	10 votants	Points	
A	B	C		3
B	x	A		2
C	A	B		1
x	C	x		0

Scores	
A	68
B	70
C	42
x	24

Classement
B
A
C
x

Bruno est élu!

Borda (manipulation)

4 candidats: Albert, Bruno, Claire, x

34 votants:

12 votants	12 votants	10 votants	Points
A	B	C	3
x	x	x	2
B	A	A	1
C	C	B	0

Scores		Classement
A	58	x
B	48	A
C	30	B
x	68	C

Le candidat « bidon » est élu!

Procédure 5 :

Eliminations successives

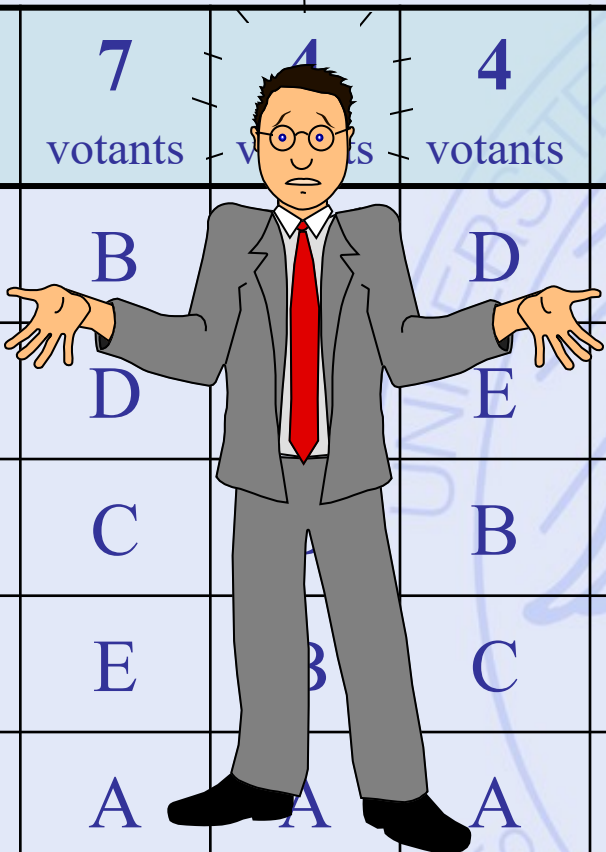
- Procédure par tours.
- Principe :
Eliminer à chaque tour le moins bon candidat, jusqu'à ce qu'il n'en reste plus qu'un.

En conclusion ?

5 candidats: Albert, Bruno, Claire, Diane, Eric

25 votants:

8 votants	7 votants	4 votants	4 votants	2 votants
A	B	D	C	
C	D	E	E	
D	C	B	D	
B	E	C	B	
E	A	A	A	



Majorité relative:

↳ **Albert est élu**

Procédure française:

↳ **Bruno est élu**

Procédure de Condorcet:

↳ **Claire est élue**

Procédure de Borda:

↳ **Diane est élue**

Eliminations successives:

↳ **Eric est élu**

Kenneth Arrow

(Nobel d'économie, 1972)

- **Théorème d'impossibilité (1952) :**
Avec au moins 2 votants et 3 candidats, il est impossible de construire une procédure de vote satisfaisant simultanément les 5 propriétés suivantes :
 - Non-dictature.
 - Universalité.
 - Indépendance vis-à-vis des tiers.
 - Monotonicité.
 - Non-imposition.

Problématiques

	g_1	g_2	g_3	...
a	$g_1(a)$	$g_2(a)$	$g_3(a)$...
b	$g_1(b)$	$g_2(b)$	$g_3(b)$...
c	...			
...	...			

Evaluations

- n actions
- k critères

- α - choix : déterminer un sous-ensemble d'actions (les « meilleures »).
- β - tri : trier les actions dans des catégories pré-déterminées.
- γ - classement : de la meilleure à la moins bonne action.
- δ - description : décrire les actions et leurs conséquences.

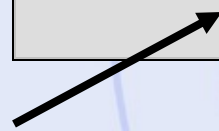
Une Approche Courante : La Somme Pondérée

Critères

	g_1	g_2	g_3	...
a	$g_1(a)$	$g_2(a)$	$g_3(a)$...
b	$g_1(b)$	$g_2(b)$	$g_3(b)$...
c	...			
...	...			
	W_1	W_2	W_3	...

Actions
ou
Décisions

Poids des
critères



Une Approche Courante : La Somme Pondérée

- Valeur globale de a :

$$V(a) = w_1 g_1(a) + w_2 g_2(a) + \dots$$

- a est meilleure que b si :

$$V(a) > V(b)$$

(en supposant que tous les critères soient à maximiser)

Somme Pondérée :

Exemple 1

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5
a	100	100	100	100	55
b	85	85	85	85	100
	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5

- $V(a) = 91$ $V(b) = 88$
- Compensation totale des points faibles par les points forts.

Somme Pondérée :

Exemple 2

	g_1	g_2
a	100	0
b	0	100
c	50	50
d	50	50
	$1/2$	$1/2$

- $V(a) = V(b) = V(c) = V(d) = 50$
- Elimination des conflits.

Somme Pondérée :

Exemple 3

*"Le bénéfice est environ 2 fois plus important que le gain de temps;
0.7 pour le bénéfice et 0.3 pour le gain de temps.*

	g_1 (BF)	g_2 (min)
a	60	60
b	48	70
	0.7	0.3

$$V(a) = 60$$

$$V(b) = 54.6$$

a est première.

Somme Pondérée :

Exemple 3

*"Le bénéfice est environ 2 fois plus important que le gain de temps;
0.7 pour le bénéfice et 0.3 pour le gain de temps.*

	g_1 (FF)	g_2 (min)
a	10	60
b	8	70
	0.7	0.3

$$V(a) = 25$$

$$V(b) = 26.6$$

b est première.

Somme Pondérée :

Exemple 3

	g_1 (BF)	g_2 (min)
a	60	60
b	48	70
	0.7	0.3

$$V(a) = 60$$

$$V(b) = 54.6$$

a est première.

	g_1 (FF)	g_2 (min)
a	10	60
b	8	70
	0.7	0.3

$$V(a) = 25$$

$$V(b) = 26.6$$

b est première.

Méthodes d'Aide à la Décision

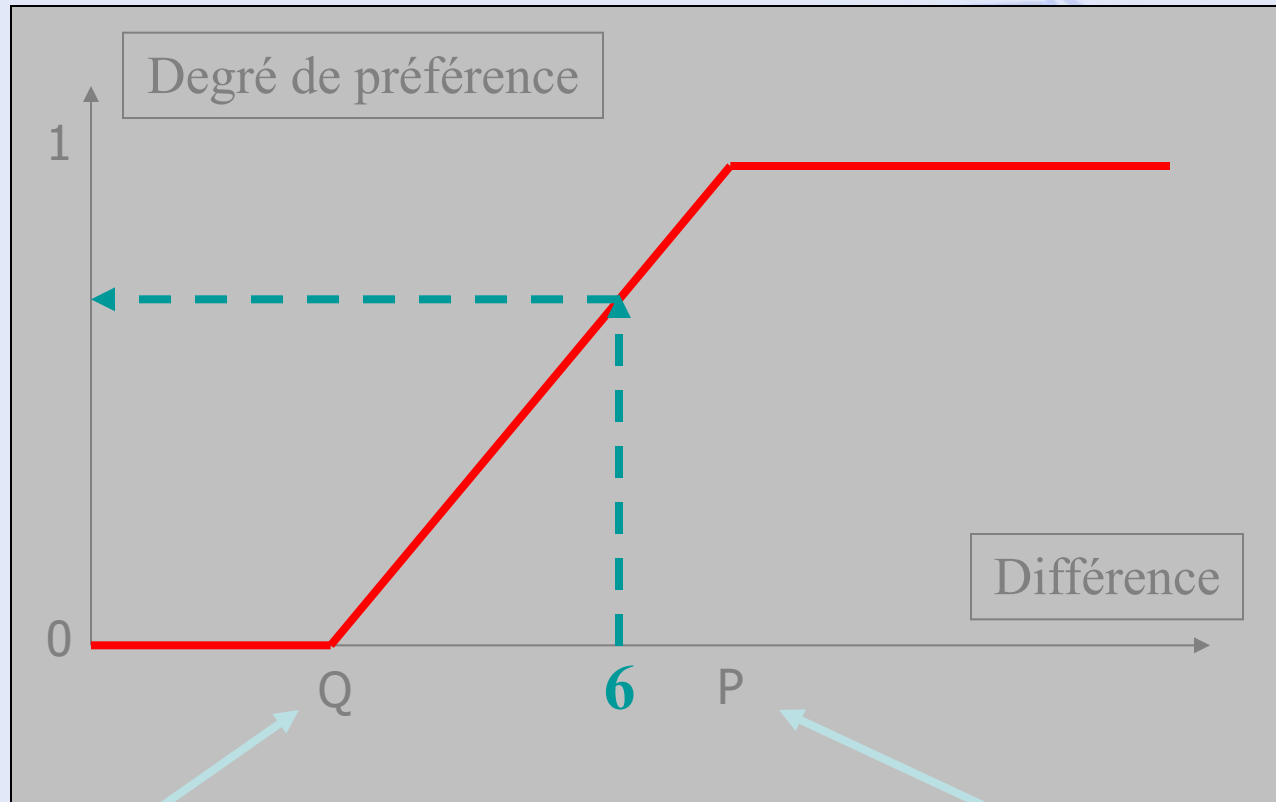
- Information supplémentaire :
Perception des échelles
Pondération des critères
- Procédure d'analyse :
Approche prescriptive : **PROMETHEE**
Approche descriptive : **GAIA**



Comparaison de 2 Actions

	Crit. 1 (/20)	Crit. 2 (cote)	Crit. 3 (appréc.)	Crit. 4 (O/N)	...
Action 1	18	135	B	Oui	...
Action 2	9	147	Différence = 6		...
Action 3	15	129	TB	Non	...
Action 4	12	146	TM	?	...
Action 5	7	121	B	Oui	...
...

Fonctions de Préférence



Seuil d'indifférence

Linéaire

Seuil de préférence

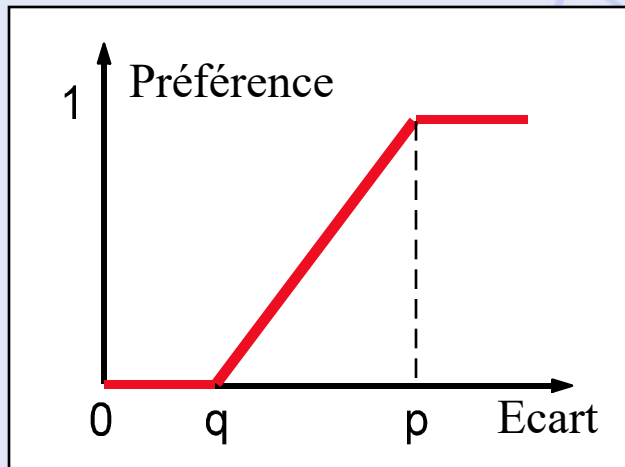
PROMETHEE

	Economic		Luxe 1	
<u>-230000</u>	250000	<i>Prix</i>	480000	
	50	<i>Puissance</i>	90	<u>+40</u>
<u>-1,0</u>	7,5	<i>Consomm.</i>	8,5	
	2	<i>Habitabilité</i>	4	<u>+2</u>
	1	<i>Confort</i>	5	<u>+4</u>



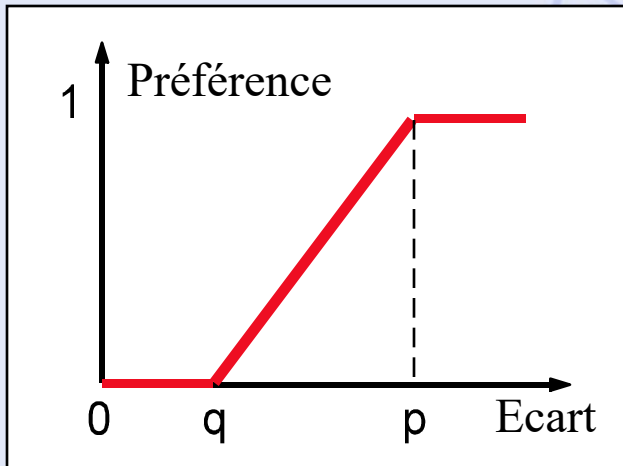
PROMETHEE

		Economic		Luxe 1		
1,0	<u>-230000</u>	250000	Prix	480000		
		50	Puissance	90	<u>+40</u>	1,0
0,5	<u>-1,0</u>	7,5	Consomm.	8,5		
		2	Habitabilité	4	<u>+2</u>	0,5
		1	Confort	5	<u>+4</u>	1,0



PROMETHEE

Préf (Eco.,Lux.)		Economic		Luxe 1	Préf (Lux.,Eco.)	
1,0	<u>-230000</u>	250000	Prix	480000		0,0
0,0		50	Puissance	90	<u>+40</u>	1,0
0,5	<u>-1,0</u>	7,5	Consomm.	8,5		0,0
0,0		2	Habitabilité	4	<u>+2</u>	0,5
0,0		1	Confort	5	<u>+4</u>	1,0

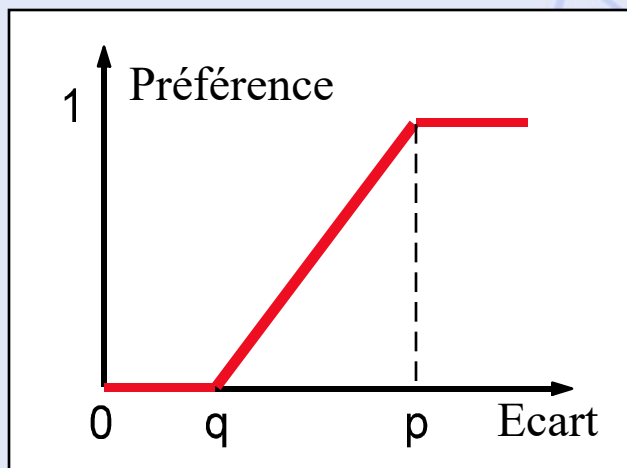


PROMETHEE

Préf (Eco.,Lux.)

Préf (Lux.,Eco.)

		Economic		Luxe 1			Poids
1,0	<u>-230000</u>	250000	Prix	480000		0,0	1
0,0		50	Puissance	90	<u>+40</u>	1,0	1
0,5	<u>-1,0</u>	7,5	Consomm.	8,5		0,0	1
0,0		2	Habitabilité	4	<u>+2</u>	0,5	1
0,0		1	Confort	5	<u>+4</u>	1,0	1



□ $\text{Préf (Eco.,Lux.)} = 0,3$
 $= (1 + 0 + 0,5 + 0 + 0) / 5$

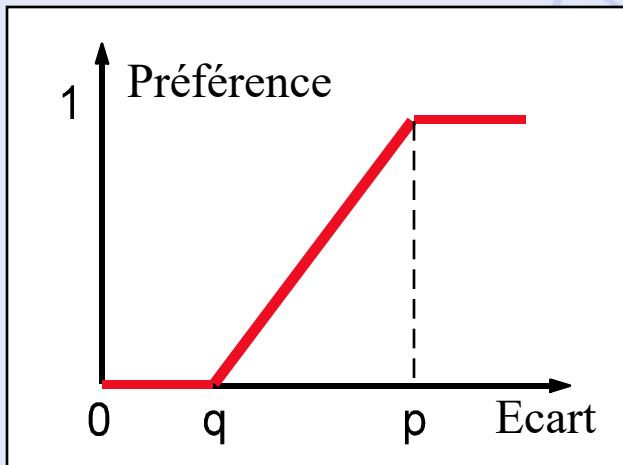
□ $\text{Préf (Lux.,Eco.)} = 0,5$
 $= (0 + 1 + 0 + 0,5 + 1) / 5$

PROMETHEE

Préf (Eco.,Lux.)

Préf (Lux.,Eco.)

		Economic		Luxe 1			Poids
1,0	<u>-230000</u>	250000	Prix	480000		0,0	2
0,0		50	Puissance	90	<u>+40</u>	1,0	1
0,5	<u>-1,0</u>	7,5	Consomm.	8,5		0,0	2
0,0		2	Habitabilité	4	<u>+2</u>	0,5	1
0,0		1	Confort	5	<u>+4</u>	1,0	1



□ $\text{Préf (Eco.,Lux.)} = 0,43$

$= (2 \times 1 + 0 + 2 \times 0,5 + 0 + 0) / 7$

□ $\text{Préf (Lux.,Eco.)} = 0,36$

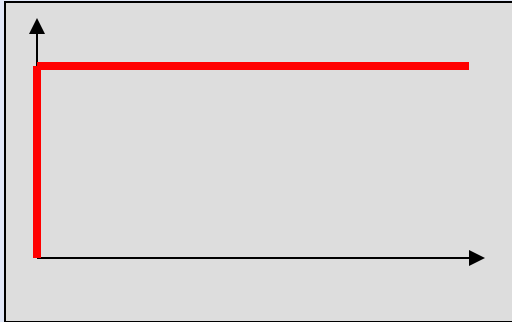
$= (0 + 1 + 0 + 0,5 + 1) / 7$

Comparaisons par Paires

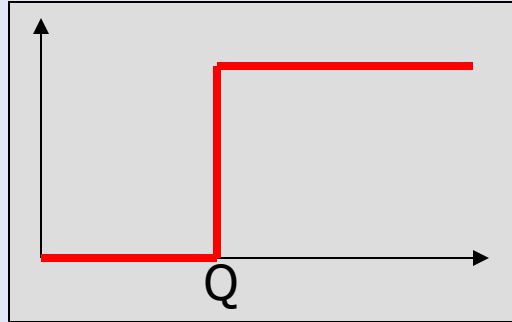
- Pour chaque critère g_j :
 - Fonction de préférence P_j
 - Poids w_j
- Degré de préférence multicritère de a sur b :

$$\pi(a, b) = \sum_{j=1}^k w_j P_j(a, b)$$

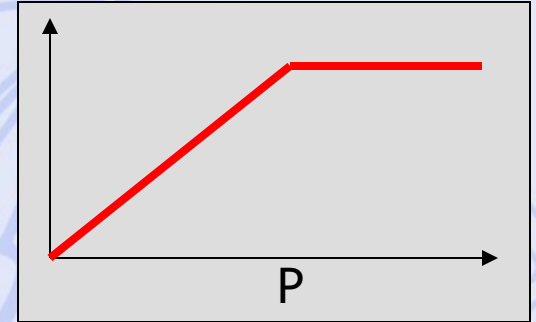
Fonctions de Préférence



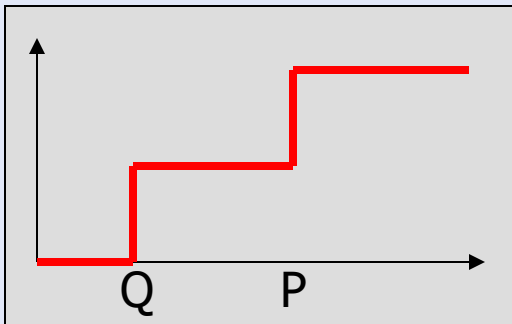
Critère usuel



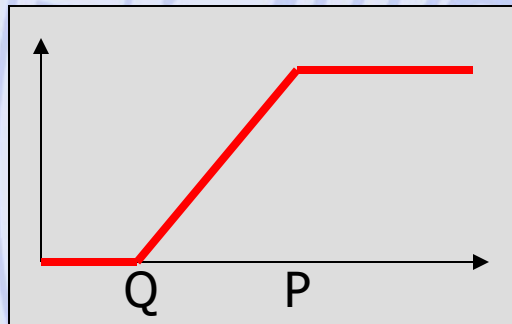
Critère en « U »



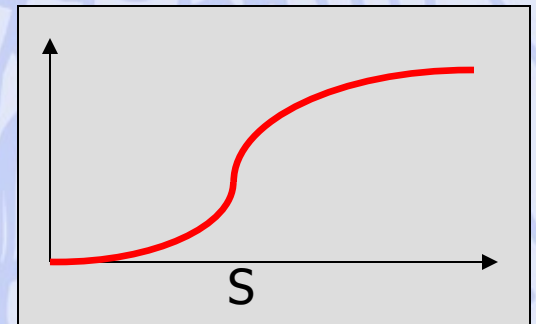
Critère en « V »



Critère à palier



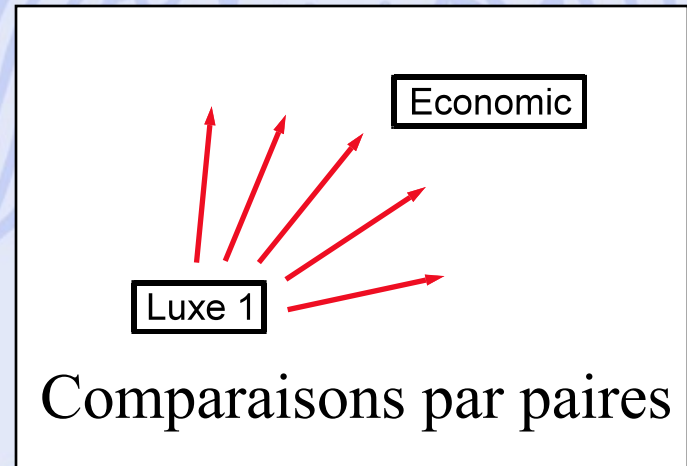
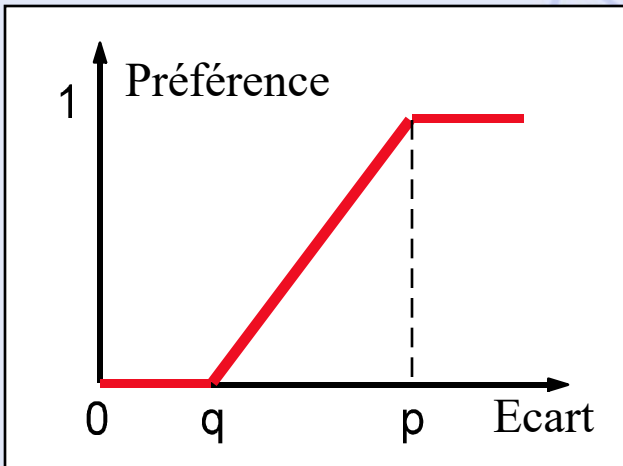
Critère linéaire



Critère Gaussien

PROMETHEE

Préf (Eco.,Lux.)		Economic		Luxe 1	Préf (Lux.,Eco.)	
1,0	<u>-230000</u>	250000	Prix	480000		0,0
0,0		50	Puissance	90	<u>+40</u>	1,0
0,5	<u>-1,0</u>	7,5	Consomm.	8,5		0,0
0,0		2	Habitabilité	4	<u>+2</u>	0,5
0,0		1	Confort	5	<u>+4</u>	1,0



Matrice des $\pi(a,b)$

$\pi(a,b)$	<i>Moy.A</i>	<i>Sport</i>	<i>Moy.B</i>	<i>Lux.1</i>	<i>Econ.</i>	<i>Lux.2</i>	$\phi^+(a)$
<i>Moy.A</i>	0,00						
<i>Sport</i>		0,00					
<i>Moy.B</i>			0,00				
<i>Lux.1</i>				0,00	0,50		
<i>Econ.</i>				0,30	0,00		
<i>Lux.2</i>						0,00	
$\phi^-(a)$							
$\phi(a)$							

Matrice des $\pi(a,b)$

$\pi(a,b)$	<i>Moy.A</i>	<i>Sport</i>	<i>Moy.B</i>	<i>Lux.1</i>	<i>Econ.</i>	<i>Lux.2</i>	$\phi^+(a)$
<i>Moy.A</i>	0,00	0,34	0,00	0,21	0,26	0,22	
<i>Sport</i>	0,20	0,00	0,16	0,24	0,30	0,24	
<i>Moy.B</i>	0,15	0,55	0,00	0,32	0,45	0,33	
<i>Lux.1</i>	0,18	0,45	0,10	0,00	0,50	0,15	
<i>Econ.</i>	0,20	0,34	0,14	0,30	0,00	0,35	
<i>Lux.2</i>	0,24	0,30	0,10	0,04	0,60	0,00	
$\phi^-(a)$							
$\phi(a)$							

Calcul de $\phi^+(a)$

$\pi(a,b)$	<i>Moy.A</i>	<i>Sport</i>	<i>Moy.B</i>	<i>Lux.1</i>	<i>Econ.</i>	<i>Lux.2</i>	$\phi^+(a)$
<i>Moy.A</i>	0,00	0,34	0,00	0,21	0,26	0,22	0,21
<i>Sport</i>	0,20	0,00	0,16	0,24	0,30	0,24	0,23
<i>Moy.B</i>	0,15	0,55	0,00	0,32	0,45	0,33	0,36
<i>Lux.1</i>	0,18	0,45	0,10	0,00	0,50	0,15	0,28
<i>Econ.</i>	0,20	0,34	0,14	0,30	0,00	0,35	0,27
<i>Lux.2</i>	0,24	0,30	0,10	0,04	0,60	0,00	0,26
$\phi^-(a)$							
$\phi(a)$							

Calcul de $\phi^+(a)$

$\pi(a,b)$	<i>Moy.A</i>	<i>Sport</i>	<i>Moy.B</i>	<i>Lux.1</i>	<i>Econ.</i>	<i>Lux.2</i>	$\phi^+(a)$
<i>Moy.A</i>	0,00	0,34	0,00	0,21	0,26	0,22	0,21
<i>Sport</i>	0,20	0,00	0,16	0,24	0,30	0,24	0,23
<i>Moy.B</i>	0,15	0,55	0,00	0,32	0,45	0,33	0,36
<i>Lux.1</i>	0,18	0,45	0,10	0,00	0,50	0,15	0,28
<i>Econ.</i>	0,20	0,34	0,14	0,30	0,00	0,35	0,27
<i>Lux.2</i>	0,24	0,30	0,10	0,04	0,60	0,00	0,26
$\phi^-(a)$							
$\phi(a)$							

Calcul de $\phi^-(a)$

$\pi(a,b)$	<i>Moy.A</i>	<i>Sport</i>	<i>Moy.B</i>	<i>Lux.1</i>	<i>Econ.</i>	<i>Lux.2</i>	$\phi^+(a)$
<i>Moy.A</i>	0,00	0,34	0,00	0,21	0,26	0,22	0,21
<i>Sport</i>	0,20	0,00	0,16	0,24	0,30	0,24	0,23
<i>Moy.B</i>	0,15	0,55	0,00	0,32	0,45	0,33	0,36
<i>Lux.1</i>	0,18	0,45	0,10	0,00	0,50	0,15	0,28
<i>Econ.</i>	0,20	0,34	0,14	0,30	0,00	0,35	0,27
<i>Lux.2</i>	0,24	0,30	0,10	0,04	0,60	0,00	0,26
$\phi^-(a)$	0,19	0,40	0,10	0,22	0,42	0,26	
$\phi(a)$							

Calcul de $\phi^-(a)$

$\pi(a,b)$	<i>Moy.A</i>	<i>Sport</i>	<i>Moy.B</i>	<i>Lux.1</i>	<i>Econ.</i>	<i>Lux.2</i>	$\phi^+(a)$
<i>Moy.A</i>	0,00	0,34	0,00	0,21	0,26	0,22	0,21
<i>Sport</i>	0,20	0,00	0,16	0,24	0,30	0,24	0,23
<i>Moy.B</i>	0,15	0,55	0,00	0,32	0,45	0,33	0,36
<i>Lux.1</i>	0,18	0,45	0,10	0,00	0,50	0,15	0,28
<i>Econ.</i>	0,20	0,34	0,14	0,30	0,00	0,35	0,27
<i>Lux.2</i>	0,24	0,30	0,10	0,04	0,60	0,00	0,26
$\phi^-(a)$	0,19	0,40	0,10	0,22	0,42	0,26	
$\phi(a)$							

Calcul de $\phi(a)$

$\pi(a,b)$	<i>Moy.A</i>	<i>Sport</i>	<i>Moy.B</i>	<i>Lux.1</i>	<i>Econ.</i>	<i>Lux.2</i>	$\phi^+(a)$
<i>Moy.A</i>	0,00	0,34	0,00	0,21	0,26	0,22	0,21
<i>Sport</i>	0,20	0,00	0,16	0,24	0,30	0,24	0,23
<i>Moy.B</i>	0,15	0,55	0,00	0,32	0,45	0,33	0,36
<i>Lux.1</i>	0,18	0,45	0,10	0,00	0,50	0,15	0,28
<i>Econ.</i>	0,20	0,34	0,14	0,30	0,00	0,35	0,27
<i>Lux.2</i>	0,24	0,30	0,10	0,04	0,60	0,00	0,26
$\phi^-(a)$	0,19	0,40	0,10	0,22	0,42	0,26	
$\phi(a)$	0,02	-0,17	0,26	0,06	-0,15	0,00	

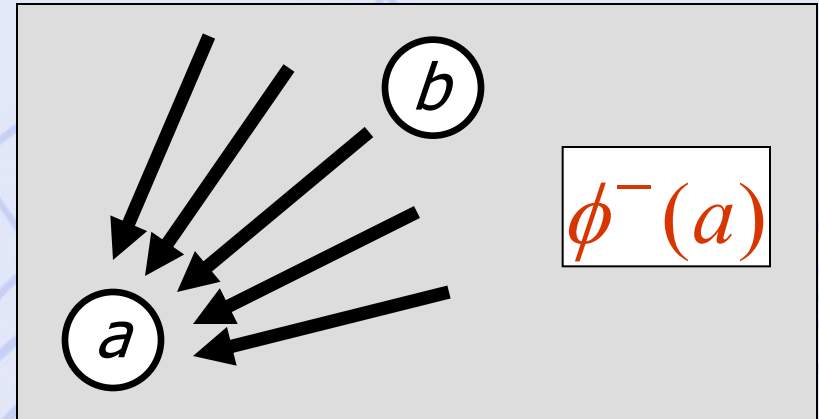
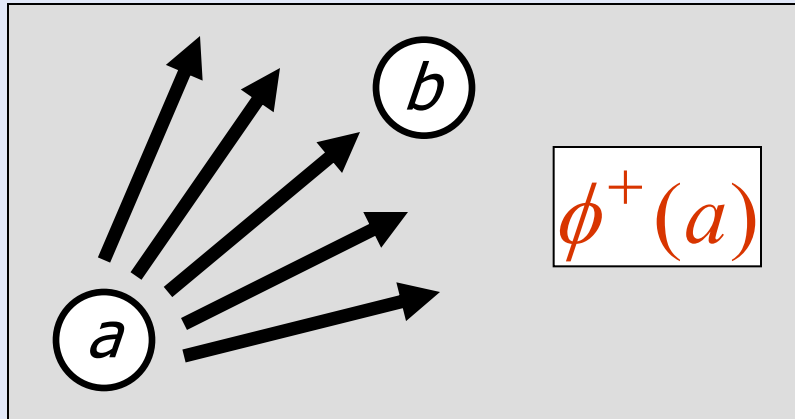
Calcul de $\phi(a)$

$\pi(a,b)$	<i>Moy.A</i>	<i>Sport</i>	<i>Moy.B</i>	<i>Lux.1</i>	<i>Econ.</i>	<i>Lux.2</i>	$\phi^+(a)$
<i>Moy.A</i>	0,00	0,34	0,00	0,21	0,26	0,22	0,21
<i>Sport</i>	0,20	0,00	0,16	0,24	0,30	0,24	0,23
<i>Moy.B</i>	0,15	0,55	0,00	0,32	0,45	0,33	0,36
<i>Lux.1</i>	0,18	0,45	0,10	0,00	0,50	0,15	0,28
<i>Econ.</i>	0,20	0,34	0,14	0,30	0,00	0,35	0,27
<i>Lux.2</i>	0,24	0,30	0,10	0,04	0,60	0,00	0,26
$\phi^-(a)$	0,19	0,40	0,10	0,22	0,42	0,26	
$\phi(a)$	0,02	-0,17	0,26	0,06	-0,15	0,00	

Calcul des flux de préférence

$\pi(a,b)$	<i>Moy.A</i>	<i>Sport</i>	<i>Moy.B</i>	<i>Lux.1</i>	<i>Econ.</i>	<i>Lux.2</i>	$\phi^+(a)$
<i>Moy.A</i>	0,00	0,34	0,00	0,21	0,26	0,22	0,21
<i>Sport</i>	0,20	0,00	0,16	0,24	0,30	0,24	0,23
<i>Moy.B</i>	0,15	0,55	0,00	0,32	0,45	0,33	0,36
<i>Lux.1</i>	0,18	0,45	0,10	0,00	0,50	0,15	0,28
<i>Econ.</i>	0,20	0,34	0,14	0,30	0,00	0,35	0,27
<i>Lux.2</i>	0,24	0,30	0,10	0,04	0,60	0,00	0,26
$\phi^-(a)$	0,19	0,40	0,10	0,22	0,42	0,26	
$\phi(a)$	0,02	-0,17	0,26	0,06	-0,15	0,00	

Flux de Préférence



- Flux sortant :
(puissance)
- Flux entrant :
(faiblesse)
- Flux net :

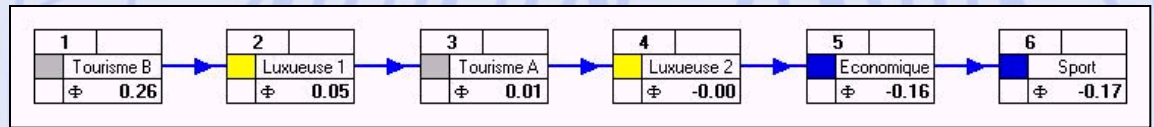
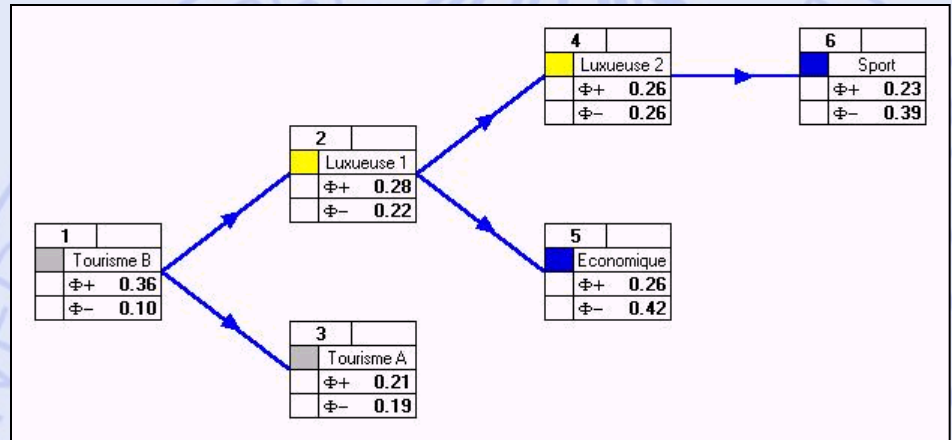
$$\phi^+(a) = \frac{1}{n-1} \sum_{b \in A} \pi(a, b)$$

$$\phi^-(a) = \frac{1}{n-1} \sum_{b \in A} \pi(b, a)$$

$$\phi(a) = \phi^+(a) - \phi^-(a)$$

PROMETHEE

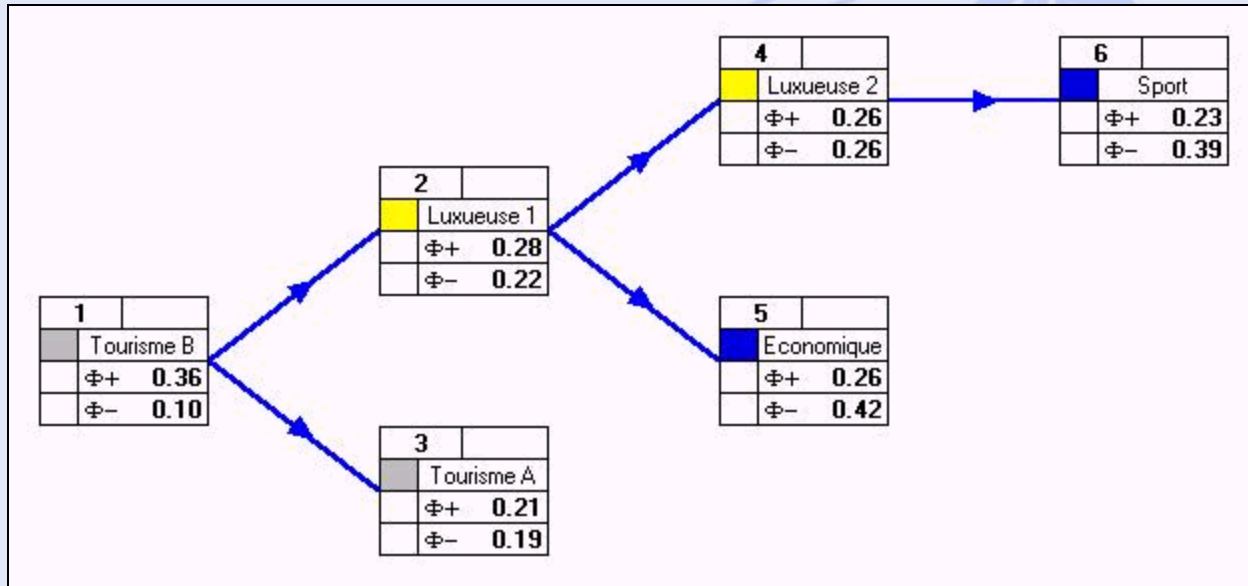
- Classer les décisions de la meilleure à la moins bonne
- Mettre en évidence les meilleurs compromis



PROMETHEE

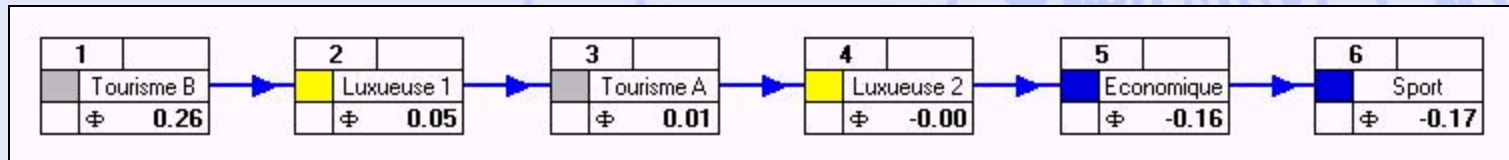
- PROMETHEE I : classement partiel

ϕ^+, ϕ^-



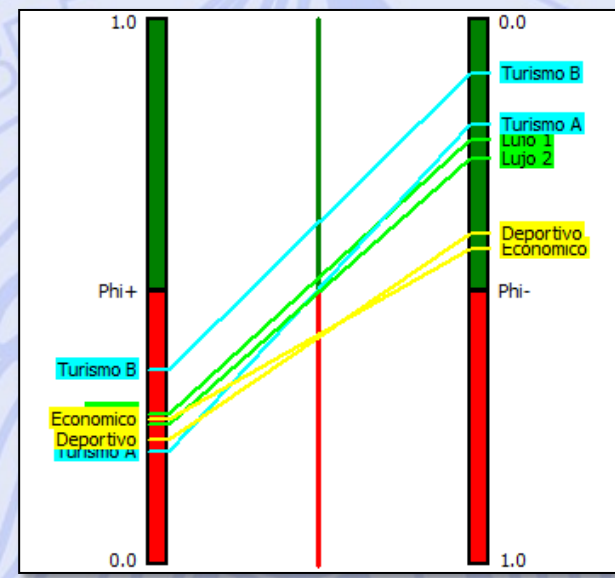
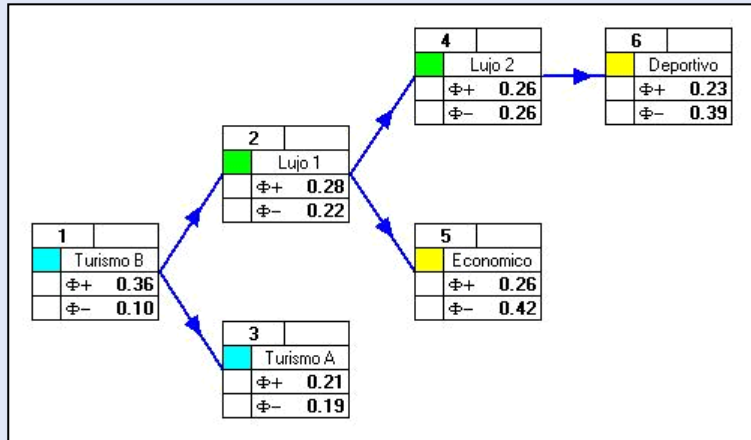
- PROMETHEE II : classement complet

ϕ

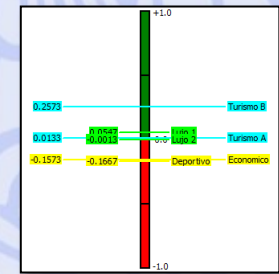
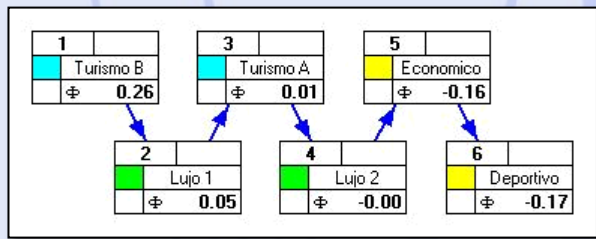


PROMETHEE I & II

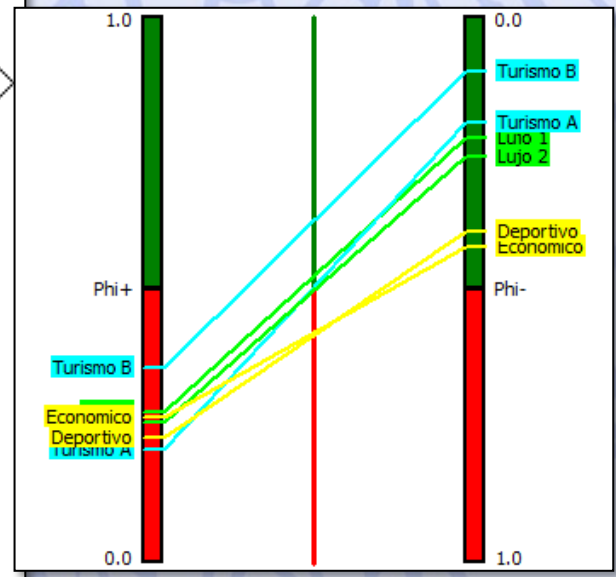
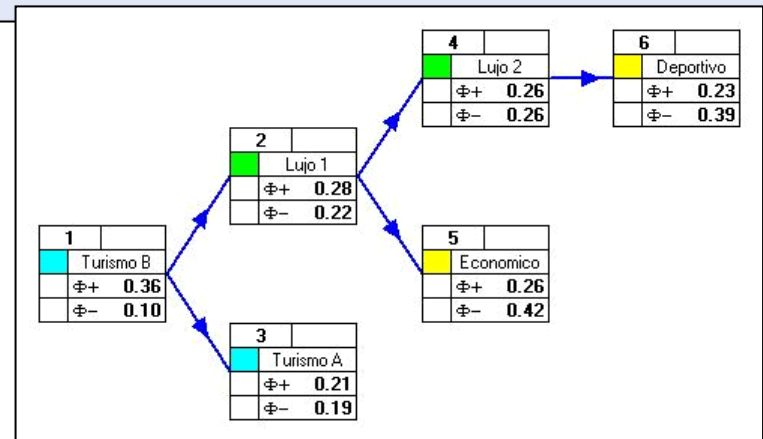
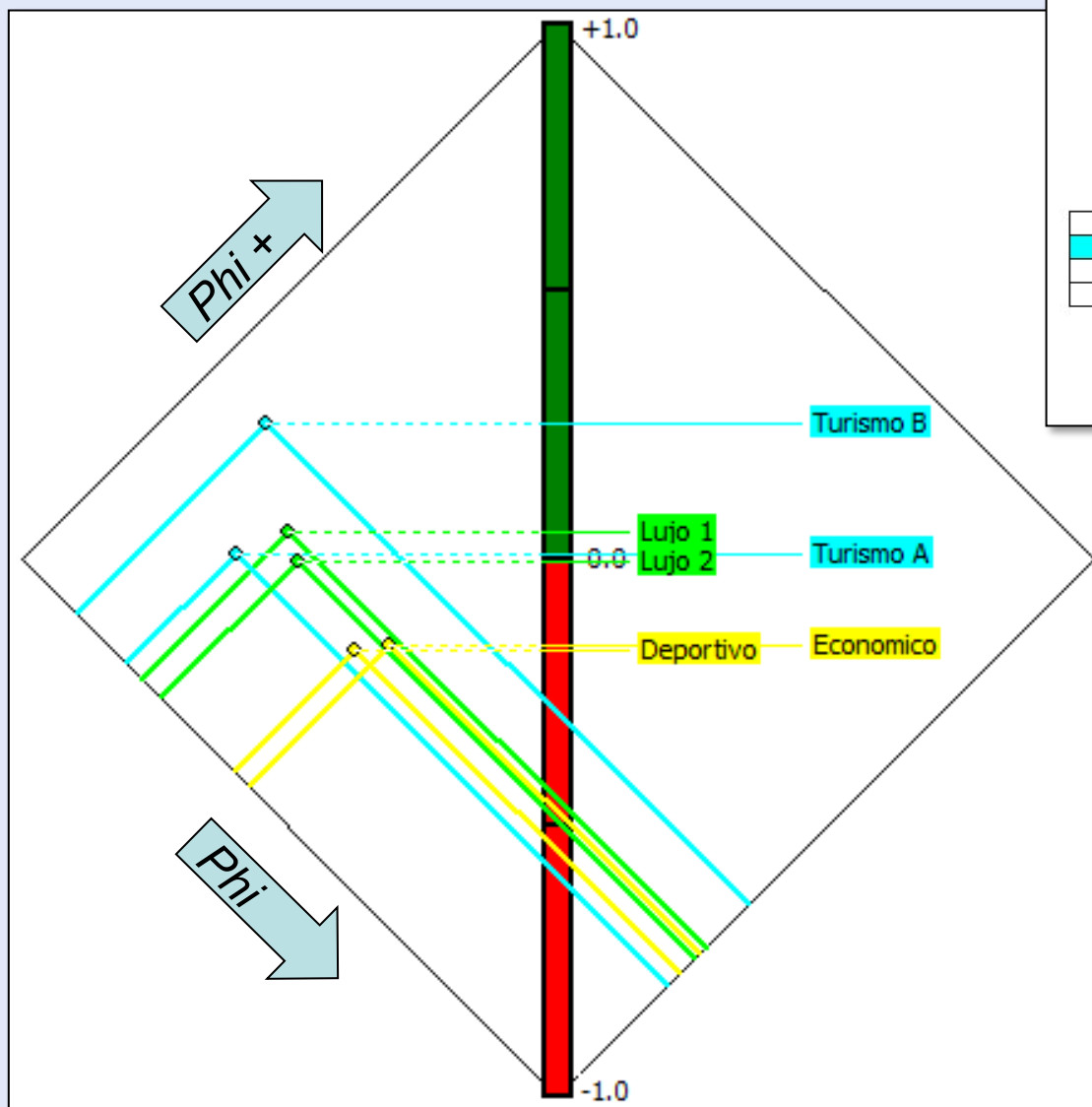
- PROMETHEE I : classement partiel - ϕ^+ , ϕ^-



- PROMETHEE II : classement complet - ϕ



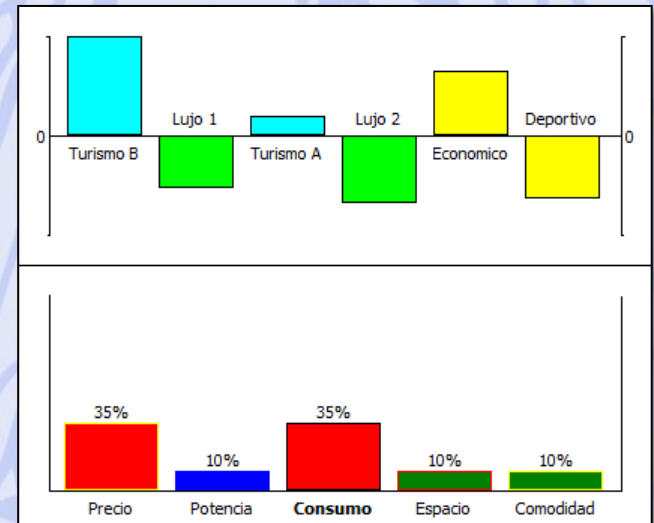
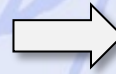
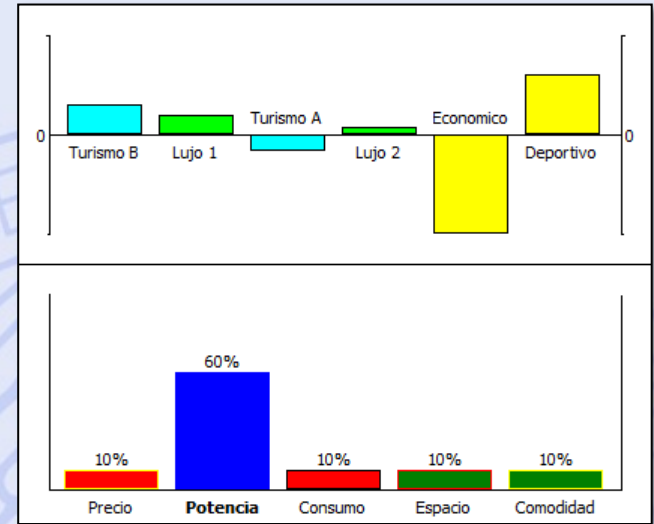
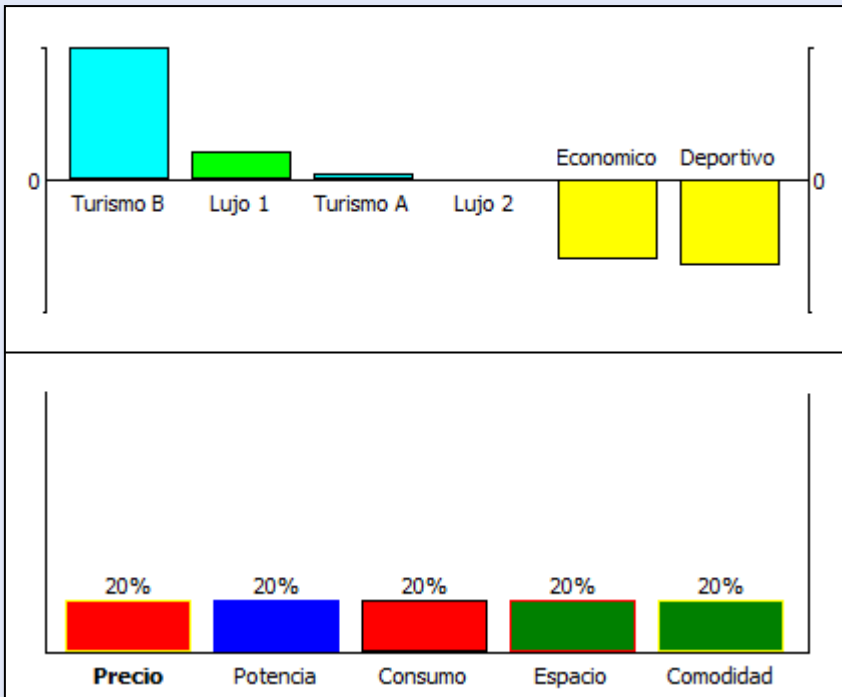
Diamant PROMETHEE



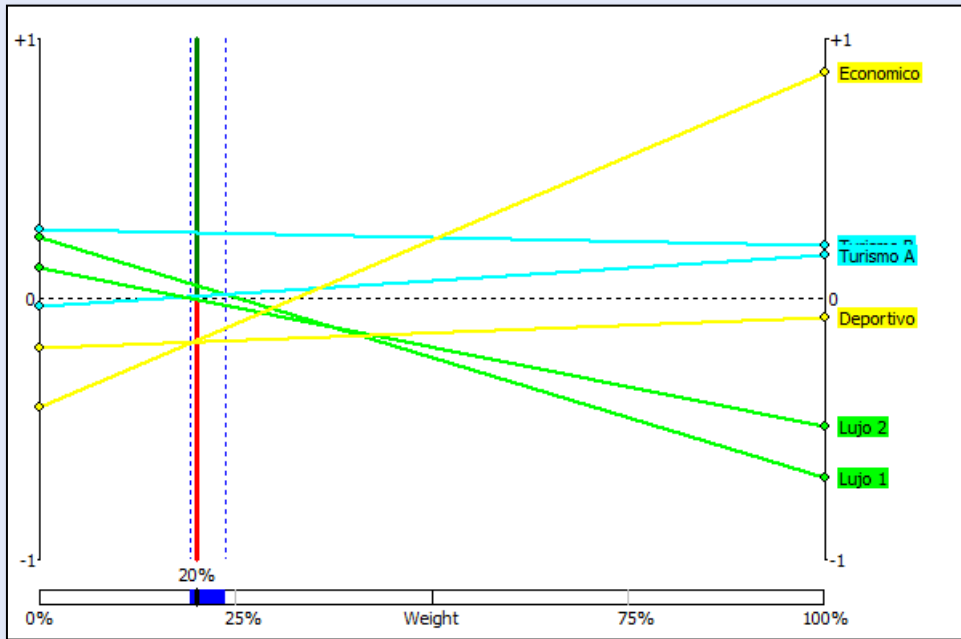
Analyse de Sensibilité avec PROMETHEE

- Poids des critères \leftrightarrow classement PROMETHEE.
- Analyse de sensibilité interactive :
« Walking Weights ».
- Robustesse par rapport aux poids ?
 - Intervalles de stabilité.
 - Intervalles de stabilité visuels.

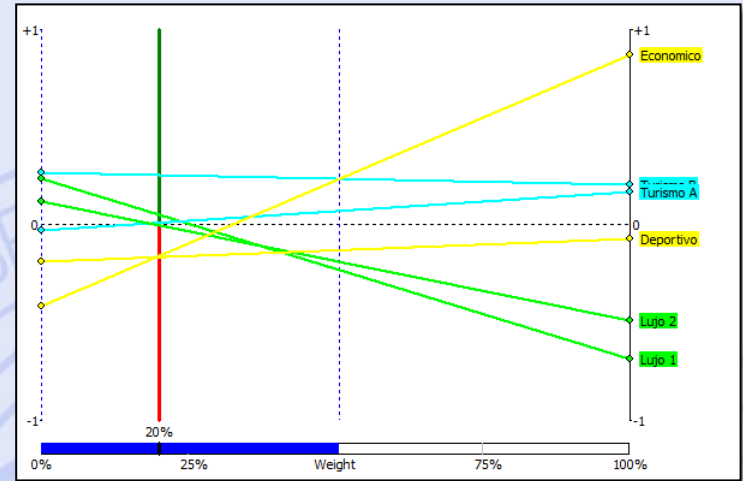
Walking Weights



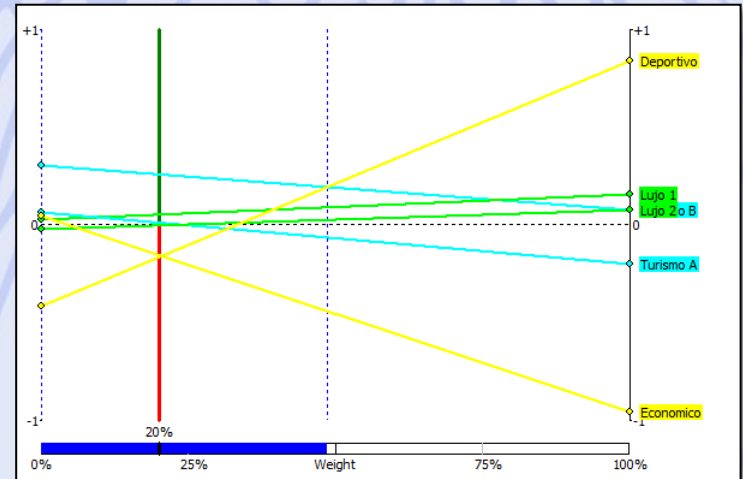
Visual Stability Intervals



VSI pour « Prix » (niveau 6):
[19.20% , 23.70%]

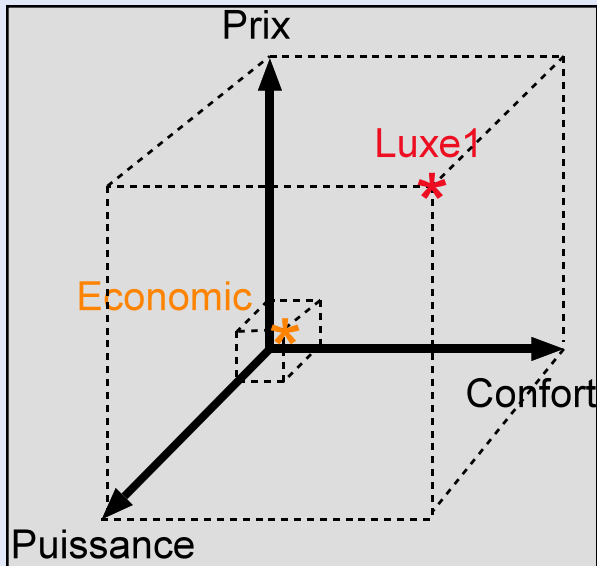


VSI pour « Prix » (niv. 1): [0.00% , 50.68%]



VSI pour « Puissance » (niv. 1): [0.00% , 48.65%]

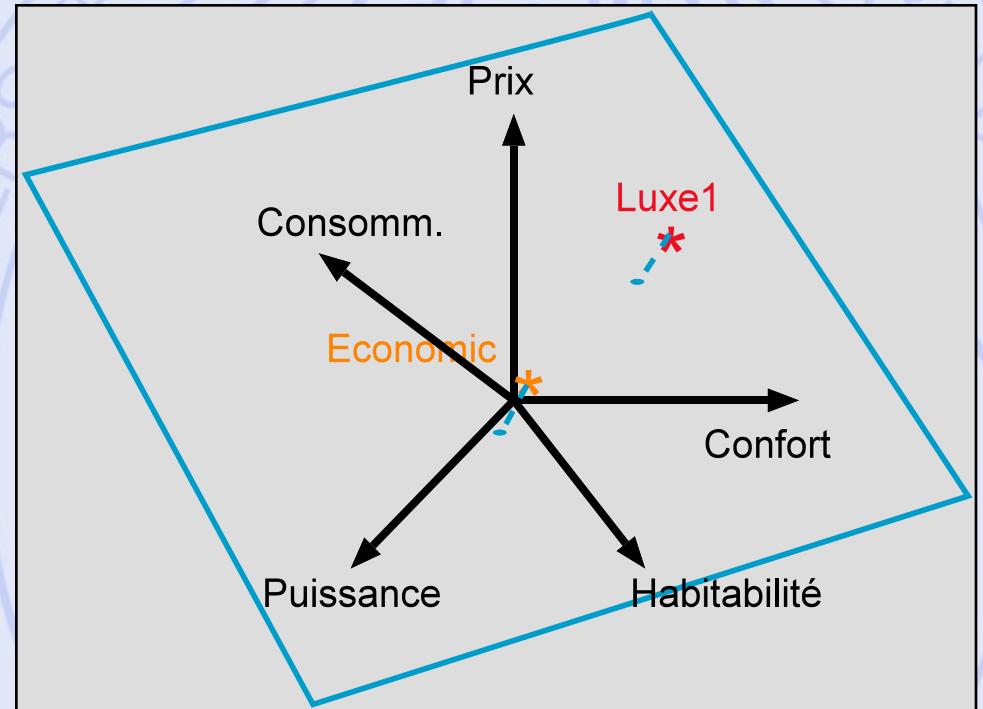
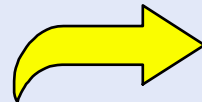
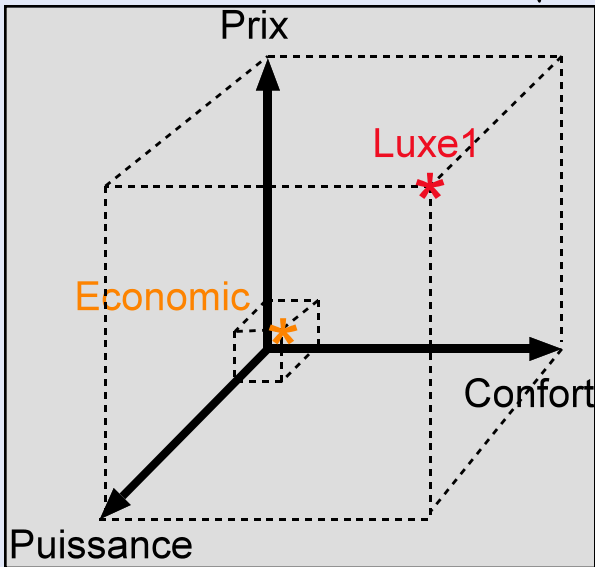
GAIA



- Représentation graphique.
- 5 dimensions !

GAIA

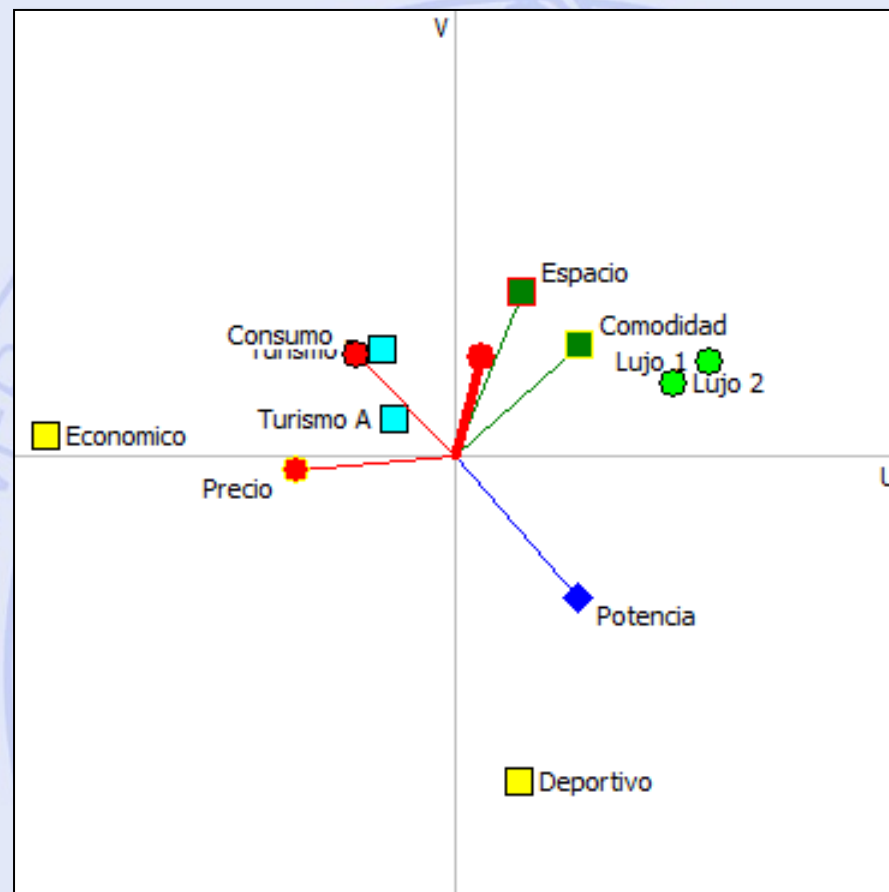
1. *Calcul des flux nets unicritères (normalisation)*
2. *Projection sur un plan :*



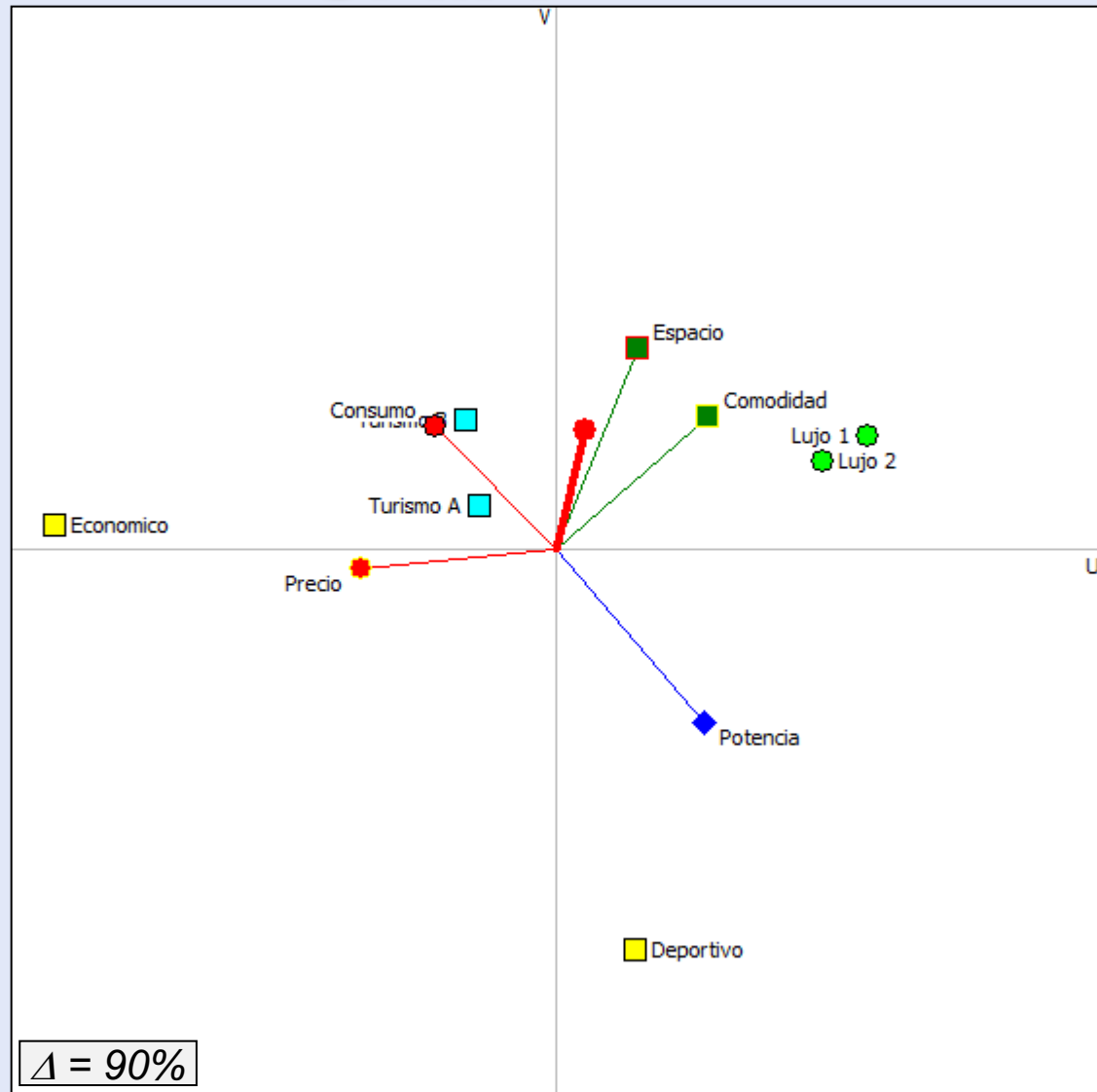
- Représentation graphique.
- 5 dimensions !

GAIA

- Mettre en évidence les conflits entre critères.
- Identifier les compromis possibles.
- Aider à fixer les priorités.

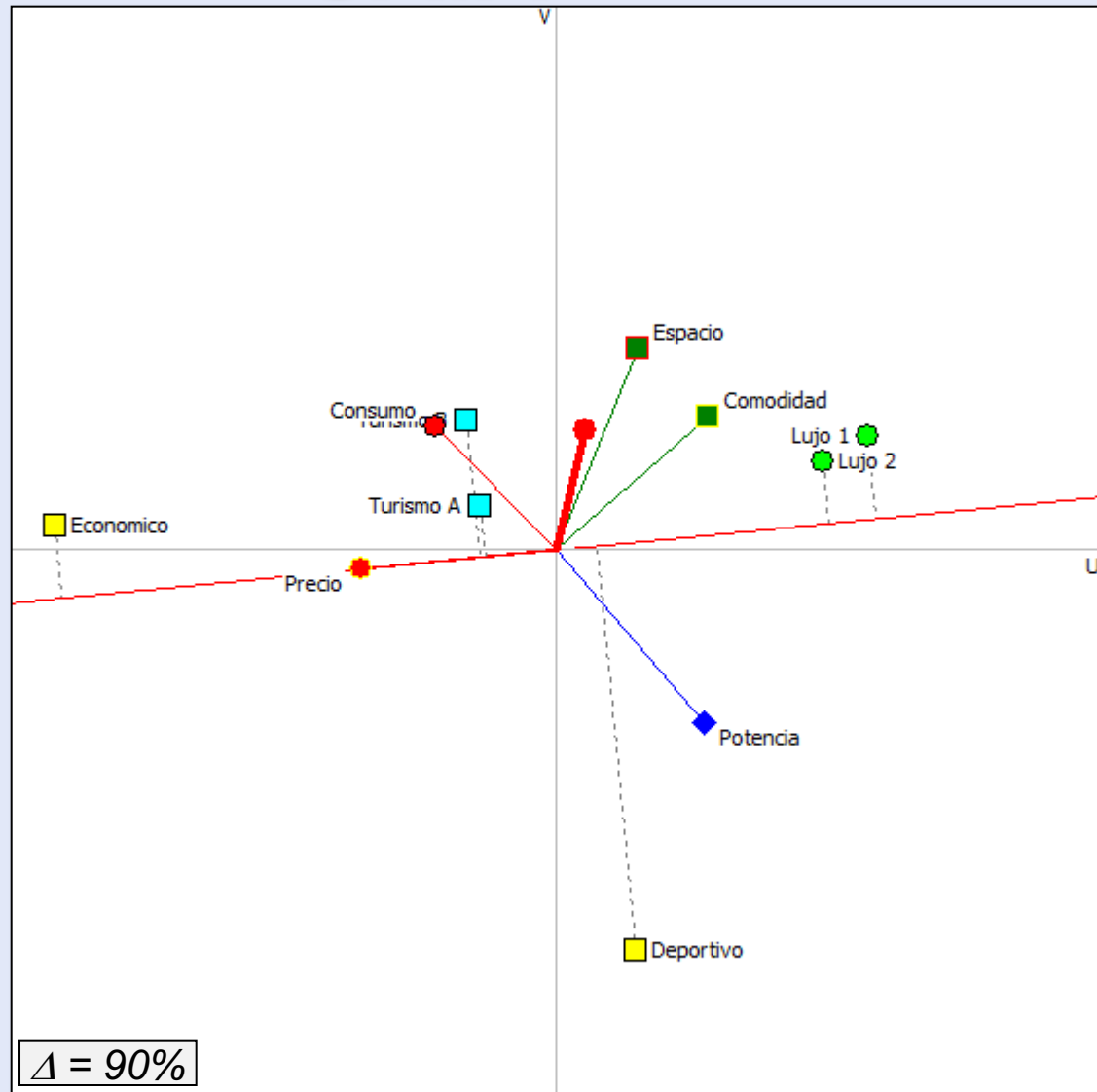


GAIA



- *Actions :*
points
- *Critères :*
axes

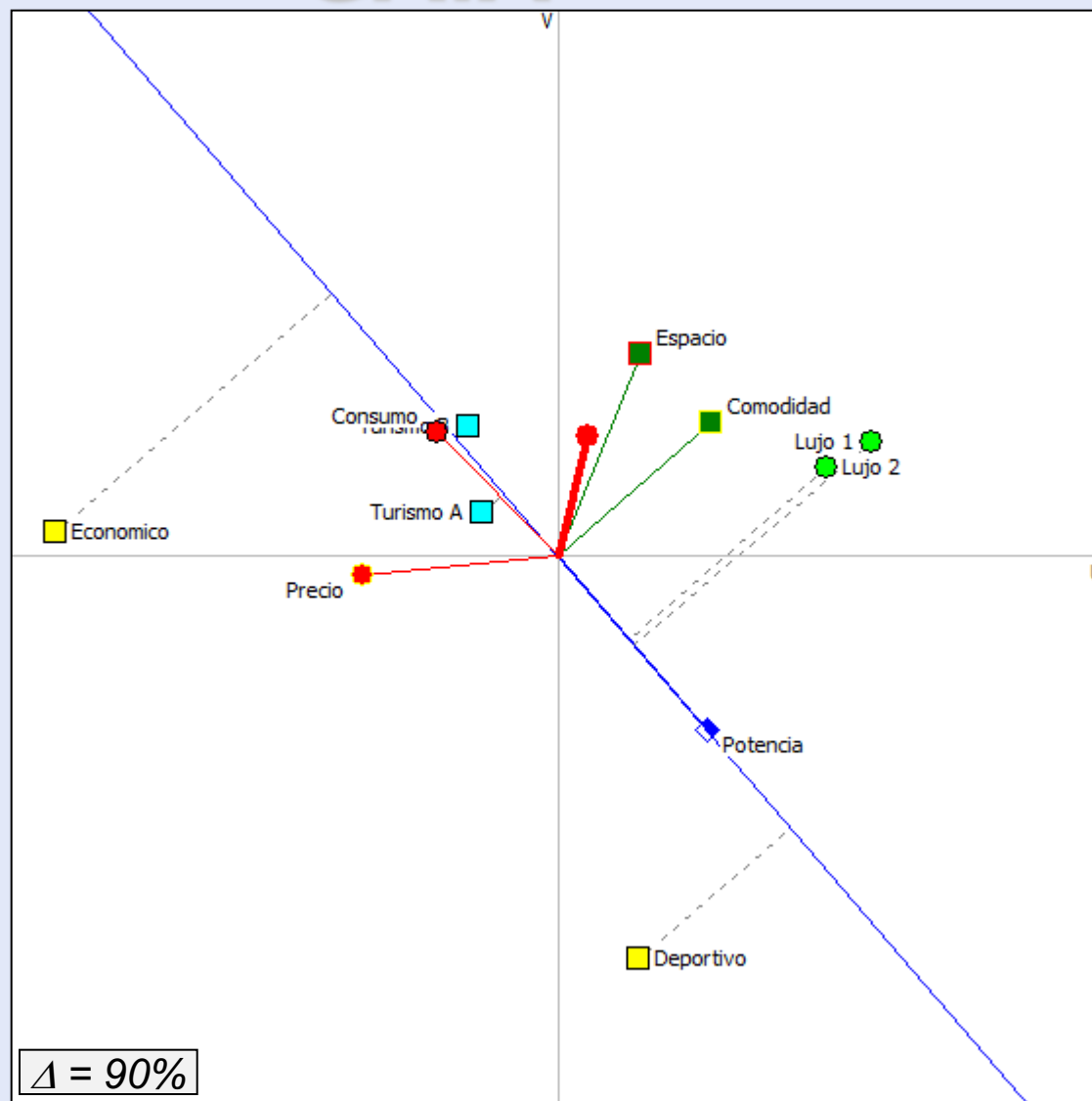
GAIA



Prix

- *Economico*: 15 k€
- *Turismo*: 25,5-26 k€
- *Deportivo*: 29 k€
- *Lujo*: 35-38 k€

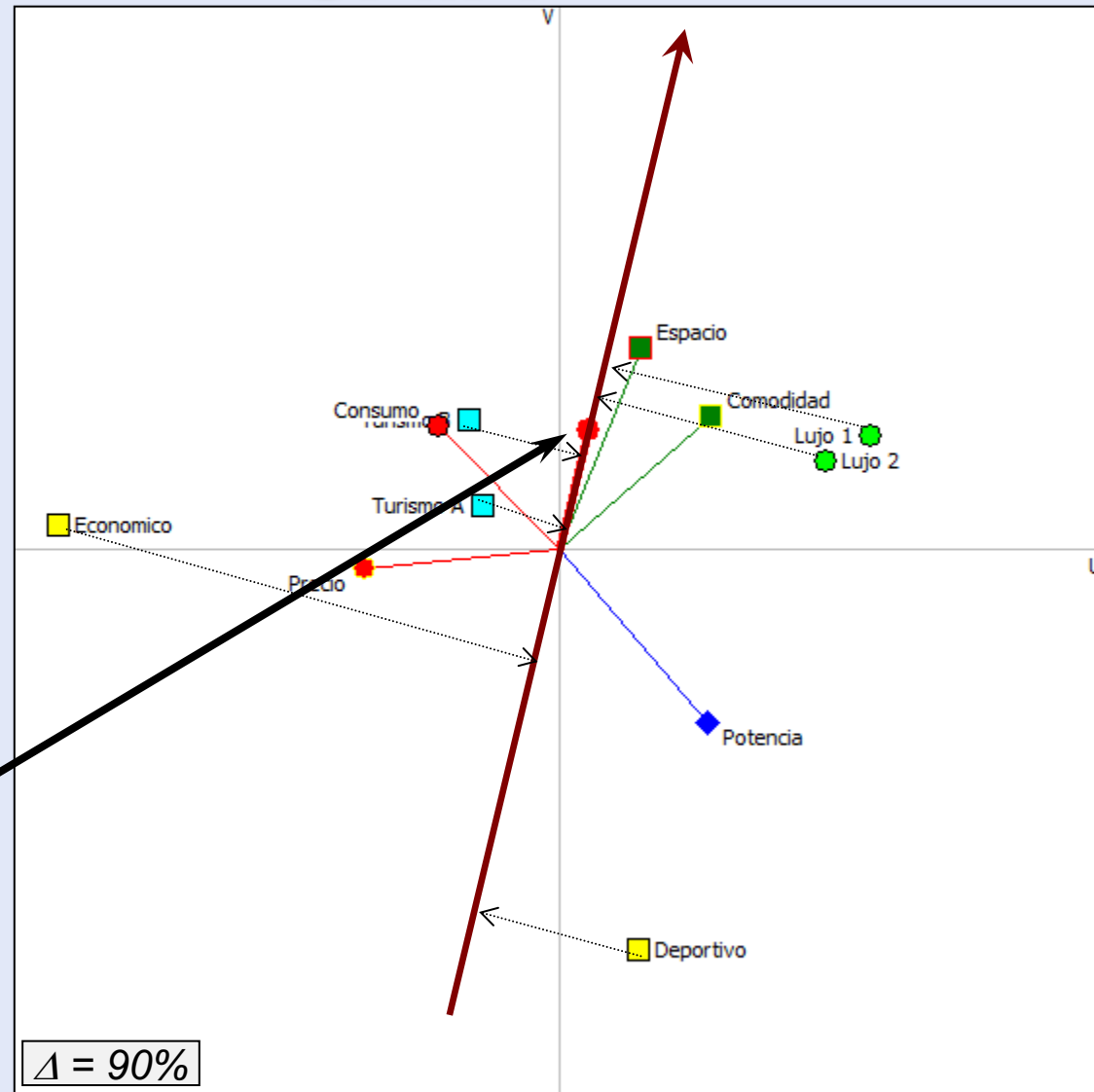
GAIA



Puissance

- Deportivo: 110 kW
- Lujo: 85-90 kW
- Turismo: 75-85 kW
- Economico: 50 kW

GAIA



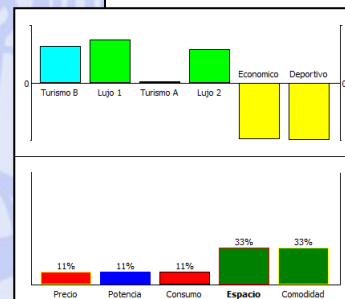
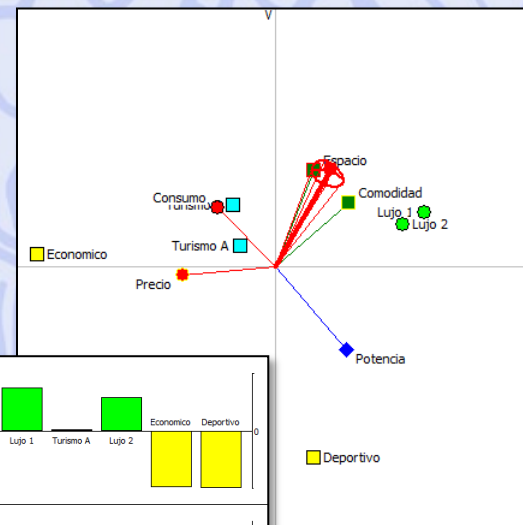
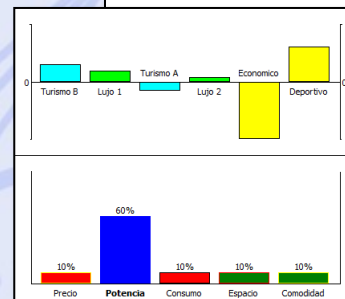
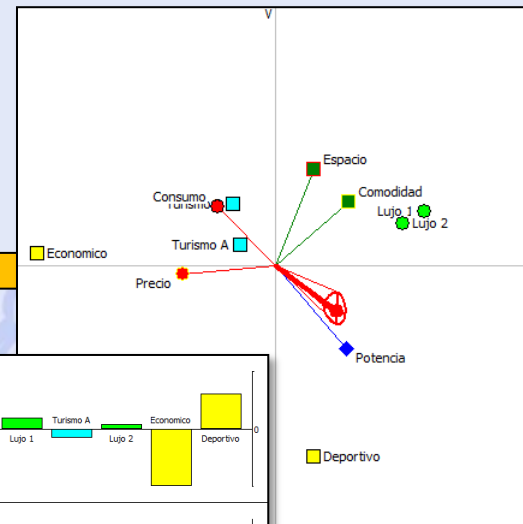
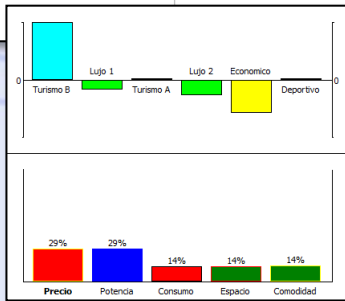
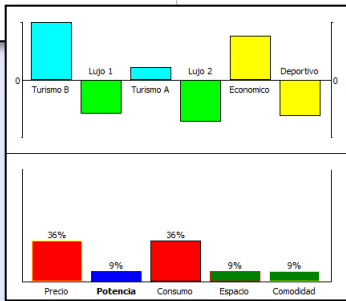
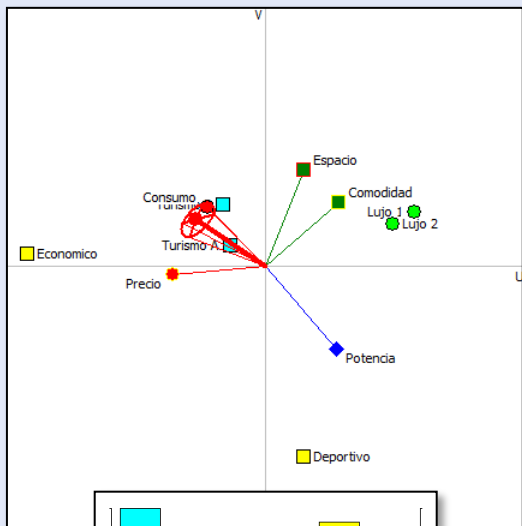
PROMETHEE II !

- Turismo B : 0,26
- Lujo 1 : 0,06
- Turismo A : 0,02
- Lujo 2 : 0,00
- Economico : -0,15
- Deportivo : -0,17

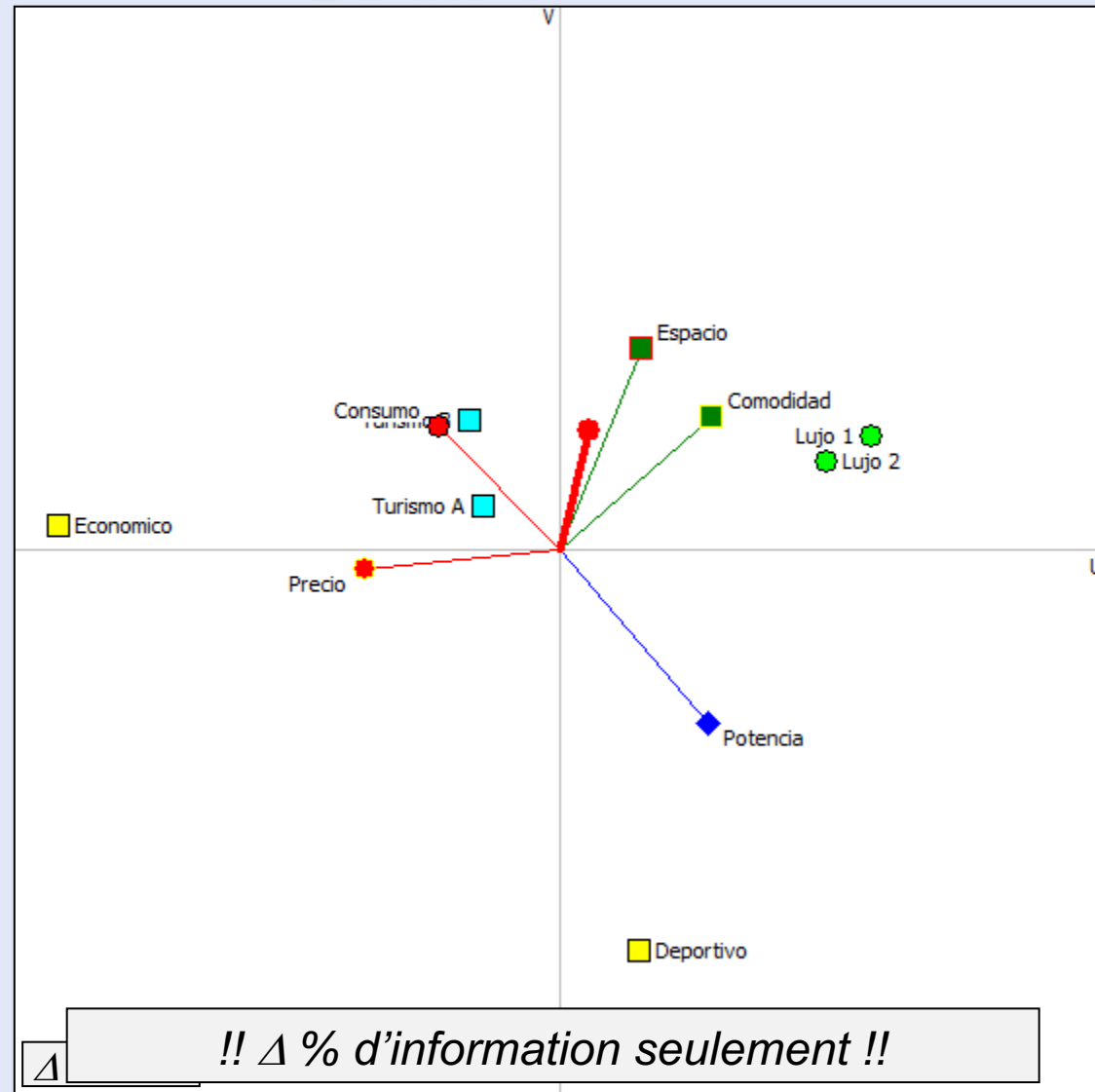
GALA-Brain

20 ans

35 ans

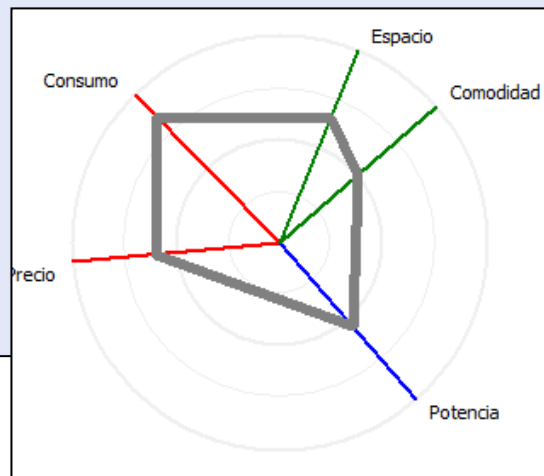
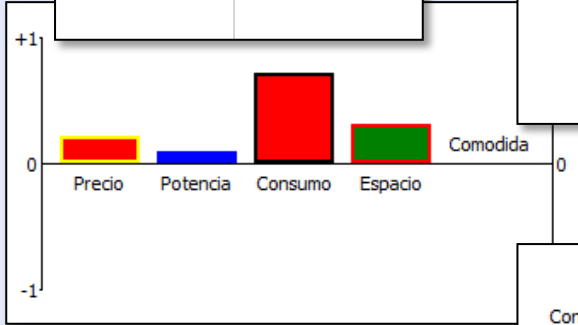
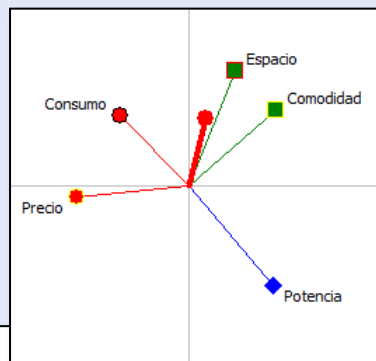


GAIA

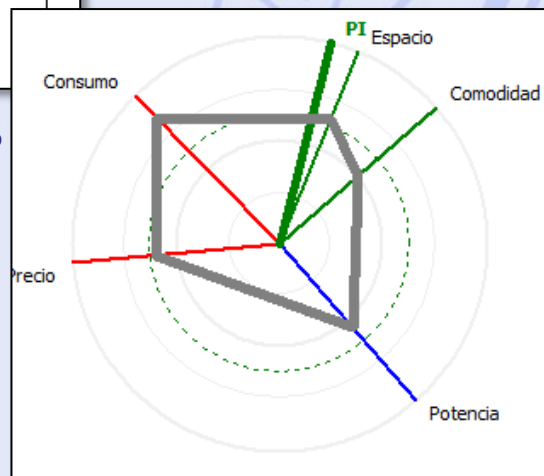


- *Actions :*
points
- *Critères :*
axes
- *Axe de décision*

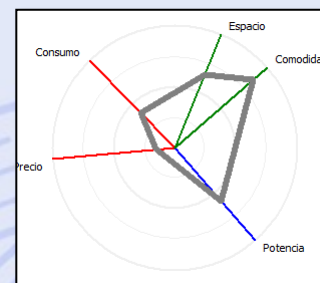
GAIA Webs



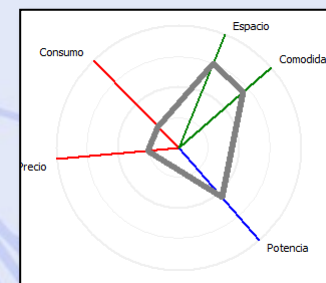
GAIA Web - Turismo B



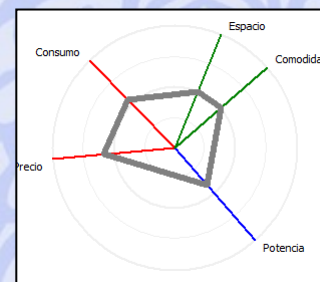
Action profile - Turismo B



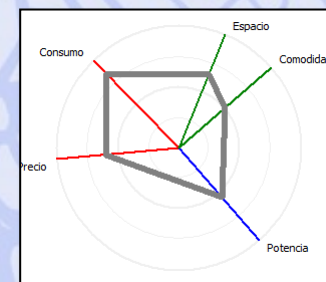
Lujo 1



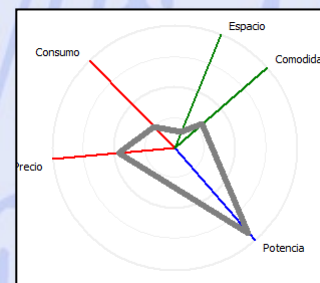
Lujo 2



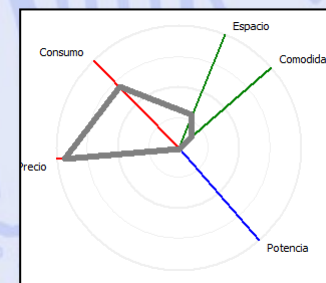
Turismo A



Turismo B



Deportes



Economico

Méthodes PROMETHEE & GAIA

- PROMETHEE : approche prescriptive
 - Classement partiel des actions
 - PROMETHEE I
 - Classement complet des actions
 - PROMETHEE II
- GAIA : approche descriptive
 - Identification des conflits entre critères.
 - Profils caractéristiques des actions.
 - Fixer les priorités, analyse de sensibilité.

Exemple 2 :

Localisation d'une usine

- Actions : 5 sites potentiels
- Critères :
 - f_1 : Coût (investissement)
 - f_2 : Coût (opérations)
 - f_3 : Emploi
 - f_4 : Transport
 - f_5 : Impact sur l'environnement
 - f_6 : Impact social

Tableau d'Evaluation

	Investment	Operations	Employment	Transportation	Environment	Social
Min/Max	Minimize	Minimize	Minimize	Maximize	Minimize	Minimize
Weight	25.0000	15.0000	20.0000	20.0000	10.0000	10.0000
Preference Functi	Linear	Linear	Linear	Level	Level	Level
Indifference Thres	5.00 %	5.00 %	5.00 %	0.5000	0.5000	0.5000
Preference Thres	25.00 %	25.00 %	10.00 %	1.5000	1.5000	1.5000
Gaussian Thresho	-	-	-	-	-	-
Threshold Unit	Percent	Percent	Percent	Absolute	Absolute	Absolute
Unit	M\$	M\$	workers	5-point	Impact	Impact
Site 1	74.0000	12.0000	175.0000	Average	High	Low
Site 2	86.0000	9.0000	170.0000	Good	Low	Very Low
Site 3	89.0000	7.0000	145.0000	Very Good	Very Low	Moderate
Site 4	115.0000	8.0000	95.0000	Bad	Low	High
Site 5	128.0000	10.0000	110.0000	Good	Moderate	Very Low

- Critères à minimiser ou maximiser.
- Echelles différentes.
- Critères quantitatifs ou qualitatifs.

Problèmes de Décision Mono- et Multidécideur

- Monodécideur :
 - Une seule partie prenante dans le processus.
 - Evaluations et structure de préférence uniques.
- Multidécideur :
 - Plusieurs parties prenantes.
 - Evaluations et structures de préférences multiples.
 - Recherche d'un consensus.

Exemple

- Quatre parties prenantes (“décideurs”) :
 - Industriel,
 - Pouvoirs publics (région),
 - Associations de protection de l’environnement,
 - Syndicats.
- Quatre tableaux multicritères.

Modèle Multi-scénarios

- Scénarios :
 - Points de vue,
 - Hypothèses de travail, ...
- Evaluations :
 - Critères 'objectifs' : évaluations communes.
 - Critères 'subjectifs' : évaluations particulières à chaque scénario.
- Structures de préférences différentes :
 - Poids, seuils de préférence.

Modèle Multi-scénarios

- Adaptation de PROMETHEE :
 - Classements individuels
 - Classements globaux (groupe) en tenant compte d'une pondération éventuelle des scénarios
- Adaptation de GAIA :
 - GAIA-Critères
 - GAIA-Scénarios
 - GAIA-Unicritère

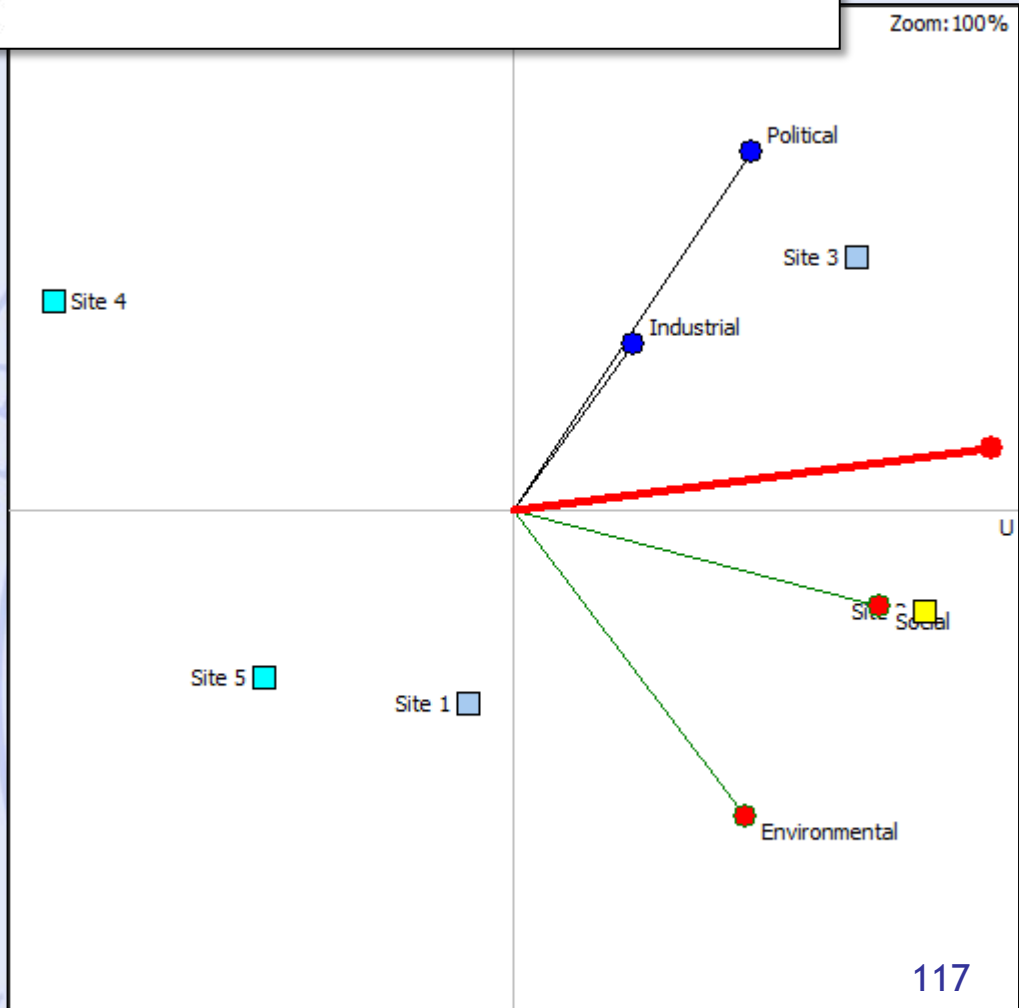
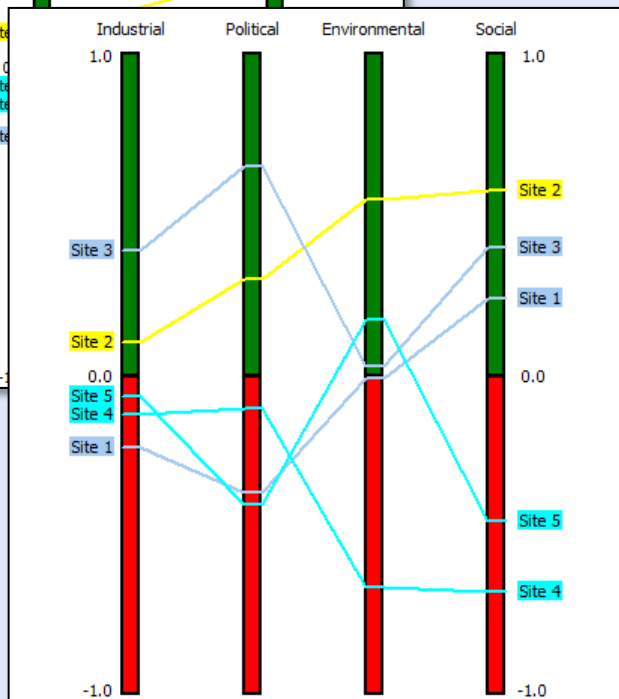
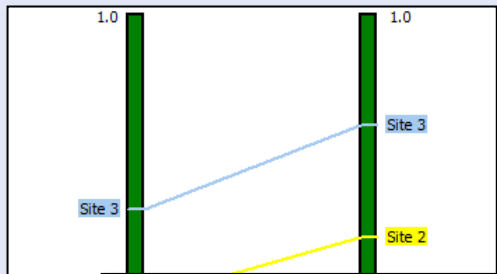
1	
Site 2	
$\phi+$	0.55
$\phi-$	0.18

2	
Site 3	
$\phi+$	0.58
$\phi-$	0.22

3	
Site 1	
$\phi+$	0.31
$\phi-$	0.42

4	
Site 5	
$\phi+$	0.26
$\phi-$	0.47

5	
Site 4	
$\phi+$	0.19
$\phi-$	0.61



Zoom: 100%

Visual PROMETHEE

WWW.PROMETHEE-GAIA.NET

- Hiérarchie de critères à 3 niveaux (cluster, groupe, critère).
- Outils de visualisation :
 - Classements PROMETHEE et Diamant,
 - Intervalles de stabilité visuels,
 - « Cerveau » (PROMETHEE VI),
 - GAIA-3D,
 - GAIA-Webs et PROMap (intégration SIG - Google Maps), ...

PROMap

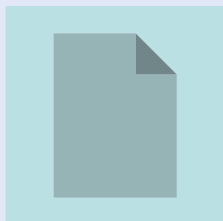
- *Intégration avec Google Maps* ☹️



Prise de décision en groupe

- Jusqu'à 80% du temps de travail des cadres supérieurs et dirigeants passé en réunions.
 - Temps (réunions, déplacements),
 - Coût élevé.
- Efficacité limitée des réunions classiques :
 - Temps de parole limité,
 - Freins psychologiques,
 - Mémoire limitée, ...
- Enjeux importants pour les organisations.

« GDSS Rooms »



Travail d'aide à la décision

- Travail de groupe (2 étudiant.e.s).
- Elaborer un problème de décision : min. 8 actions, 5 critères et 2 scénarios.
- Modéliser le problème avec PROMETHEE.
- Analyser le problème avec Visual PROMETHEE:
 - Classements PROMETHEE.
 - Analyse GAIA.
 - Analyse de sensibilité:
 - Poids des critères.
 - Différents scénarios.
 - Bonus: catégories, groupes, clusters, ...
- Présentation orale en fin de cours.
- Rapport écrit à rentrer au plus tard le jour de l'examen.

Etapes

1. Définir le problème :
 - Vérifier la faisabilité.
2. Définir les actions, critères et scénarios :
 - Echelles.
3. Modélisation des préférences :
 - Fonctions de préférences.
 - Pondération des critères.
4. Analyse critique :
 - Classements PROMETHEE.
 - GAIA.
 - Analyse de sensibilité (poids).
 - Analyse multi-scénarios.
 - Bonus (utilisation d'outils additionnels).
 - Conclusion.

Bonus

- Définition de catégories d'actions, de groupes et de clusters de critères.
- Utilisation d'outils supplémentaires :
 - Arc-en-ciel PROMETHEE,
 - Profils, GAIA-Webs,
 - Intervalles de stabilité,
 - PROMETHEE V,
 - GIS,
 - ...

Pour utiliser PROMETHEE

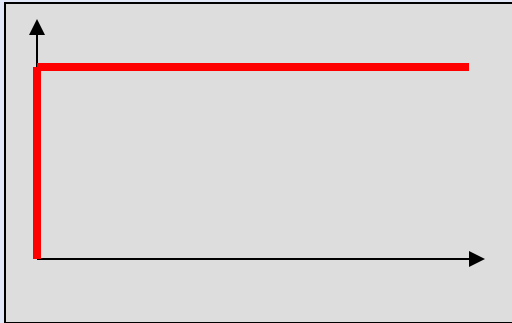
1. Définir les actions :
 - Liste.
2. Définir les critères :
 - Quantitatifs,
 - Qualitatifs (choix de l'échelle).
3. Evaluer (tableau).
4. Pour chaque critère :
 - Choisir un type de fonction de préférence.
 - Fixer les seuils correspondants.
5. Pondérer les critères.

Critères qualitatifs & quantitatifs

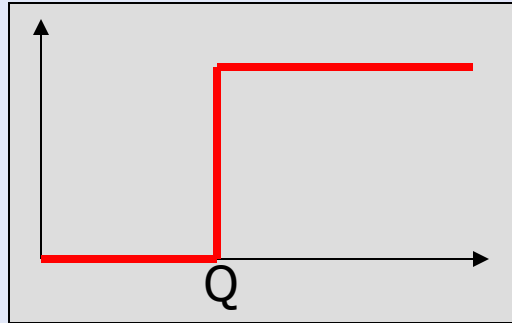
- Critères quantitatifs :
 - Echelle numérique naturelle.
- Critères qualitatifs :
 - Echelle qualitative ordinale (ex: échelles de Likert).
 - Maximum 9 niveaux (7 ± 2) pour assurer une évaluation cohérente.
 - Présence d'un niveau neutre ?
 - Exemples:
 - Très bon, Bon, Moyen, Mauvais, Très mauvais
 - Oui, Non
 - ++, +, 0, -, --
 - ++, +, -, --
 - Echelle numérique sous-jacente (codage).

Fonctions de préférence

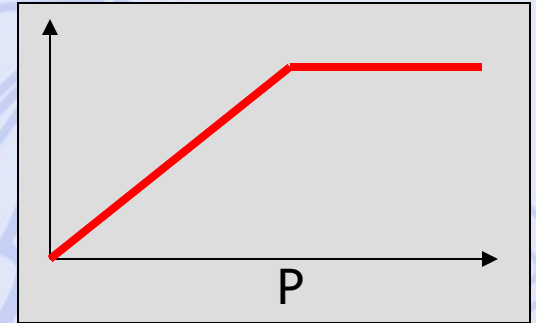
(disponibles dans **Visual PROMETHEE**)



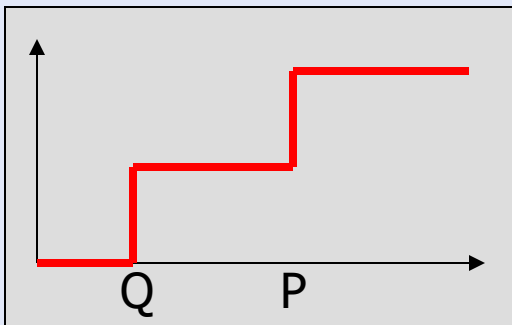
Usuelle



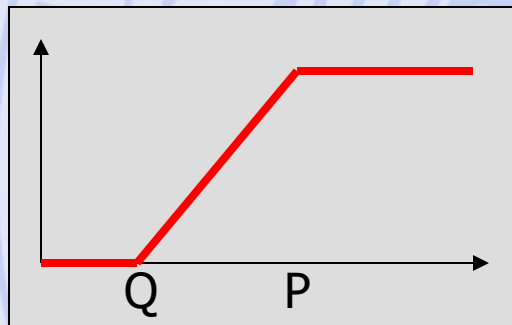
En « U »



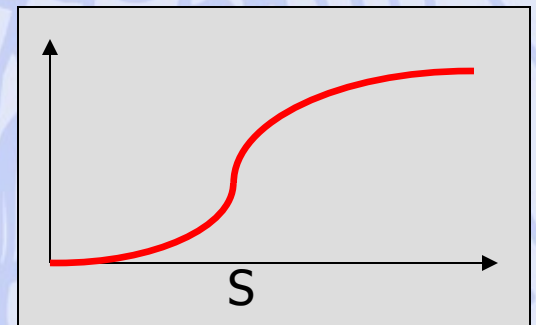
En « V »



A paliers



Linéaire

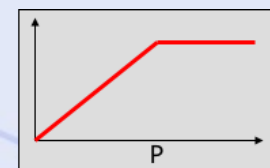


Gaussienne

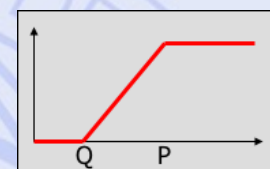
Fonctions de préférence

- Critères quantitatifs « continus » (ex. coût, prix, distance):

- En « V » (pas de seuil d'indifférence),
- Linéaire.



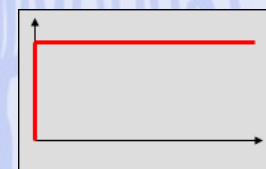
« V » shape



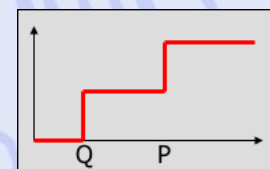
Linear

- Critères qualitatifs ou quantitatifs « discrets » (ex. « très bon à très mauvais », nombre d'hôpitaux):

- Usuelle (pas de seuils),
- A paliers.



Usual

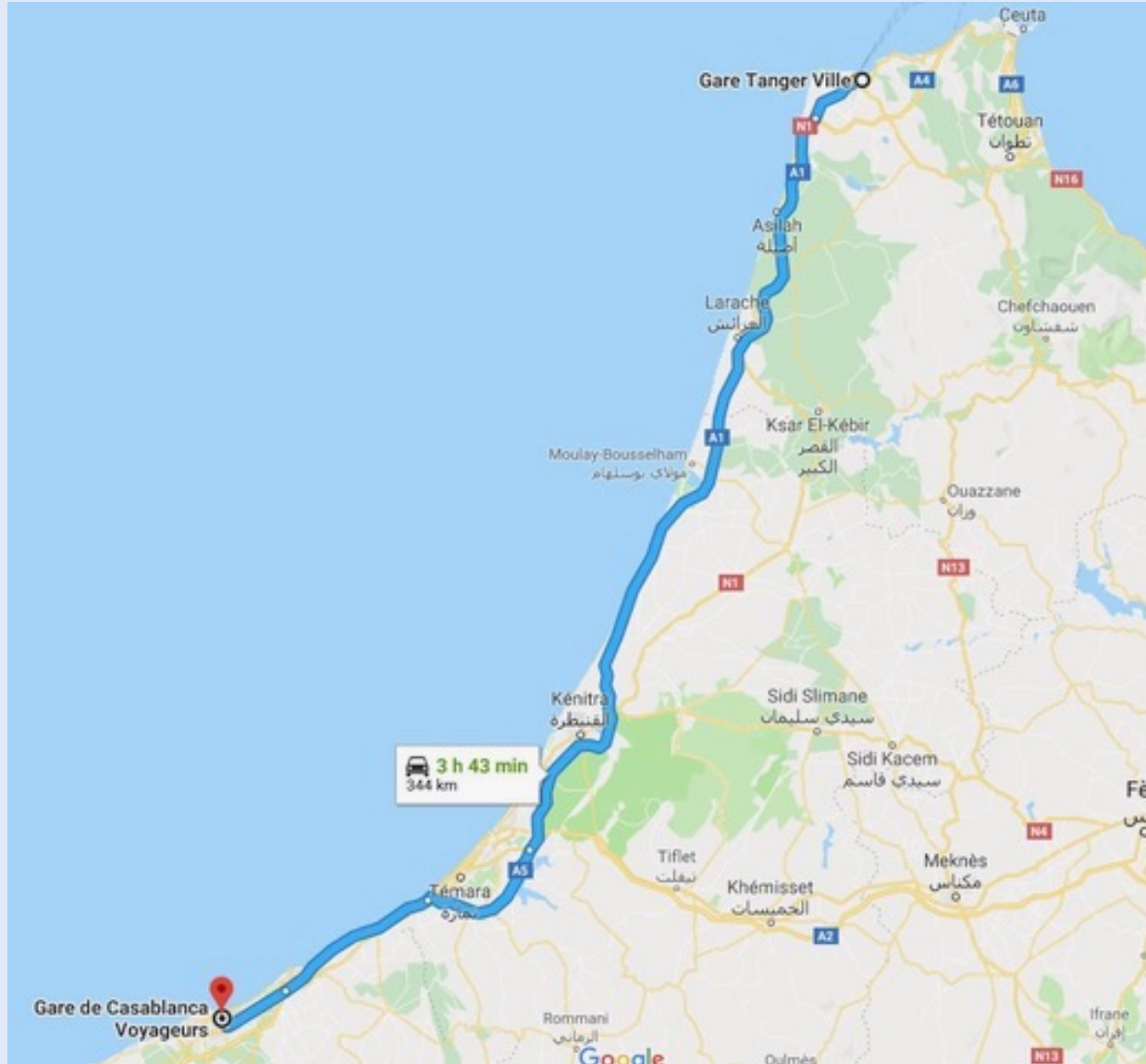


Level

Un exemple... Pas à pas...

Construction
de la
LGV Tanger - Casablanca

LGV Tanger - Casablanca



LGV Tanger - Casa

<https://www.oncf.ma/fr/Developpement/Grands-projets/Ligne-a-grande-vitesse-tanger-casablanca>

- 22,9 milliards DH → **impacts économiques.**
- 344 km - 3h43 en auto → gain de temps.
- 12 viaducs, 2100 ha reboisés, réduction émissions GES
→ **impacts environnementaux.**
- 1800 ha de terrain, 250 ménages expropriés, emplois créés, moins de victimes sur les routes
→ **impacts sociaux.**
- **Choix du tracé ?**

Les données

(fictives - cas d'étude)

- Six tracés possibles : A, B, C, D, E et F
- Six critères :
 - Coût (en milliards de DH)
 - Vitesse commerciale (en km/h)
 - Nombre d'ouvrages d'art (viaducs, ...)
 - Nombre de ménages expropriés
 - Nombre d'emplois créés
 - Impact environnemental (qualitatif - 5 pts)
- Deux scénarios :
 - Gouvernement
 - ONCF (chemins de fer marocains)

Les actions

- Six tracés possibles :
 - A, B, C, D, E, F
- Deux catégories en fonction de l'orientation du tracé :
 - Ouest :
 - Est :

Les critères

- Coût
 - Quantitatif - monétaire (milliards de DH)
- Vitesse commerciale
 - Quantitatif (km/h)
- Ouvrages d'art
 - Quantitatif - discret (nombre - de 9 à 14)
- Expropriations
 - Quantitatif (nombre de ménages)
- Emplois créés
 - Quantitatif (nombre d'emplois)
- Impact environnemental
 - Qualitatif (5 pts - de très faible à très élevé)

Plan du cours

1. Introduction

- Historique, modélisation

2. Aide multicritère à la décision

- Choix social
- Méthodes PROMETHEE et GAIA

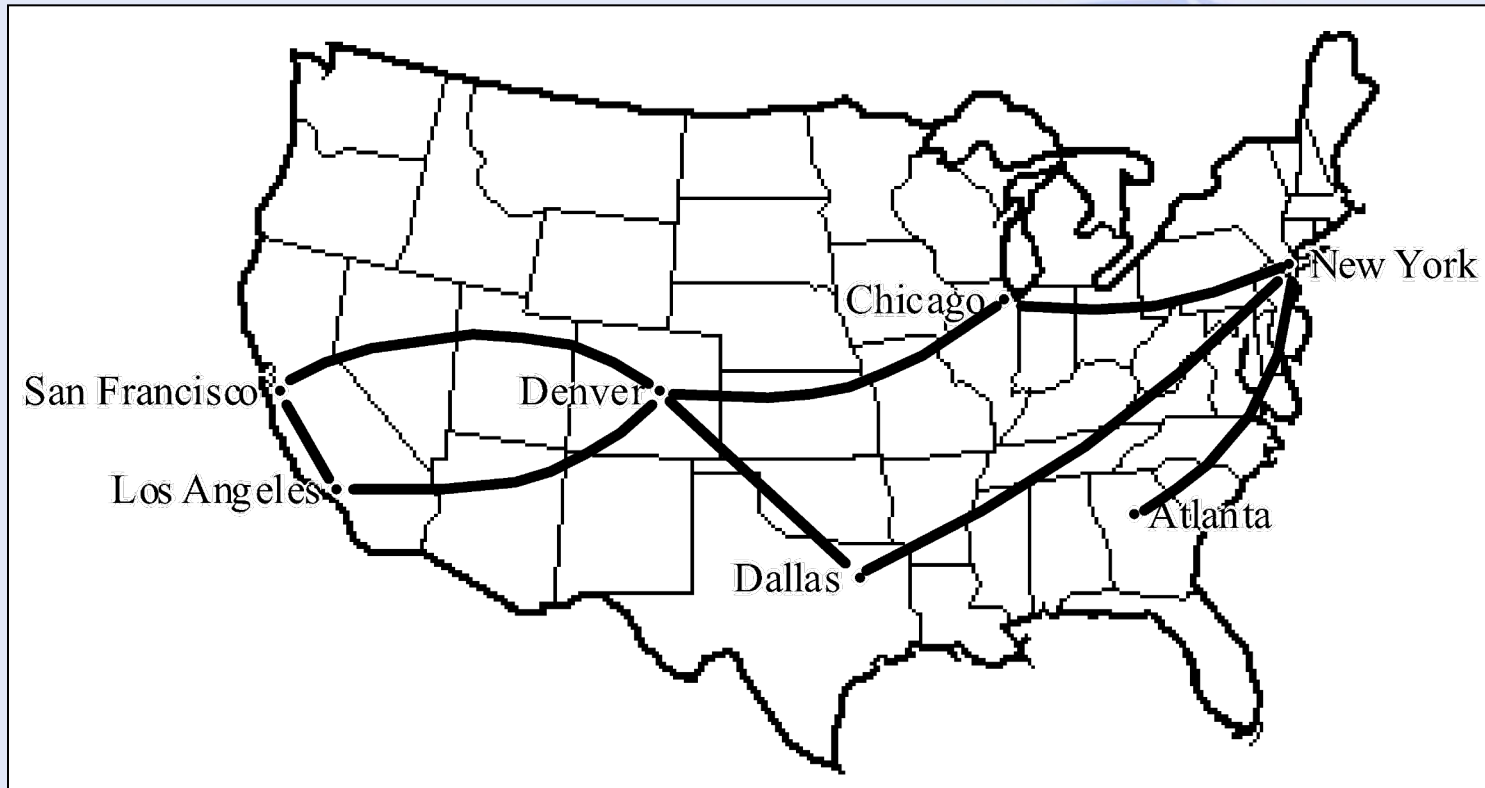
3. Quelques problèmes de la théorie des graphes

- Définitions, terminologie
- Chemins les plus courts et les plus longs

4. Gestion de projet (ordonnancement)

- Méthode du chemin critique
- Contraintes cumulatives
- Méthode PERT

1. Graphe ?

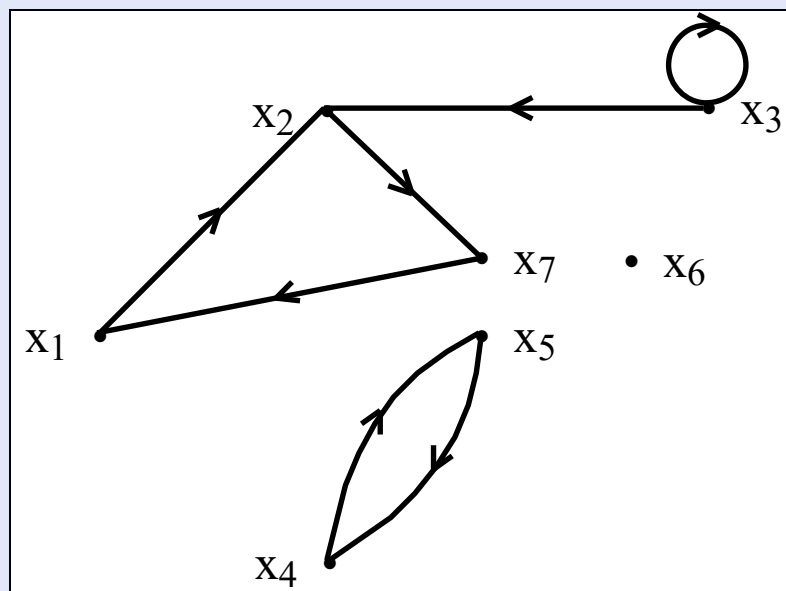


Graphe orienté

$$G = (X, U)$$

- X : ensemble fini d'éléments appelés **sommets**,
- U : sous-ensemble de $X \times X$ (couples de sommets) dont les éléments sont appelés **arcs**.

Exemple 1



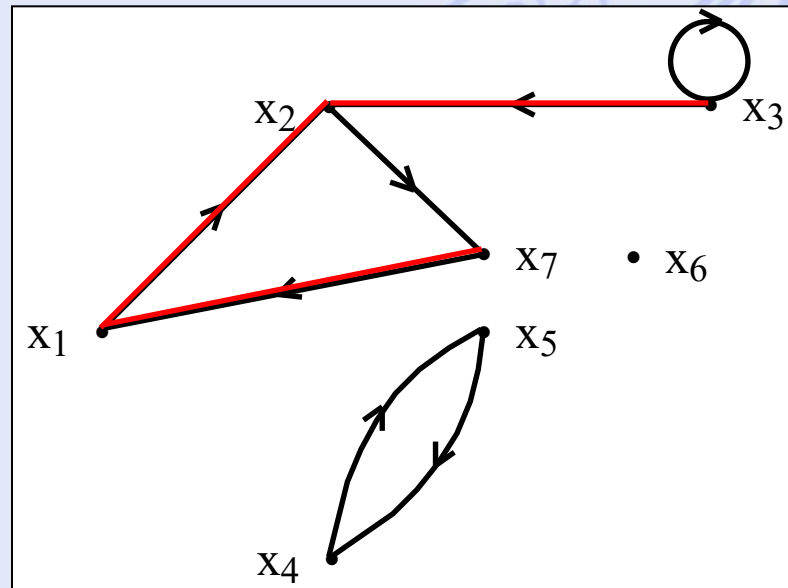
- $X = \{ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \}$
- $U = \{ (x_1, x_2), (x_2, x_7), (x_3, x_3), (x_3, x_2), (x_4, x_5), (x_5, x_4), (x_7, x_1) \}$

Terminologie

- **Chaîne** : Suite de sommets telle que si x_k et x_l sont deux sommets consécutifs de cette suite, alors (x_k, x_l) ou $(x_l, x_k) \in U$.
- **Chemin** : Suite de sommets telle que si x_k et x_l sont deux sommets consécutifs de cette suite, alors $(x_k, x_l) \in U$.
- **Cycle** : Chaîne dont le dernier sommet coïncide avec le premier.
- **Circuit** : Chemin dont le dernier sommet coïncide avec le premier.

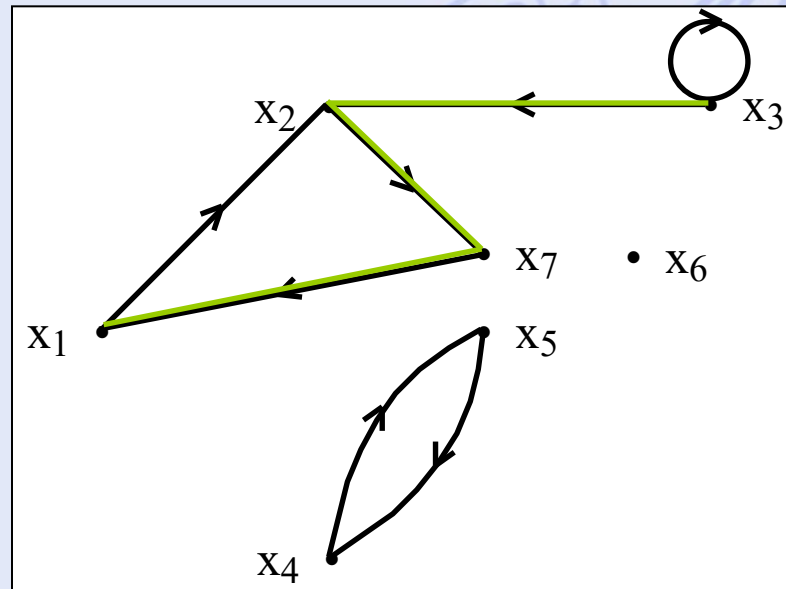
Exemple 1

Chaîne

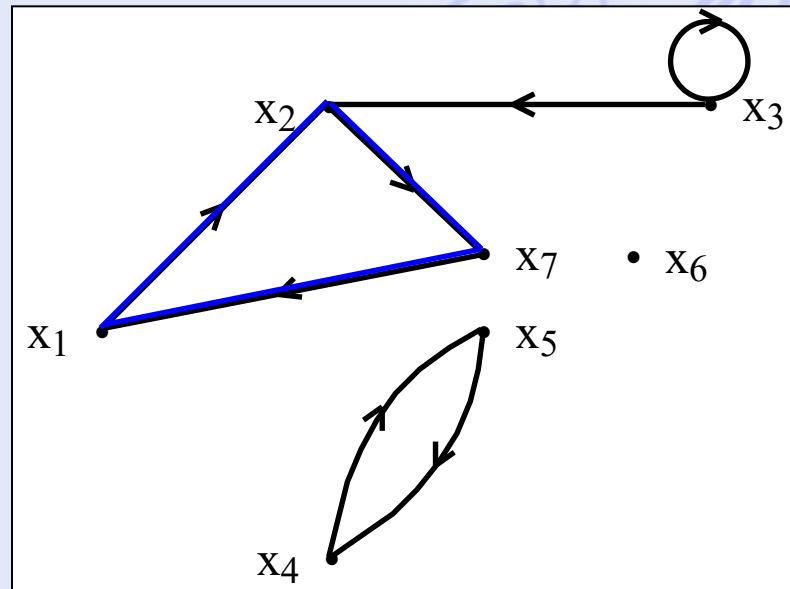


Exemple 1

Chemin



Exemple 1



Circuit

Terminologie (2)

- **Circuits particuliers :**
 - Circuit élémentaire,
 - Circuit hamiltonien (1! par chaque sommet),
 - Circuit eulérien (1! par chaque arc).
- **Graphe connexe :**
 $\forall x, y \in X$ avec $x \neq y \exists$ chaîne entre x et y .
- **Graphe fortement connexe :**
 $\forall x, y \in X$ avec $x \neq y \exists$ chemin de x vers y .

Terminologie (4)

- Ensemble des **successeurs** de $x \in X$:

$$\Gamma^+(x) = \{y \in X \mid (x, y) \in U\}$$

- Ensemble des **prédécesseurs** de $x \in X$:

$$\Gamma^-(x) = \{y \in X \mid (y, x) \in U\}$$

- **Graphe valué** : à chaque arc est associée une valeur (nombre).

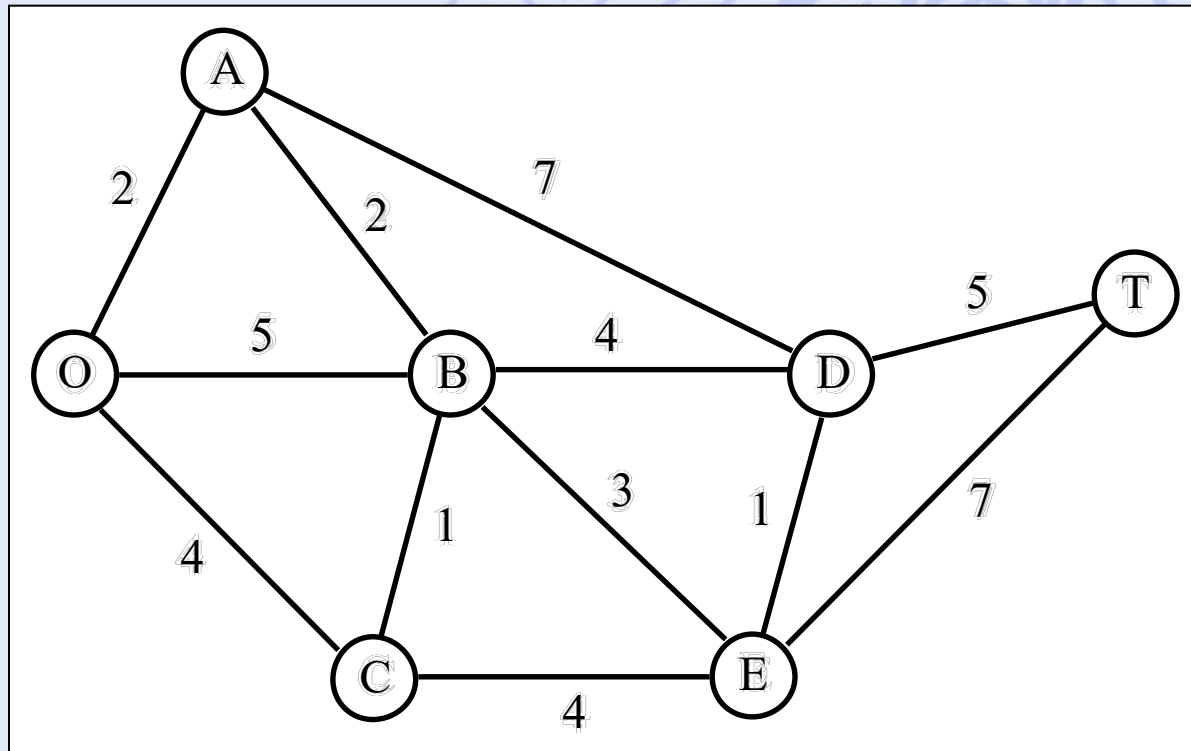
Graphe non orienté

$$G = (X, E)$$

- X : ensemble fini d'éléments appelés **sommets**,
- E : ensemble de paires de sommets dont les éléments sont appelés **arêtes**.
- **Graphe simple** :
 - Au plus une arête entre deux sommets,
 - Pas de boucles.
- **Graphe orienté symétrique**.

Exemple 2

- Dans une réserve naturelle :
 - Sommets : Postes de surveillance/attractions (O: entrée).
 - Arêtes : Routes.
 - Valeurs : Longueurs des routes (km).



Chemins les plus courts et les plus longs dans un graphe valué

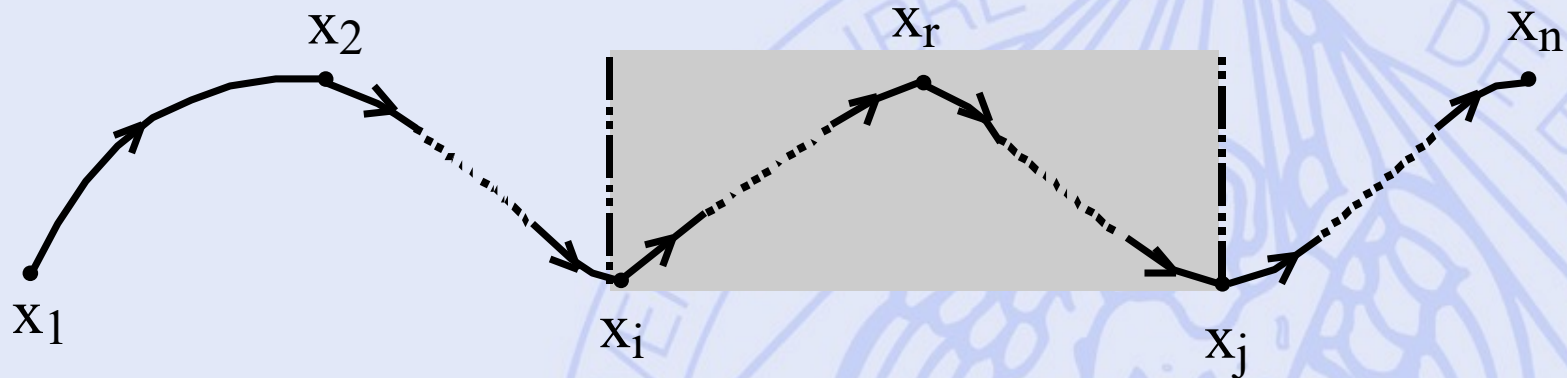
- Graphe orienté valué.
 - Valeurs : longueurs, coûts, durées, délais, ...
- Problème : Chercher un chemin d'un sommet x_1 vers un sommet x_n de telle sorte que la somme des valeurs des arcs qui composent ce chemin ('longueur du chemin') soit minimum (ou maximum).

Hypothèses

- Pour un problème à maximum, pas de circuits de valeur positive.
- Pour un problème à minimum, pas de circuits de valeur négative.
- Notations :
 - arc $(x_i, x_j) \leftrightarrow$ valeur c_{ij}
 - Pour un problème à maximum :
$$\begin{cases} c_{ij} = -\infty & \text{si } (x_i, x_j) \notin U \text{ et } i \neq j \\ c_{ii} = 0 & \forall i \end{cases}$$
 - Pour un problème à minimum :
$$\begin{cases} c_{ij} = +\infty & \text{si } (x_i, x_j) \notin U \text{ et } i \neq j \\ c_{ii} = 0 & \forall i \end{cases}$$
 - Passage de minimum à maximum : $c'_{ij} = -c_{ij} \quad , \quad \forall i, j$

Algorithme de Bellman-Kalaba

- Principe d'optimalité de Bellman :



- Si le chemin $(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_r, \dots, x_j, \dots, x_n)$ est optimal entre x_1 et x_n , alors le chemin $(x_i, \dots, x_r, \dots, x_j)$ est optimal entre x_i et x_j .

Algorithme de Bellman-Kalaba

- $\lambda_i(k)$ = valeur du chemin optimal de x_1 à x_i en au plus k arcs.

1.
$$\begin{cases} \lambda_1(1) = 0 \\ \lambda_i(1) = c_{1i} \quad i = 2, \dots, n \end{cases}$$

2. Pour $k = 2, 3, \dots$

$$\begin{cases} \lambda_1(k) = 0 \\ \lambda_i(k) = \min_{j \in \{1, 2, \dots, n\}} \{ \lambda_j(k-1) + c_{ji} \} \end{cases}$$

3. Arrêt de l'algorithme quand :

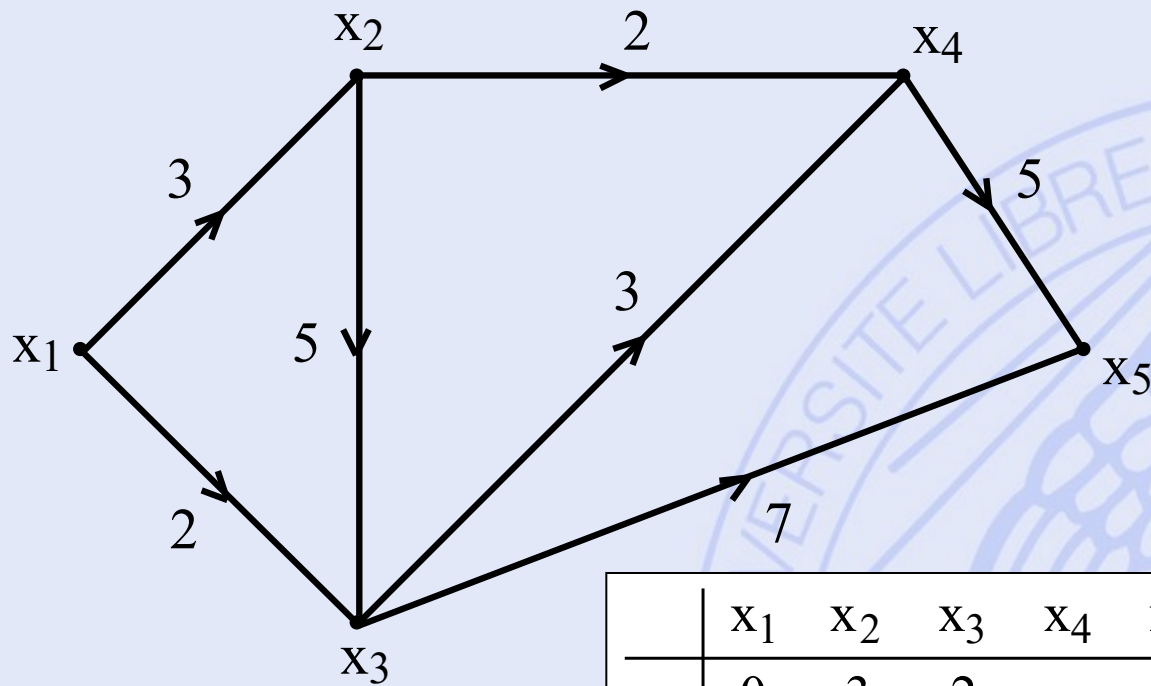
$$\lambda_i(k) = \lambda_i(k-1) \quad \forall i$$

Algorithme de Bellman-Kalaba

- Convergence :
Arrêt de l'algorithme après au plus $n-1$ étapes.
- Recherche de chemins les plus longs :
Adaptation du point 2 :

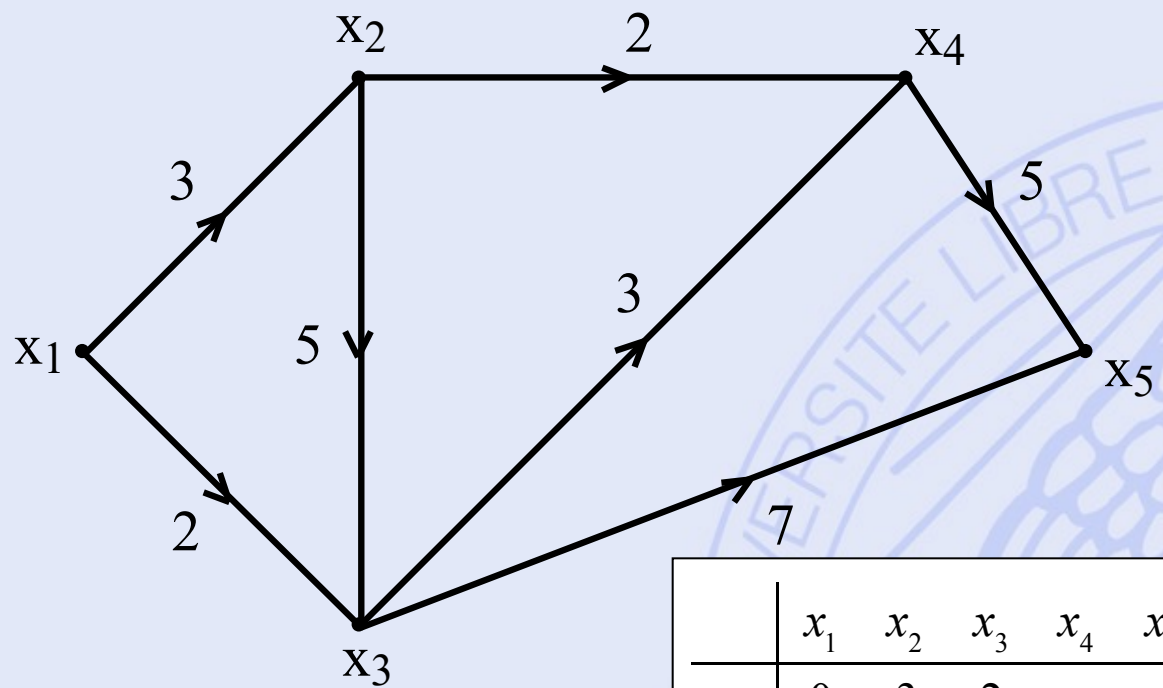
$$\lambda_i(k) = \max_j \{ \lambda_j(k-1) + c_{ji} \}$$

Exemple 3



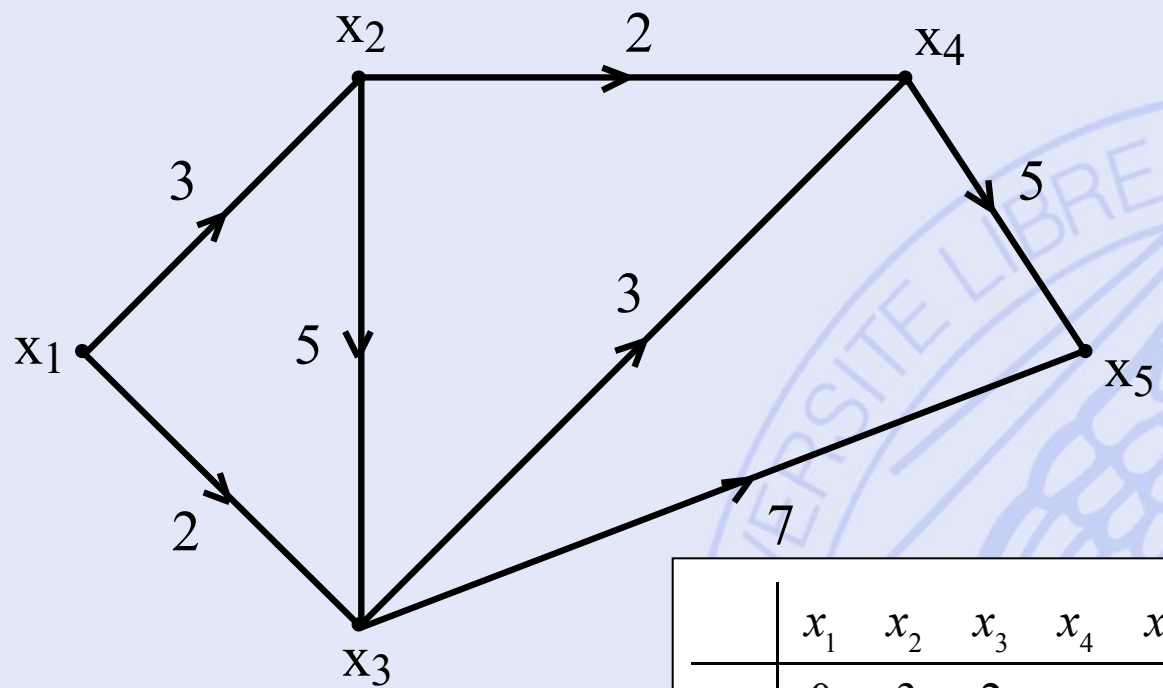
	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	$\lambda_i(1)$	$\lambda_i(2)$	$\lambda_i(3)$
x ₁	0	3	2	∞	∞			
x ₂	∞	0	5	2	∞			
x ₃	∞	∞	0	3	7			
x ₄	∞	∞	∞	0	5			
x ₅	∞	∞	∞	∞	0			

Exemple 3



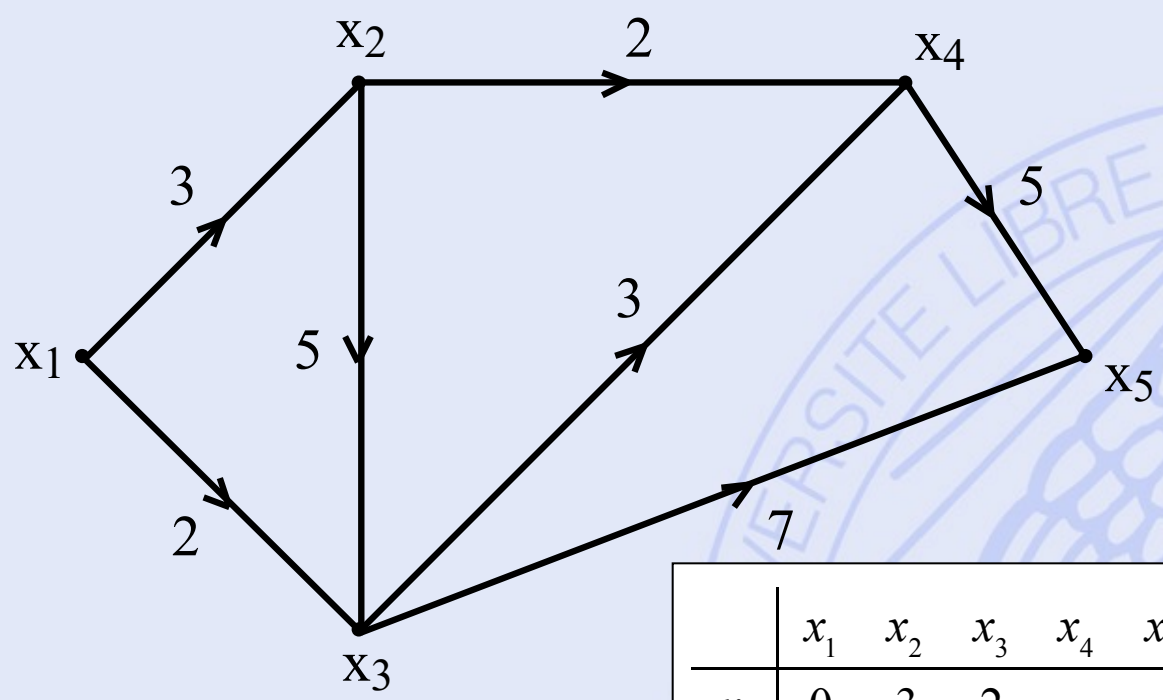
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\lambda_i(1)$	$\lambda_i(2)$	$\lambda_i(3)$
x_1	0	3	2	∞	∞	0		
x_2	∞	0	5	2	∞	3		
x_3	∞	∞	0	3	7	2		
x_4	∞	∞	∞	0	5	∞		
x_5	∞	∞	∞	∞	0	∞		

Exemple 3



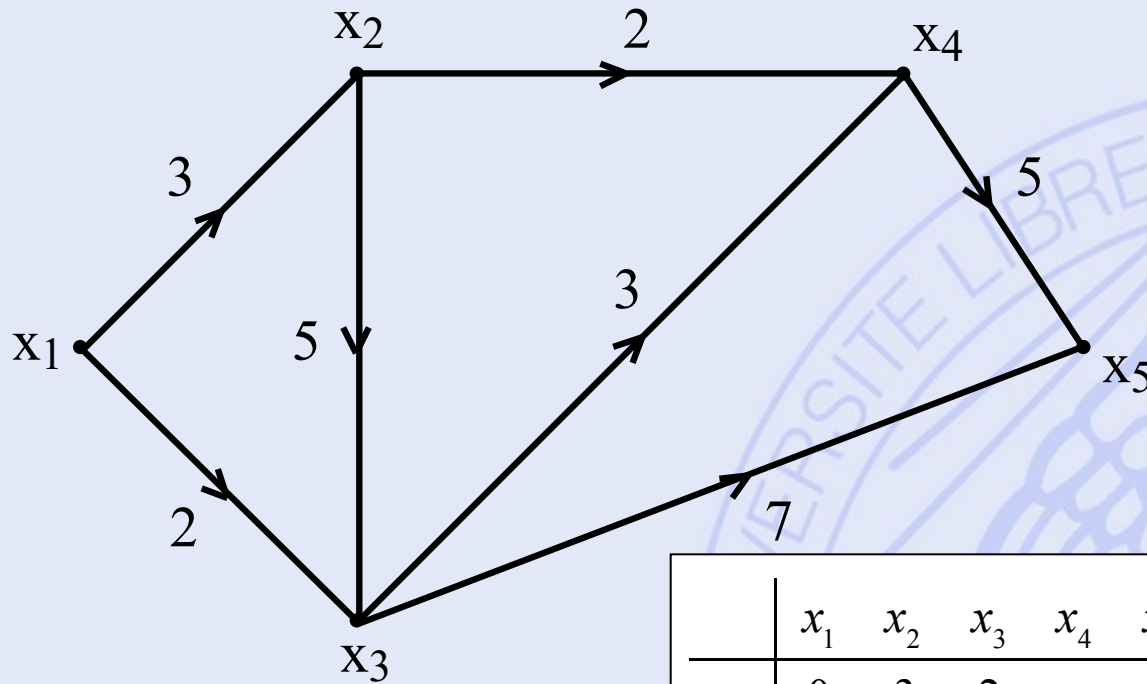
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\lambda_i(1)$	$\lambda_i(2)$	$\lambda_i(3)$
x_1	0	3	2	∞	∞	0	0	
x_2	∞	0	5	2	∞	3		
x_3	∞	∞	0	3	7	2		
x_4	∞	∞	∞	0	5	∞		
x_5	∞	∞	∞	∞	0	∞		

Exemple 3



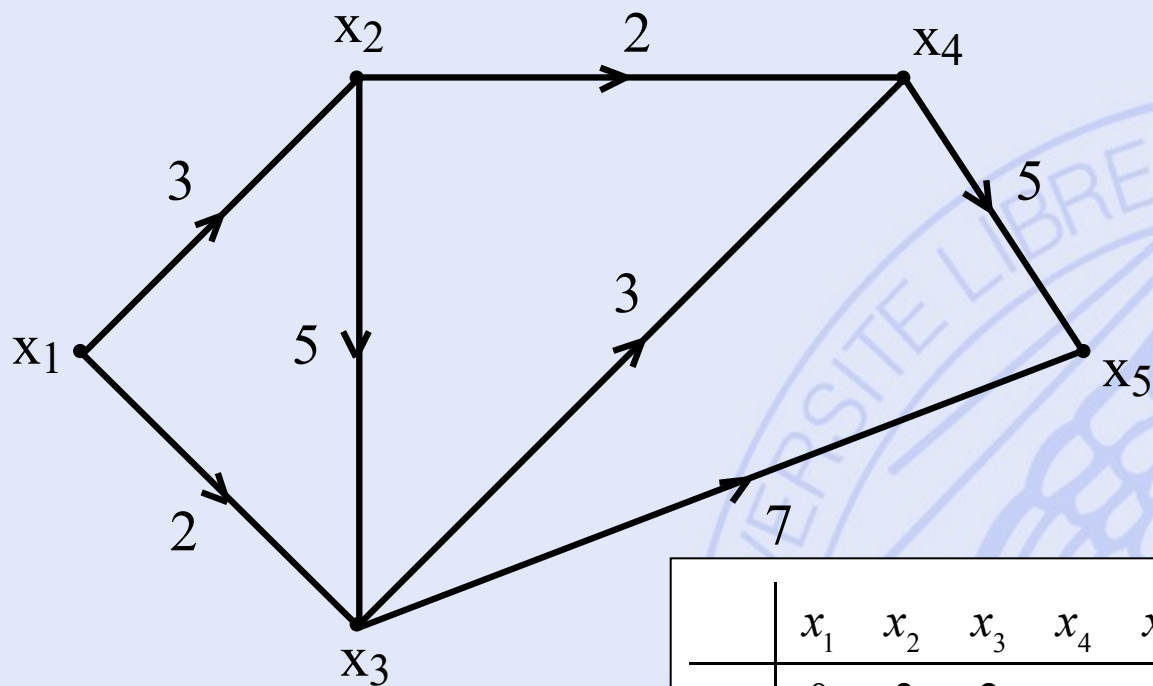
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\lambda_i(1)$	$\lambda_i(2)$	$\lambda_i(3)$
x_1	0	3	2	∞	∞	0	0	
x_2	∞	0	5	2	∞	3	3	
x_3	∞	∞	0	3	7	2	2	
x_4	∞	∞	∞	0	5	∞		
x_5	∞	∞	∞	∞	0	∞		

Exemple 3



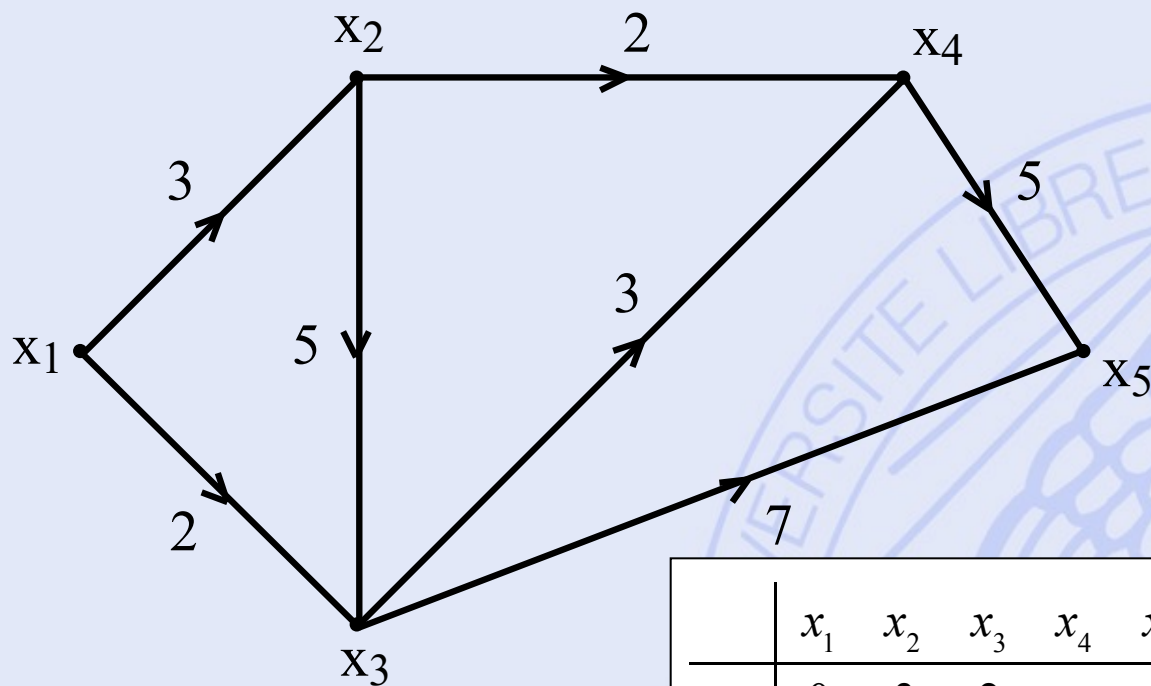
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\lambda_i(1)$	$\lambda_i(2)$	$\lambda_i(3)$
x_1	0	3	2	∞	∞	0	0	
x_2	∞	0	5	2	∞	3	3	
x_3	∞	∞	0	3	7	2	2	
x_4	∞	∞	∞	0	5	∞	5	
x_5	∞	∞	∞	∞	0	∞		

Exemple 3



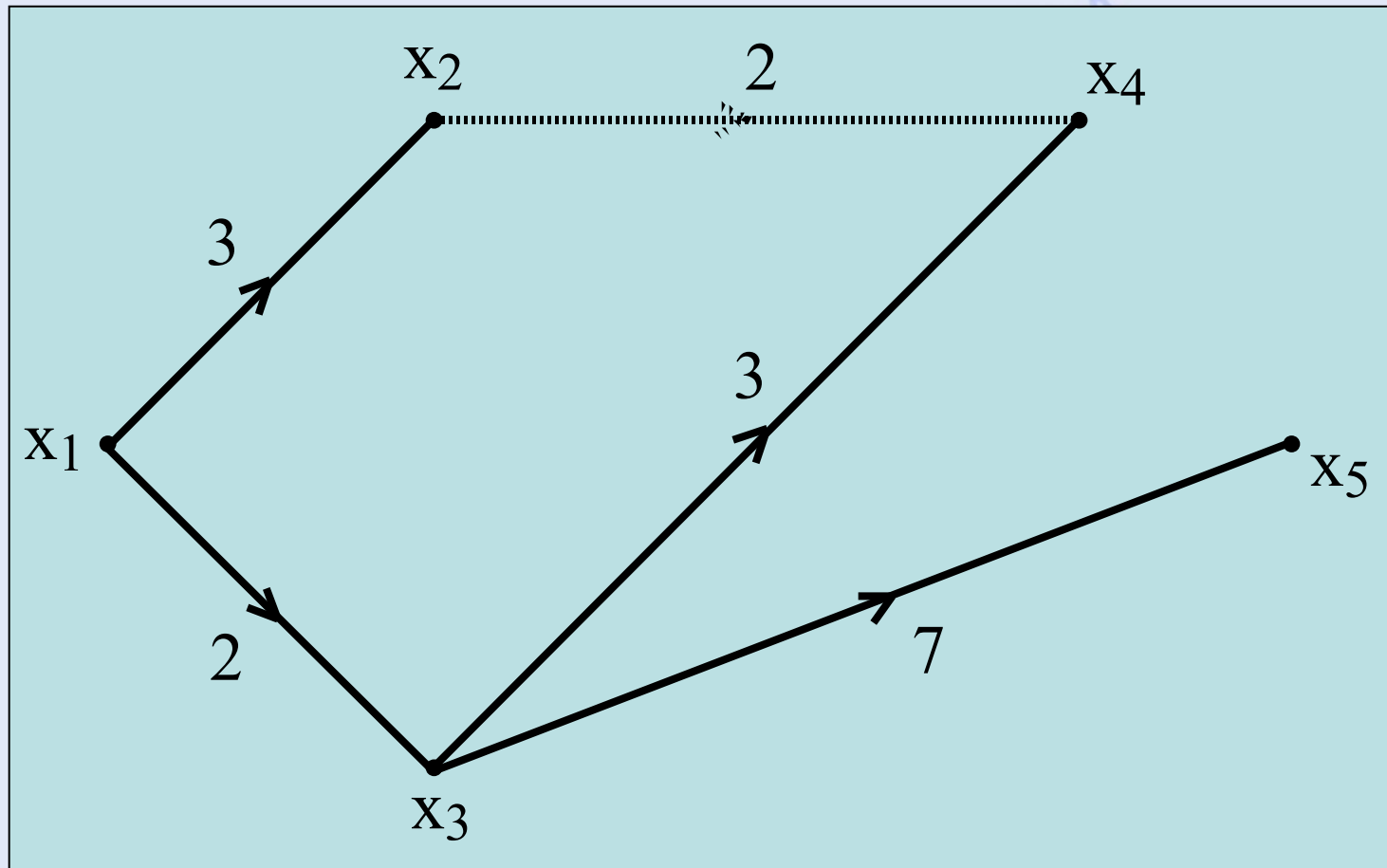
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\lambda_i(1)$	$\lambda_i(2)$	$\lambda_i(3)$
x_1	0	3	2	∞	∞	0	0	0
x_2	∞	0	5	2	∞	3	3	
x_3	∞	∞	0	3	7	2	2	
x_4	∞	∞	∞	0	5	∞	5	
x_5	∞	∞	∞	∞	0	∞	9	

Exemple 3



	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\lambda_i(1)$	$\lambda_i(2)$	$\lambda_i(3)$
x_1	0	3	2	∞	∞	0	0	0
x_2	∞	0	5	2	∞	3	3	3
x_3	∞	∞	0	3	7	2	2	2
x_4	∞	∞	∞	0	5	∞	5	5
x_5	∞	∞	∞	∞	0	∞	9	9

Arborescence des chemins les plus courts



Plan du cours

1. Introduction
 - Historique, modélisation
2. Aide multicritère à la décision
 - Choix social
 - Méthodes PROMETHEE et GAIA
3. Quelques problèmes de la théorie des graphes
 - Définitions, terminologie
 - Chemins les plus courts et les plus longs
4. Gestion de projet (ordonnancement)
 - Méthode du chemin critique
 - Contraintes cumulatives
 - Méthode PERT

A. Définition du problème

- Réalisation en un temps minimum d'un projet comportant un certain nombre de tâches à effectuer, en tenant compte de contraintes éventuelles sur l'enchaînement des tâches ou sur les moyens à mettre en oeuvre.
- Exemples :
 - Construction d'une maison, chantier, campagne publicitaire, lancement d'un nouveau produit, ...

Un exemple simple pas à pas

- Organisation de la fête de fin d'année.
- Sept tâches à réaliser :
 - A : Elaborer la recette du gâteau (2 jours)
 - B : Préparer le gâteau (1 jour, après A)
 - C : Répéter la chanson (chorale, 5 jours)
 - D : Réserver une salle (3 jours)
 - E : Décorer la salle (4 jours, après D)
 - F : choisir un DJ (2 jours, après D)
 - G : installation DJ (1 jour, après F)

Questions ?

- Si la fête est prévue le 22 décembre, combien de jours à l'avance faut-il s'y prendre ?
- Quel calendrier (ordonnancement des tâches) faut-il suivre pour être prêts le 22 décembre ?
- Peut-on se permettre de prendre du retard sur certaines tâches sans compromettre la date de la fête ?

Ordonnancement

- Déterminer la date de début de chaque tâche (c-à-d un ordonnancement).
- Notations :
 - Tâches : $i \quad i = 1, 2, \dots, n$
 - Durées : $d(i)$
 - Dates de début : $t(i)$
- Prise en compte de contraintes temporelles et cumulatives.

Contraintes temporelles

- Postériorité stricte $t(j) \geq t(i) + d(i)$
- Postériorité avec délai $t(j) \geq t(i) + d(i) + f(i, j)$
- Postériorité partielle $t(j) \geq t(i) + \alpha(i, j)d(i)$
- Localisation temporelle $t(i) \geq a(i)$
- Continuité $t(j) \leq t(i) + t(i, j)$

Contraintes cumulatives

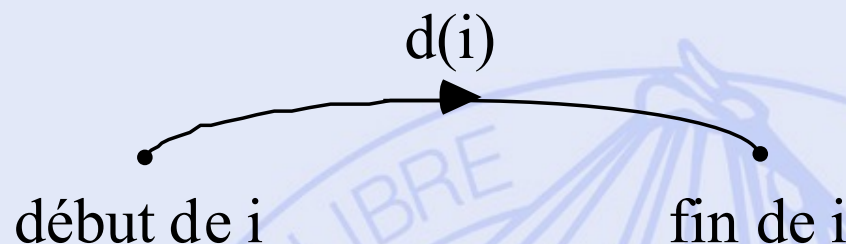
- Limites sur les ressources disponibles pendant la réalisation du projet :
 - Matériel,
 - Budget,
 - Main-d'œuvre.
- Fixes ou variables au cours du temps.

B. Méthode du chemin critique

- Contraintes temporelles uniquement.
- Durées des tâches connues avec certitude.
- Représentation sous forme de graphe valué :
 - Tâches représentées par des arcs.
 - Sommets correspondant à des étapes du projet.

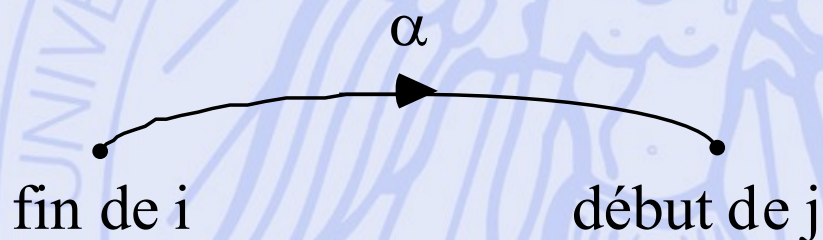
Elaboration du graphe

- Tâche i :



- Contrainte :

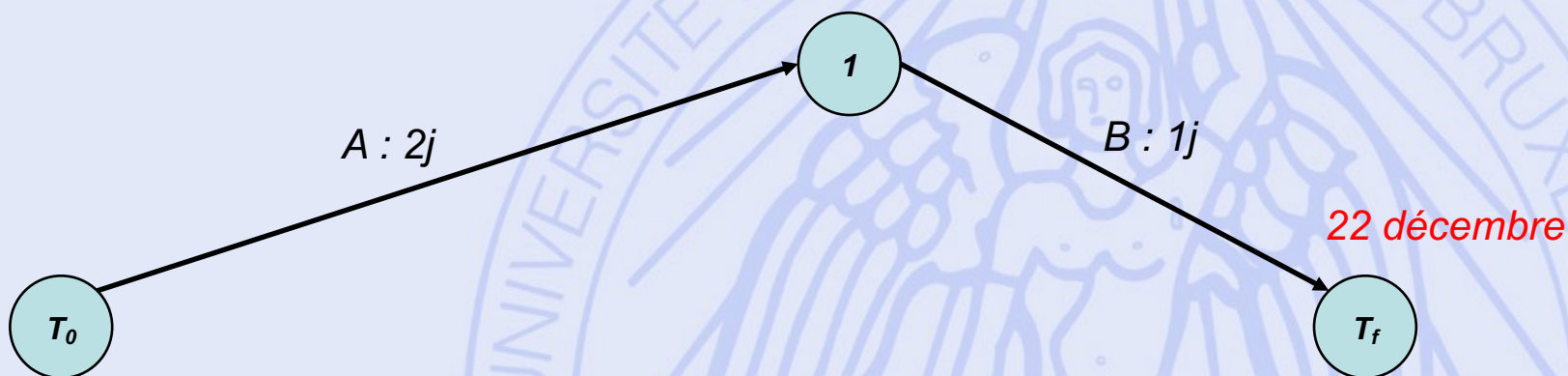
$$t(j) \geq t(i) + d(i) + \alpha$$



- Deux sommets particuliers :
 - Début du projet - étape 0,
 - Fin du projet - étape $n+1$.

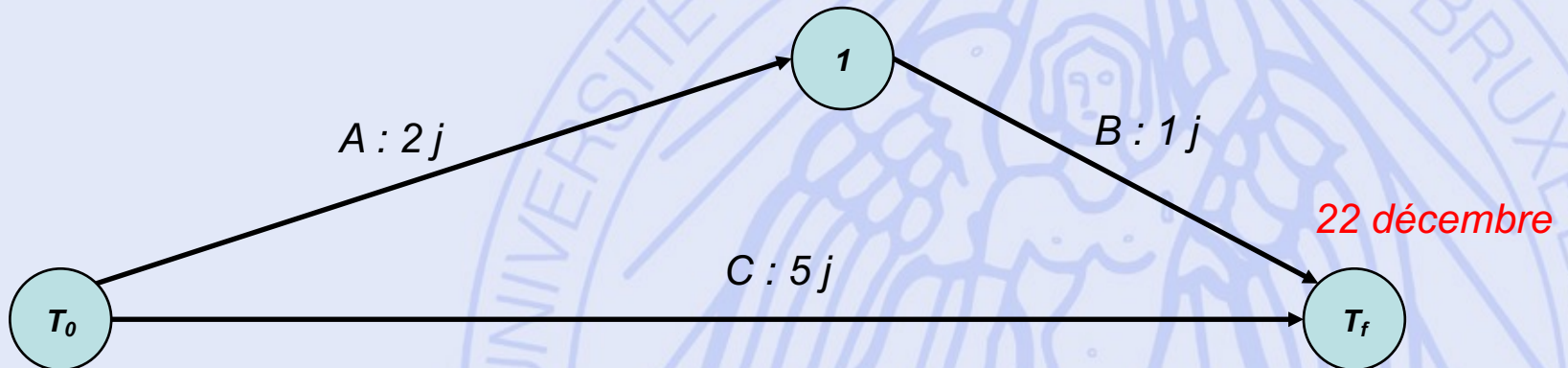
Exemple (1)

- B (prépa. gâteau, 1 jour) après A (recette, 2 jours)
- Temps minimum nécessaire : 3 jours



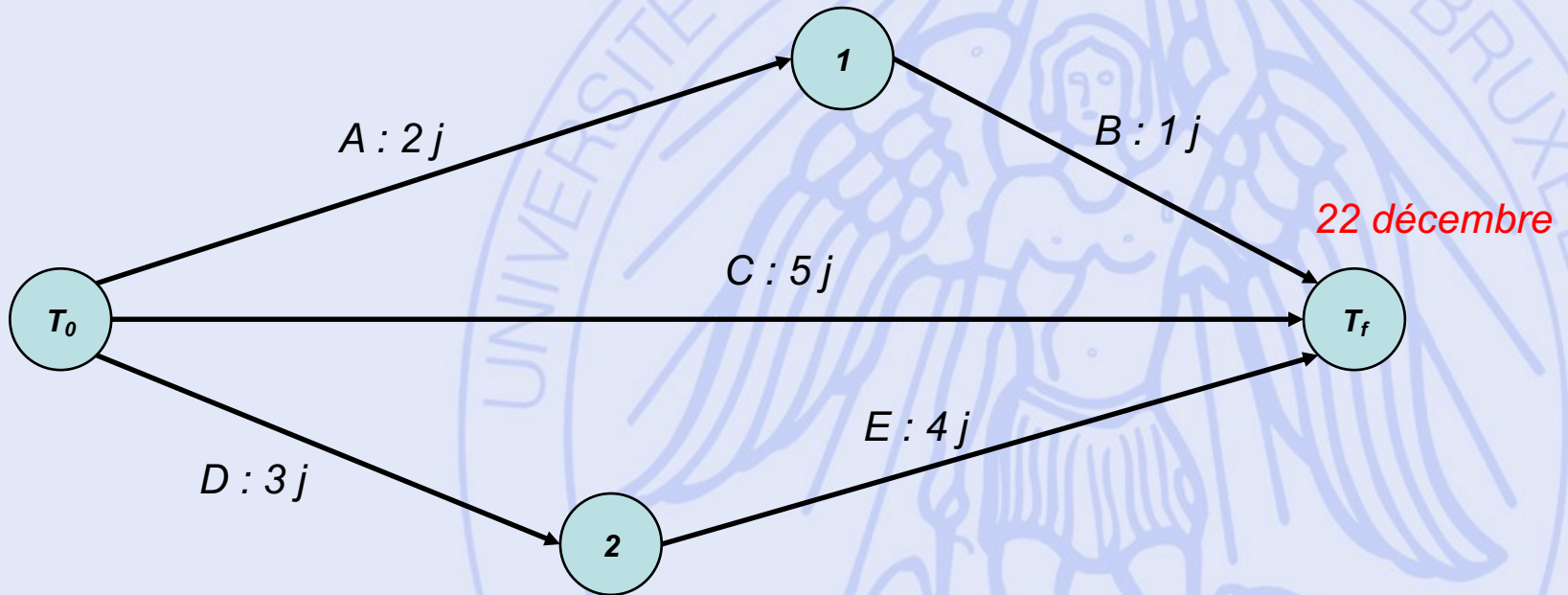
Exemple (2)

- C (répétition chorale, 5 jours)
- Temps minimum nécessaire : 5 jours



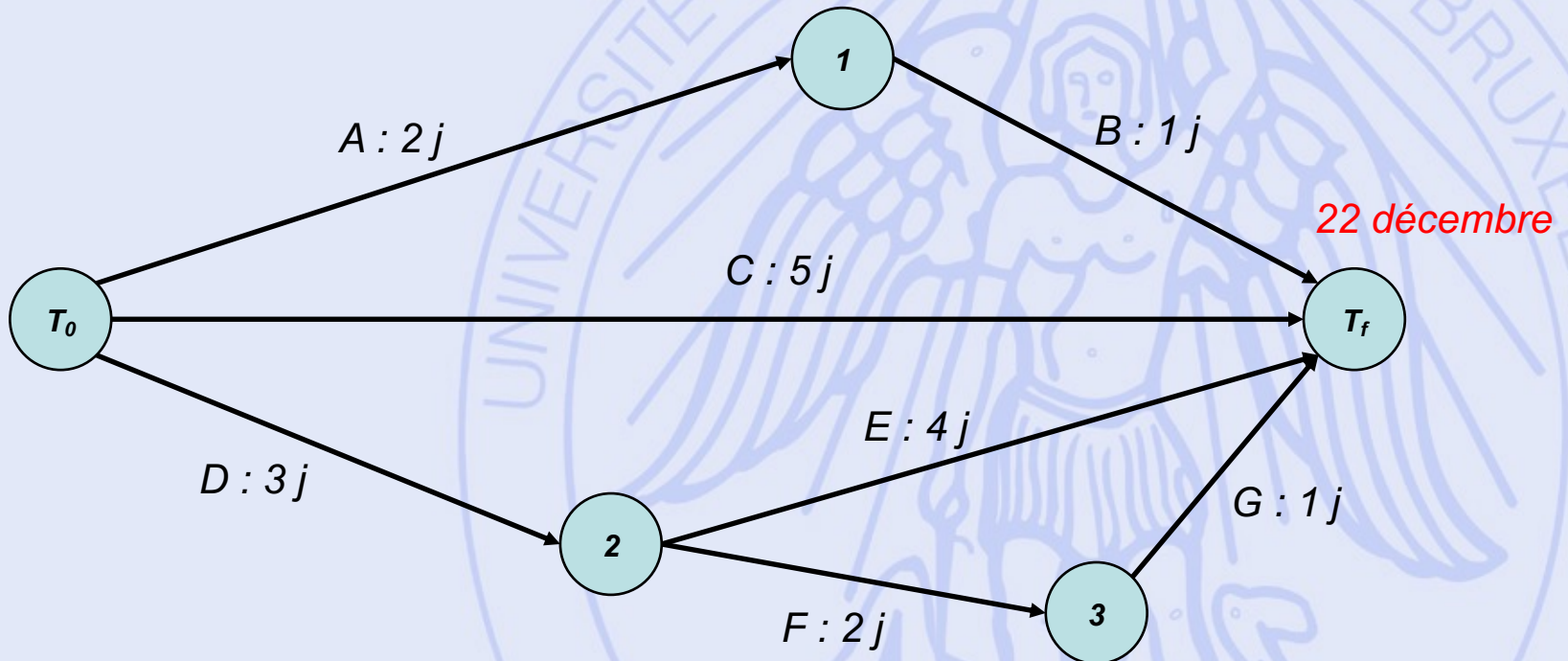
Exemple (3)

- E (déco. salle, 4 jours) après D (rés. salle, 3 jours)
- Temps minimum nécessaire : 7 jours



Exemple (4)

- G (inst. DJ, 1 jour) après F (choix DJ, 2 jours), après D (rés. Salle, 3 jours)
- Temps minimum nécessaire : 7 jours

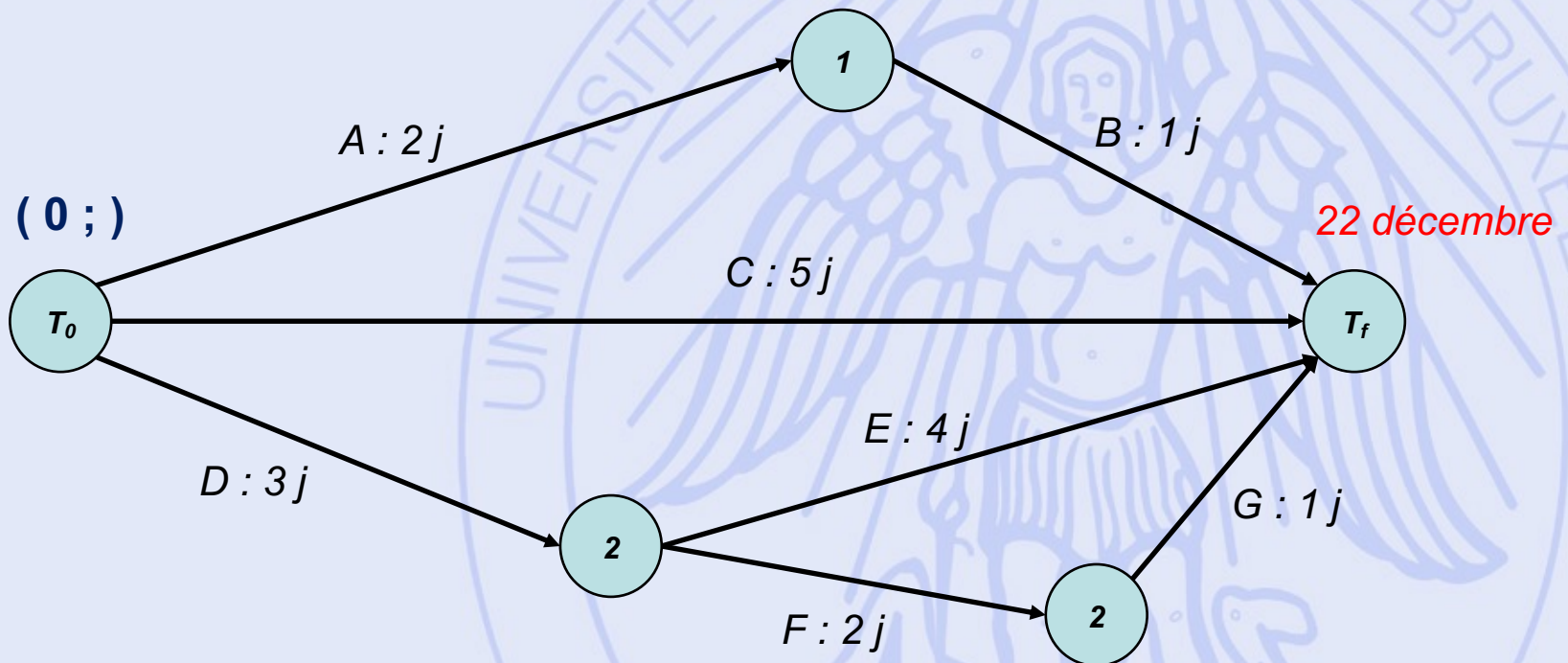


Ordonnancement au plus tôt

- **ES(i)** = date de début au plus tôt de la tâche i
= longueur du chemin le plus long de 0 au début de i
 - ▶ $ES(n+1) = T$ = durée minimale de réalisation du projet.
- **EF(i)** = date de fin au plus tôt de la tâche i
 $i = ES(i) + d(i)$

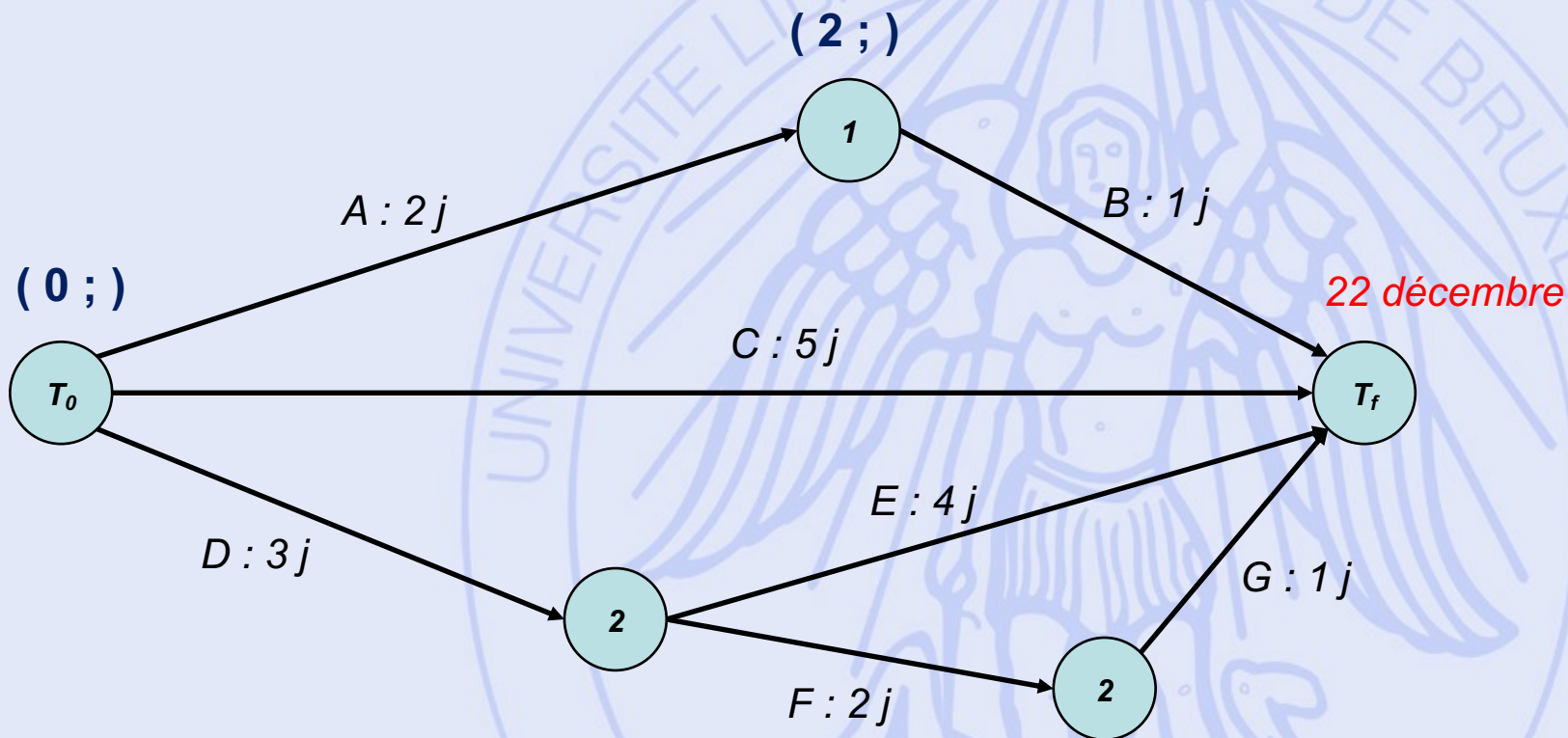
Exemple

- Date au plus tôt pour chaque sommet.
- $T_0 = 0$



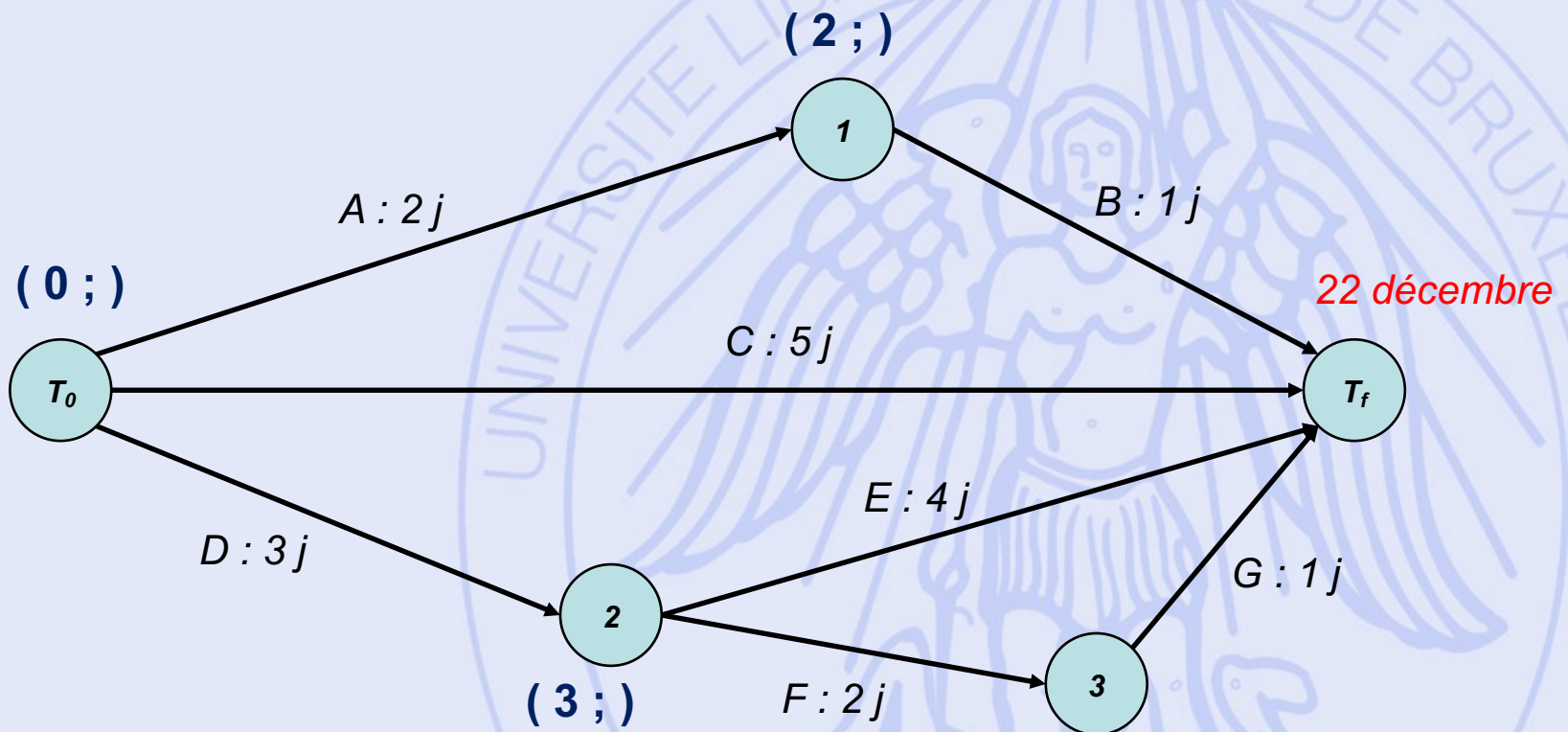
Exemple

- Date au plus tôt pour chaque sommet.
- $T_0 = 0$



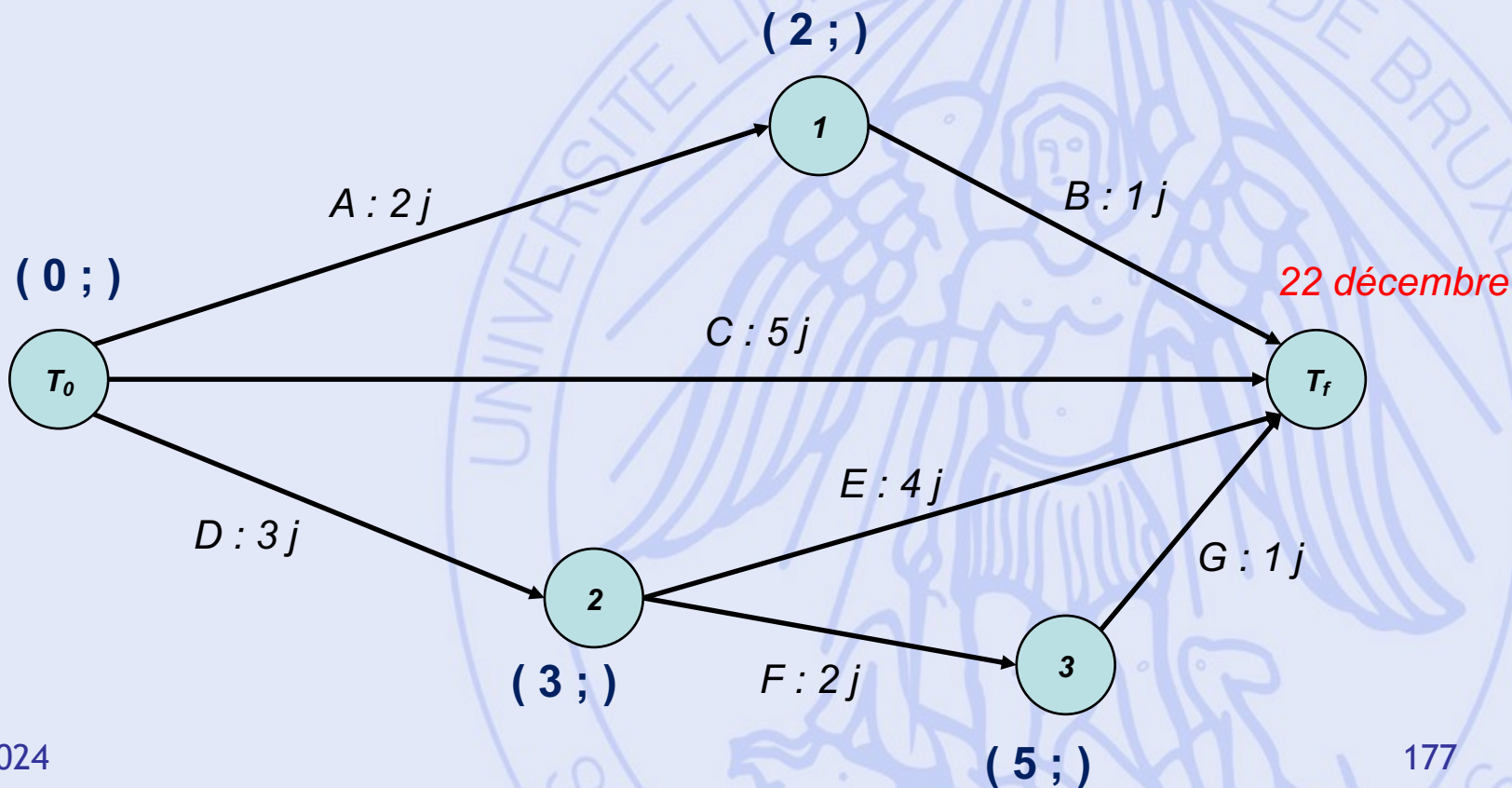
Exemple

- Date au plus tôt pour chaque sommet.
- $T_0 = 0$



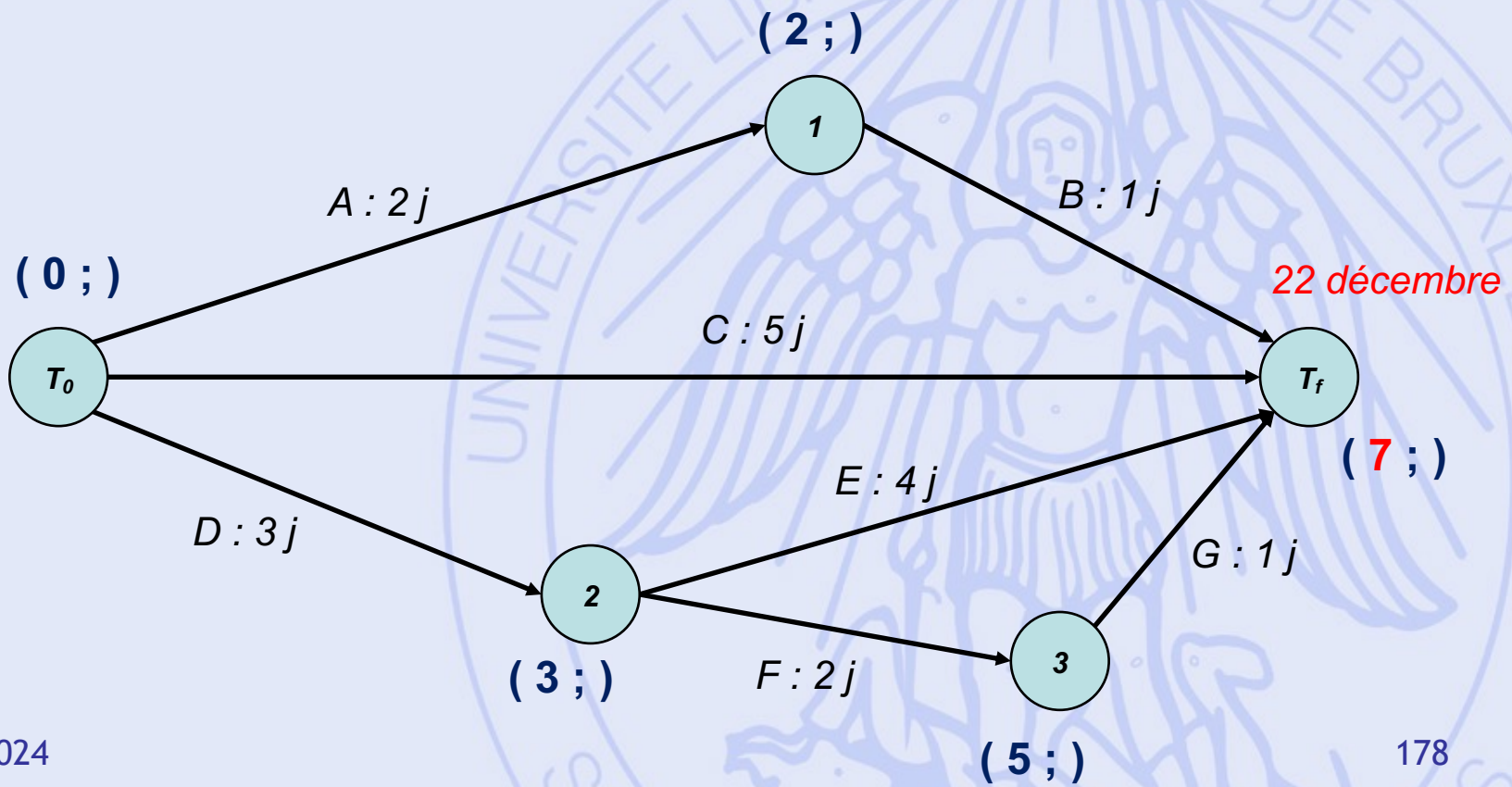
Exemple

- Date au plus tôt pour chaque sommet.
- $T_0 = 0$



Exemple

- Date au plus tôt pour chaque sommet.
- $T_0 = 0$

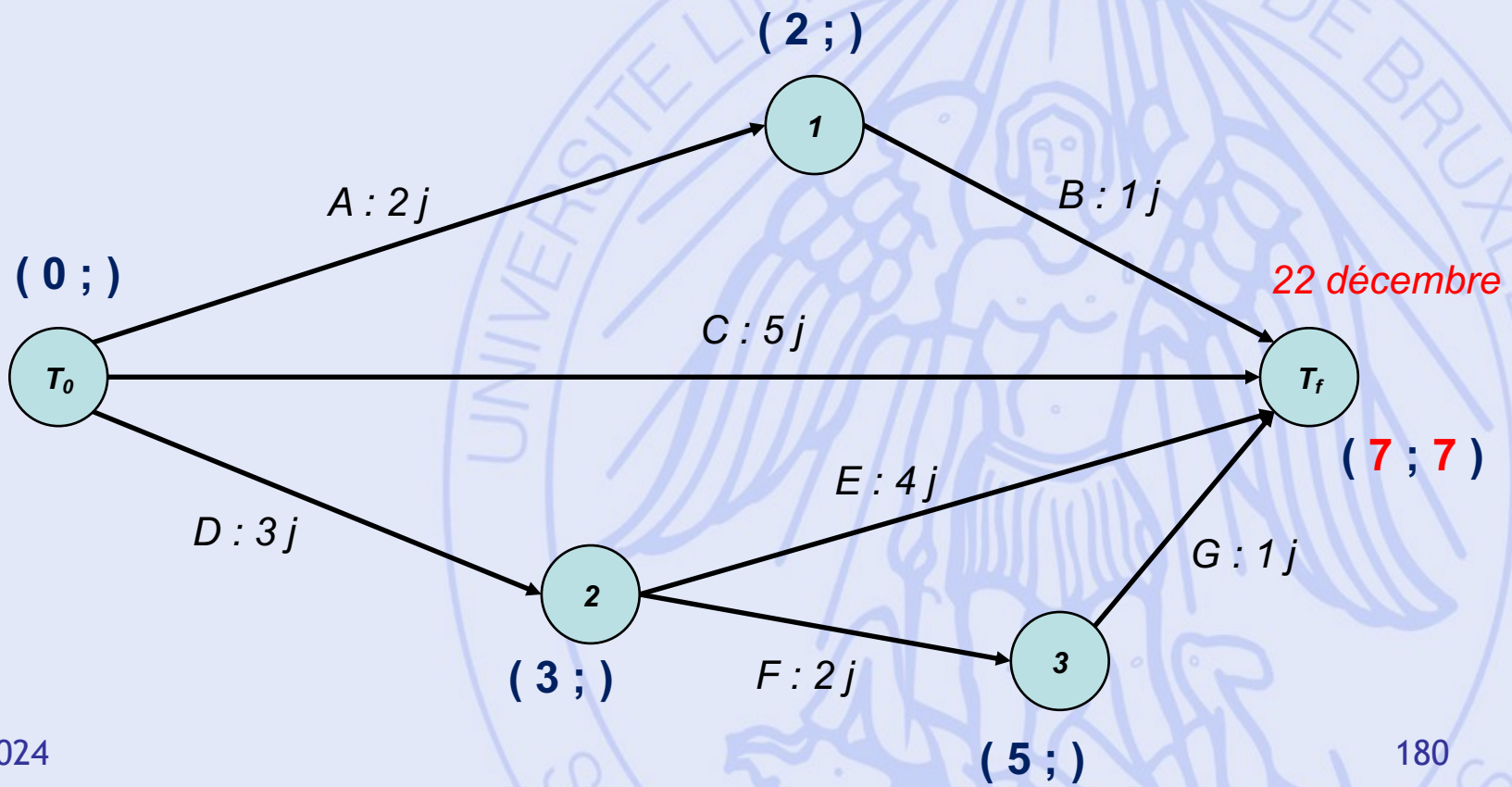


Ordonnancement au plus tard

- **LF(i)** = date de fin au plus tard de la tâche i
(*sans allonger la durée de réalisation T*)
= T – valeur du chemin de valeur maximum de la fin de i à la fin des travaux
- **LS(i)** = date de début au plus tard de la tâche i = $LF(i) - d(i)$

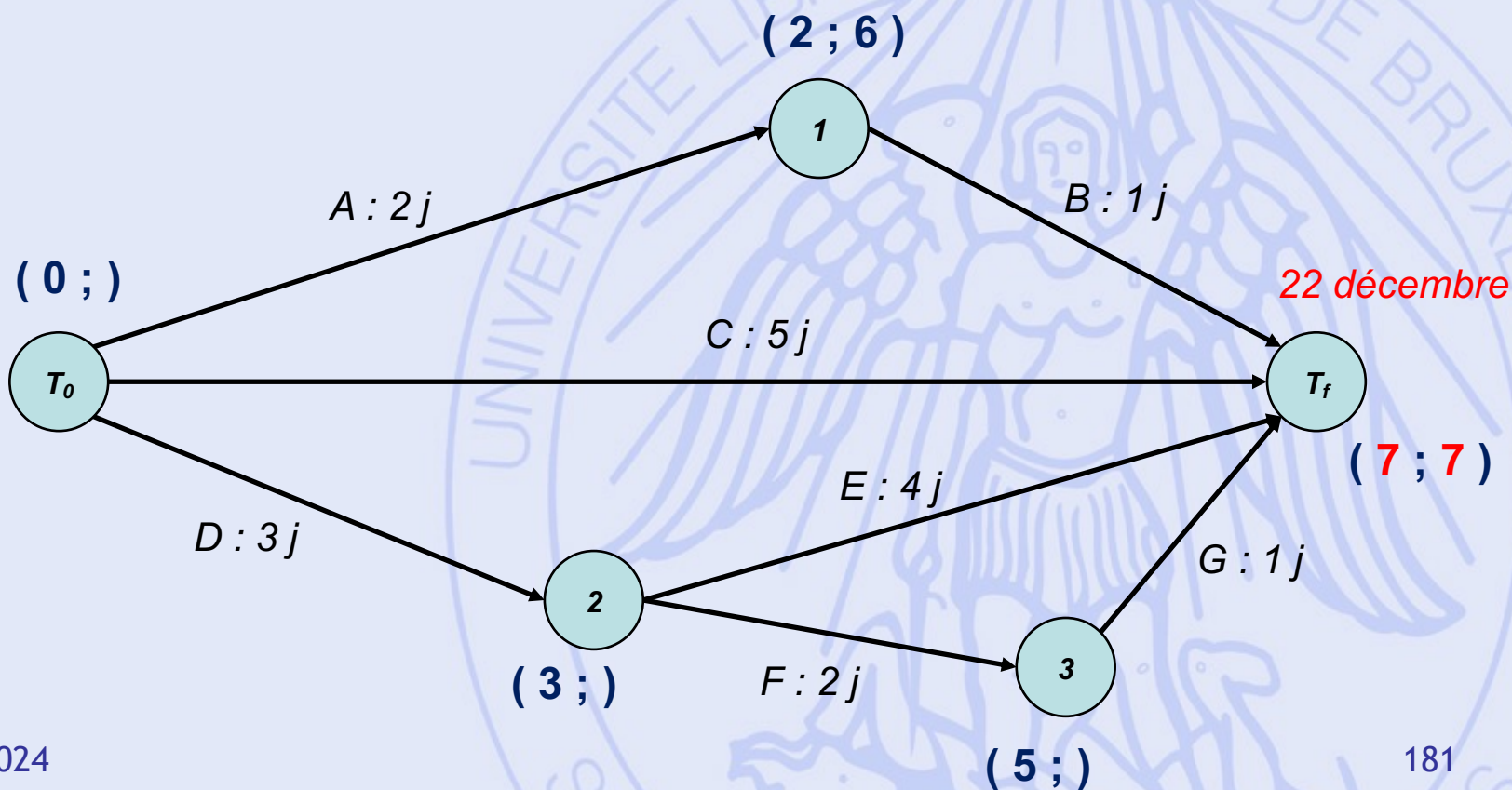
Exemple

- Date au plus tôt pour chaque sommet.
- $T_0 = 0 - T_f = 7$



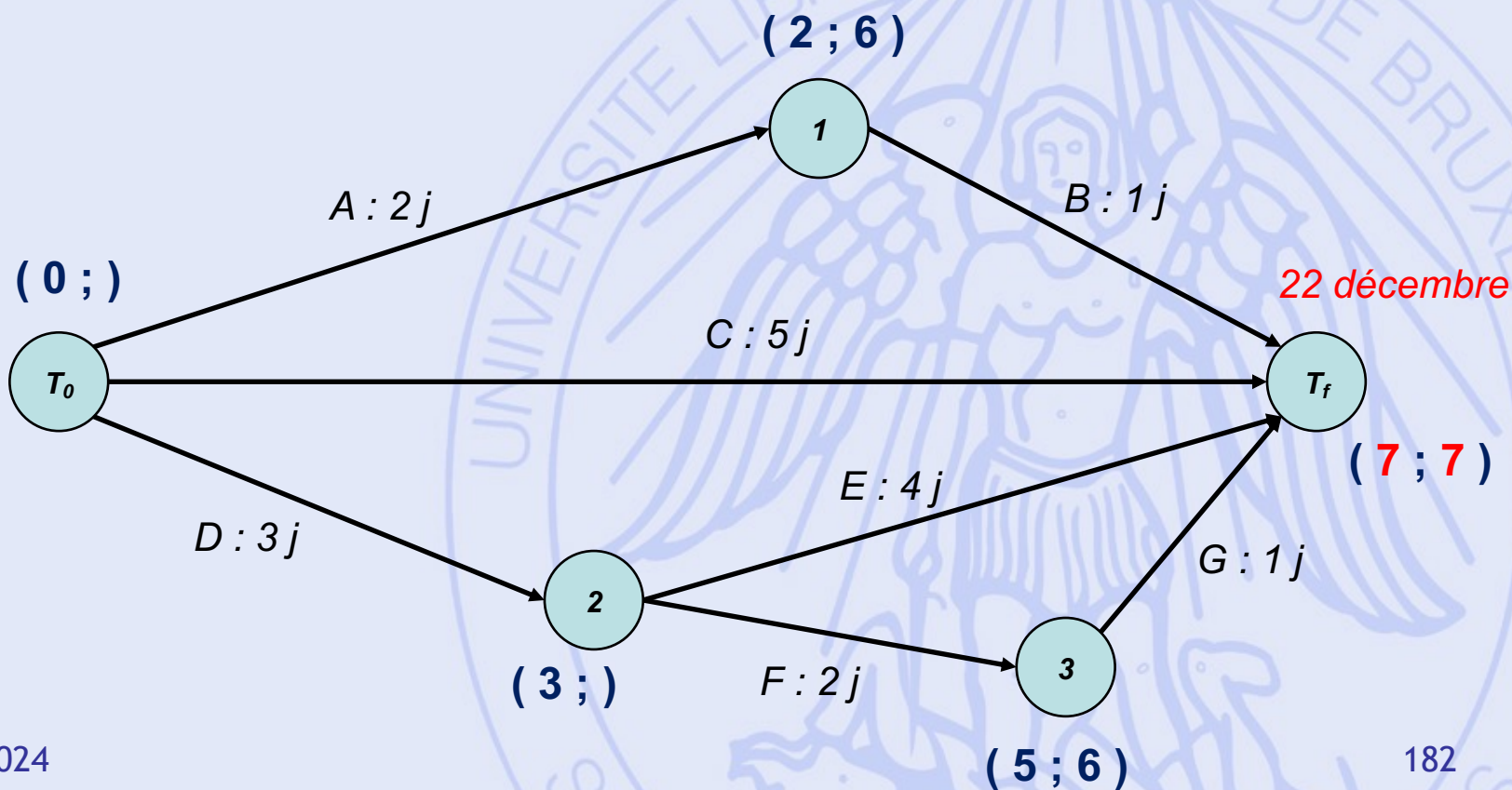
Exemple

- Date au plus tard pour chaque sommet.
- $T_0 = 0 - T_f = 7$



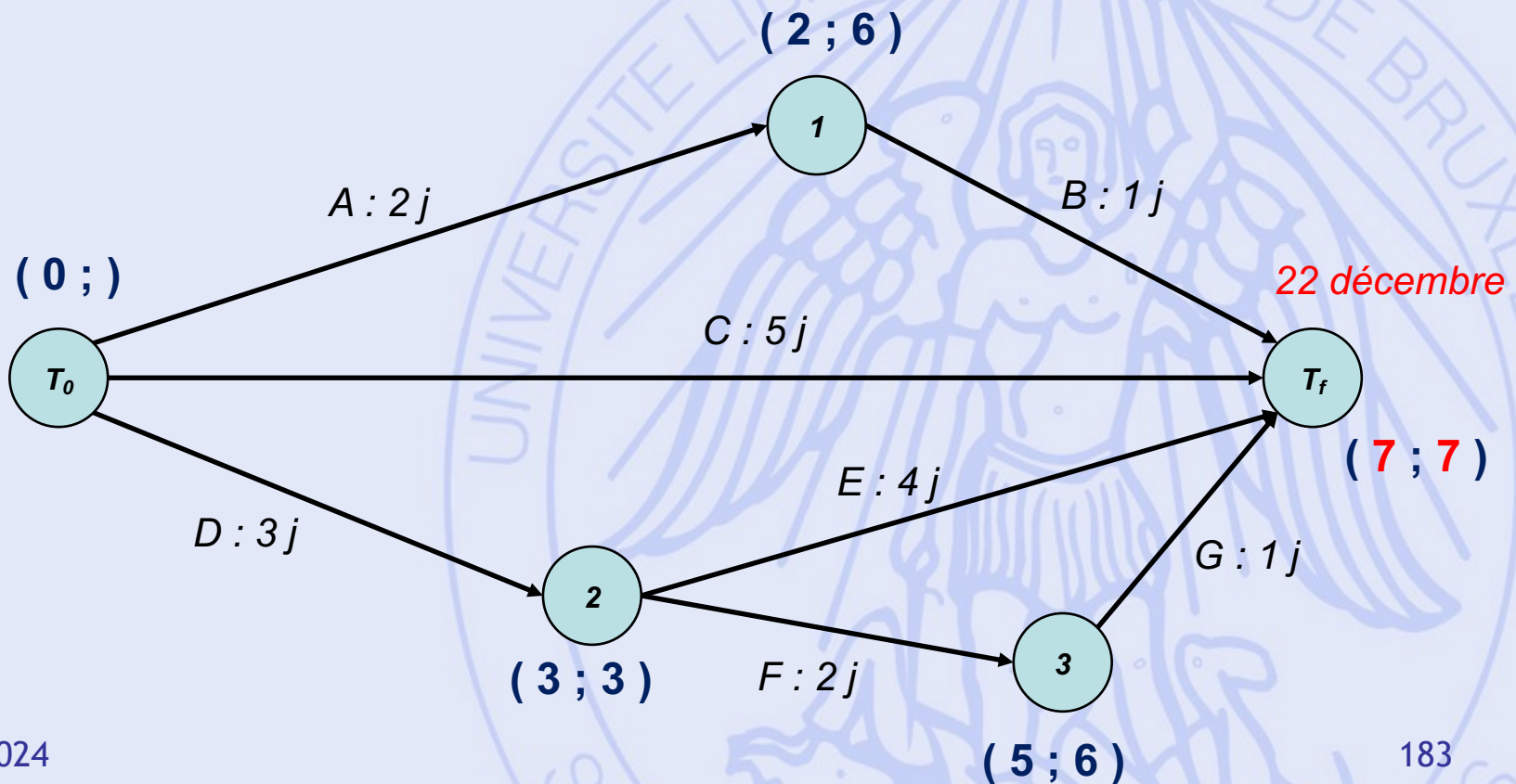
Exemple

- Date au plus tard pour chaque sommet.
- $T_0 = 0 - T_f = 7$



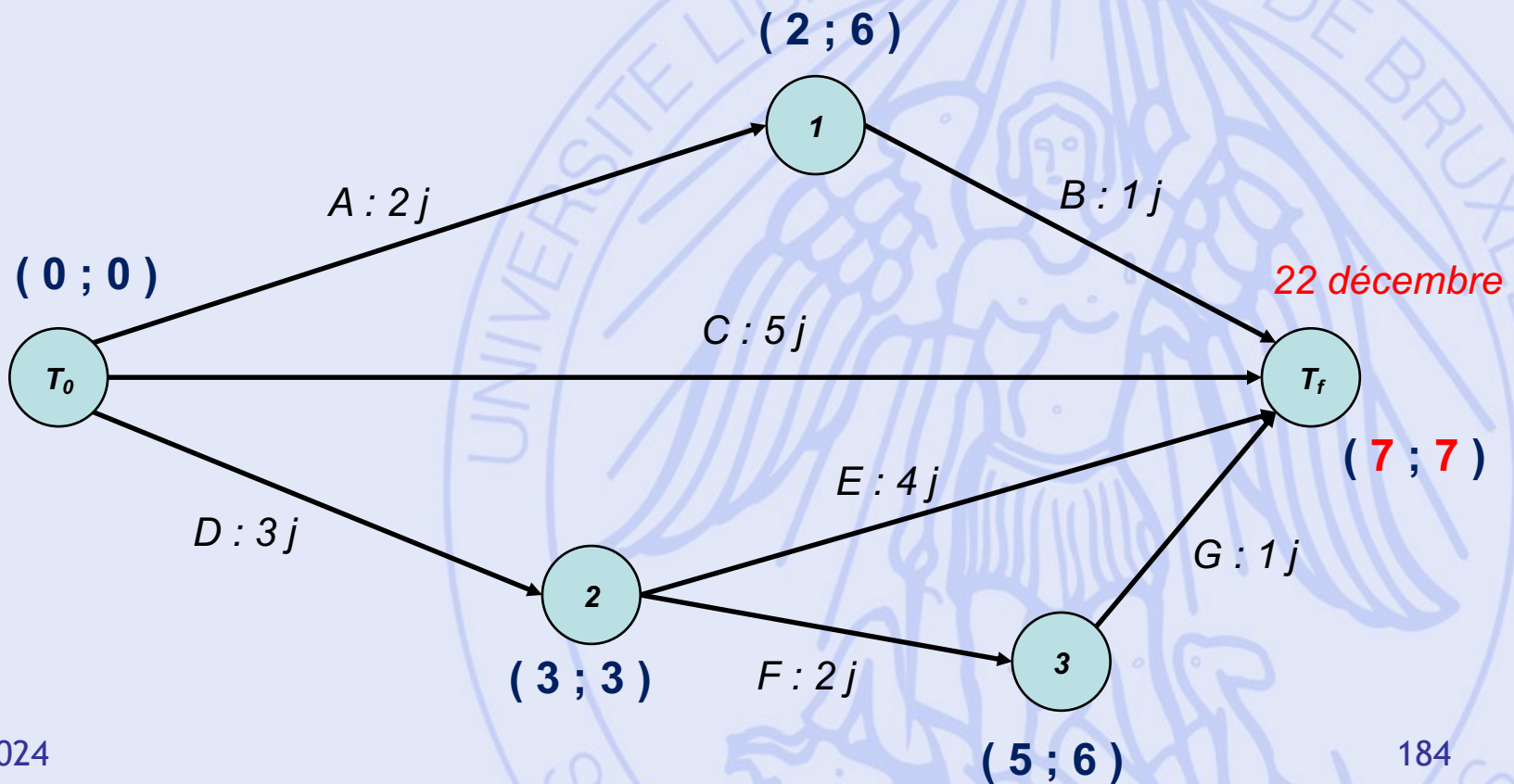
Exemple

- Date au plus tard pour chaque sommet.
- $T_0 = 0 - T_f = 7$



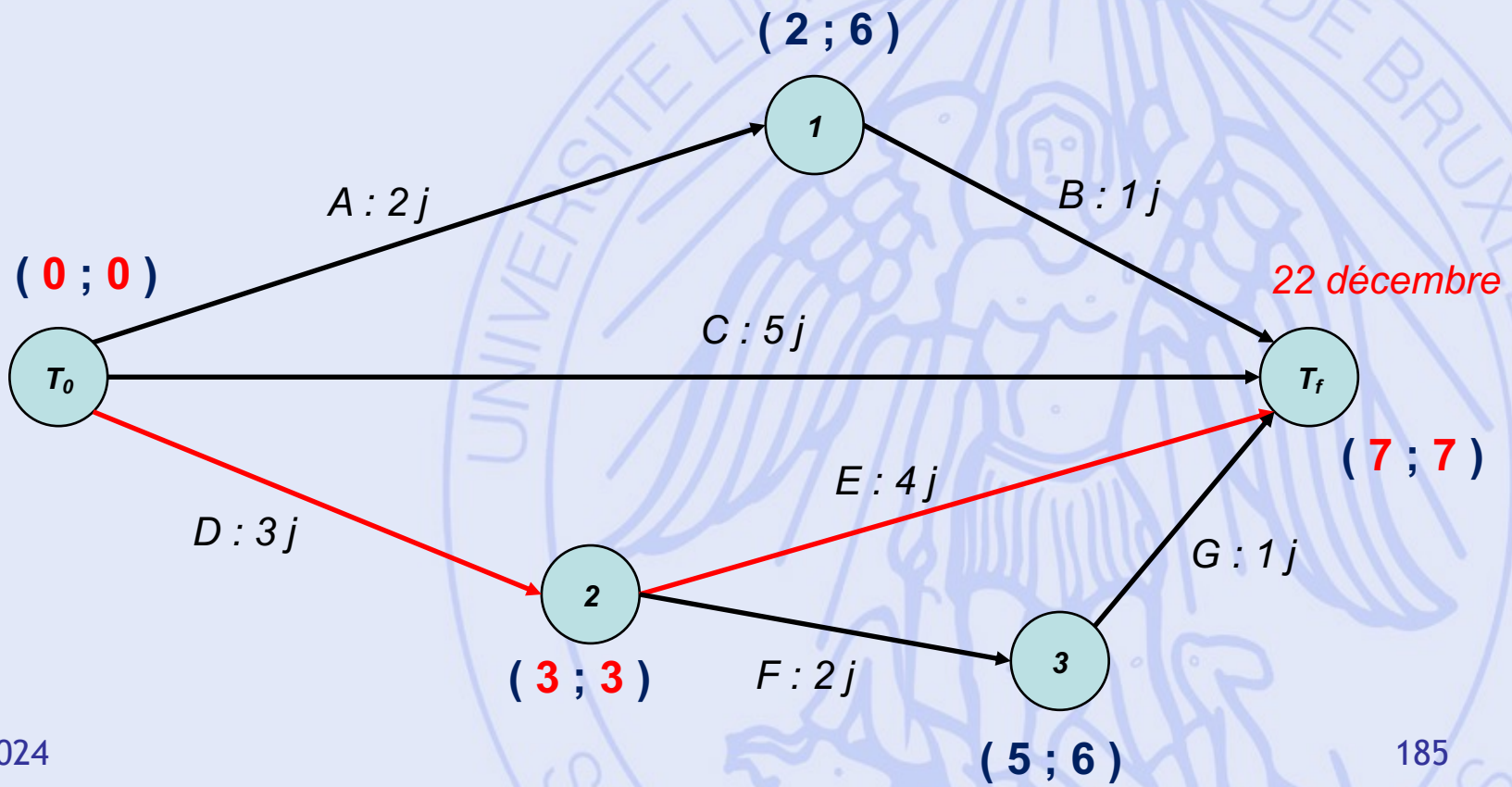
Exemple

- Date au plus tard pour chaque sommet.
- $T_0 = 0 - T_f = 7$



Exemple

- Date au plus tard pour chaque sommet.
- $T_0 = 0 - T_f = 7$



Calcul

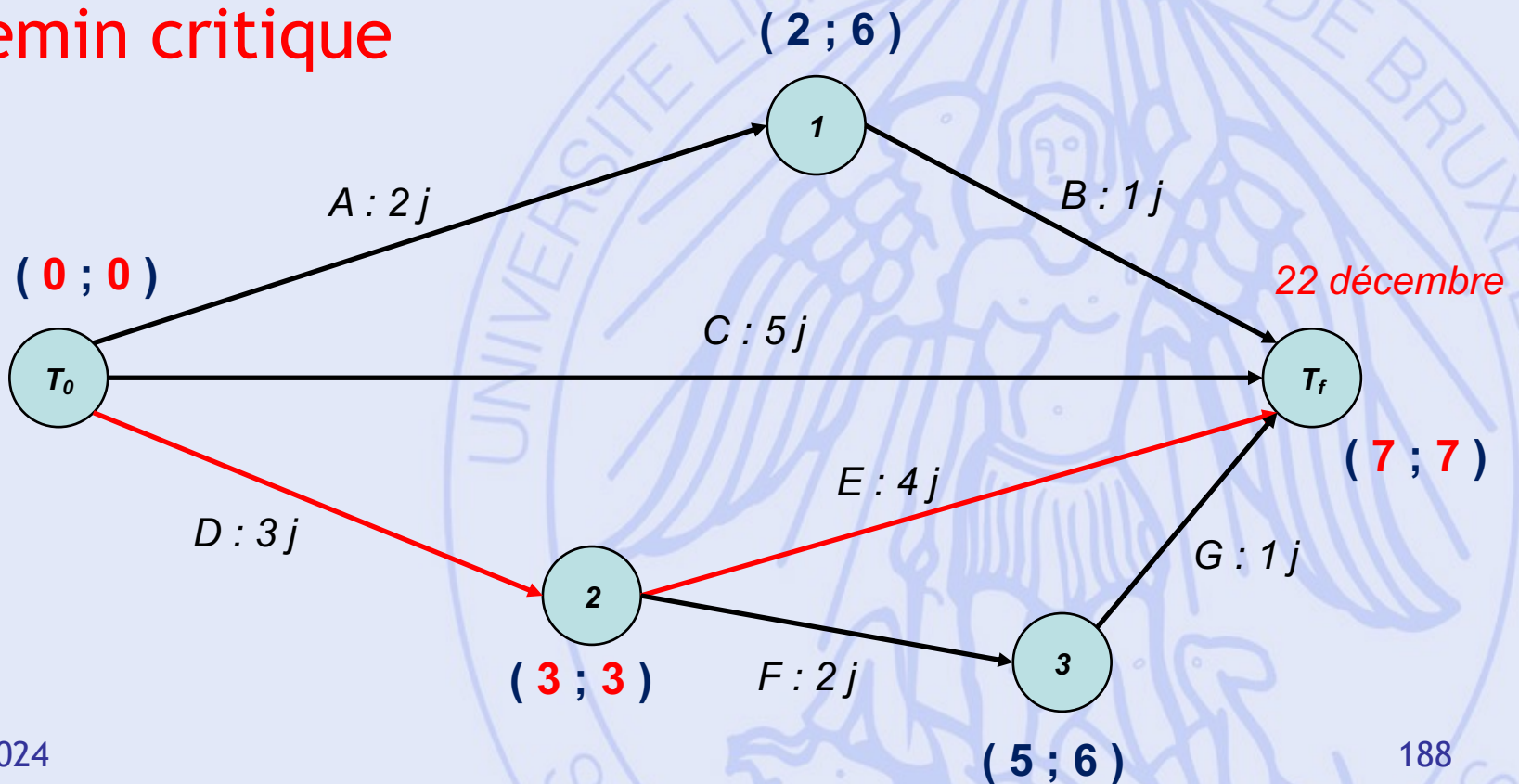
- Forme simplifiée de l'algorithme de Bellman-Kalaba pour un graphe sans circuits.
- Classement des sommets en k niveaux.
- Calcul des dates de début au plus tôt pour les sommets, par niveau décroissant, depuis le début des travaux :
 - $ES(0) = 0$
 - ensuite : $ES(i) = \max \{ ES(j) + c_{ji} \mid j \in \Gamma^-(i) \}$
- Puis calcul des dates au plus tard en repartant de la fin des travaux.

Chemin critique

- Le chemin critique est le chemin le plus long entre le début et la fin des travaux.
- Tâches critiques :
 - Tâches situées sur le chemin critique.
 - Tout retard sur une tâche critique rallonge d'autant la durée minimale de réalisation du projet.

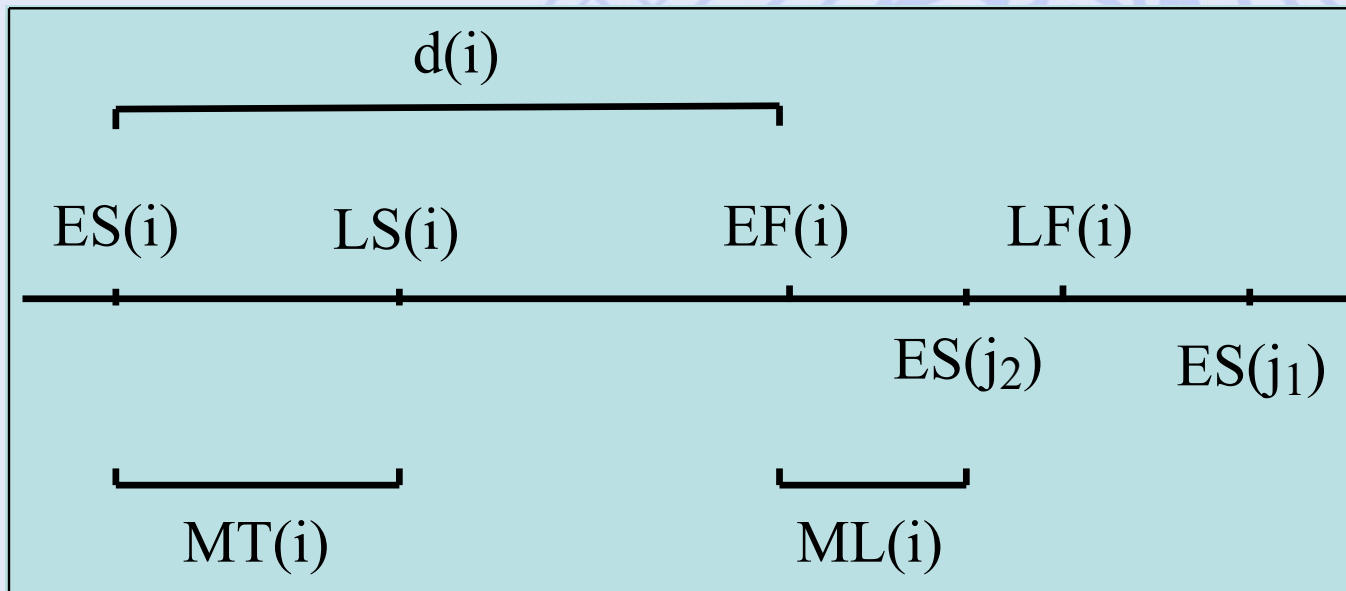
Exemple

- Date au plus tôt pour chaque sommet.
- $T_0 = 0 - T_f = 7$
- **Chemin critique**



Marges

- Retards possibles sur les tâches non-critiques, sans augmenter T ?



Marges

- Marge totale de la tâche i :

$$MT(i) = LS(i) - ES(i)$$

- Retard maximum sans augmenter T .

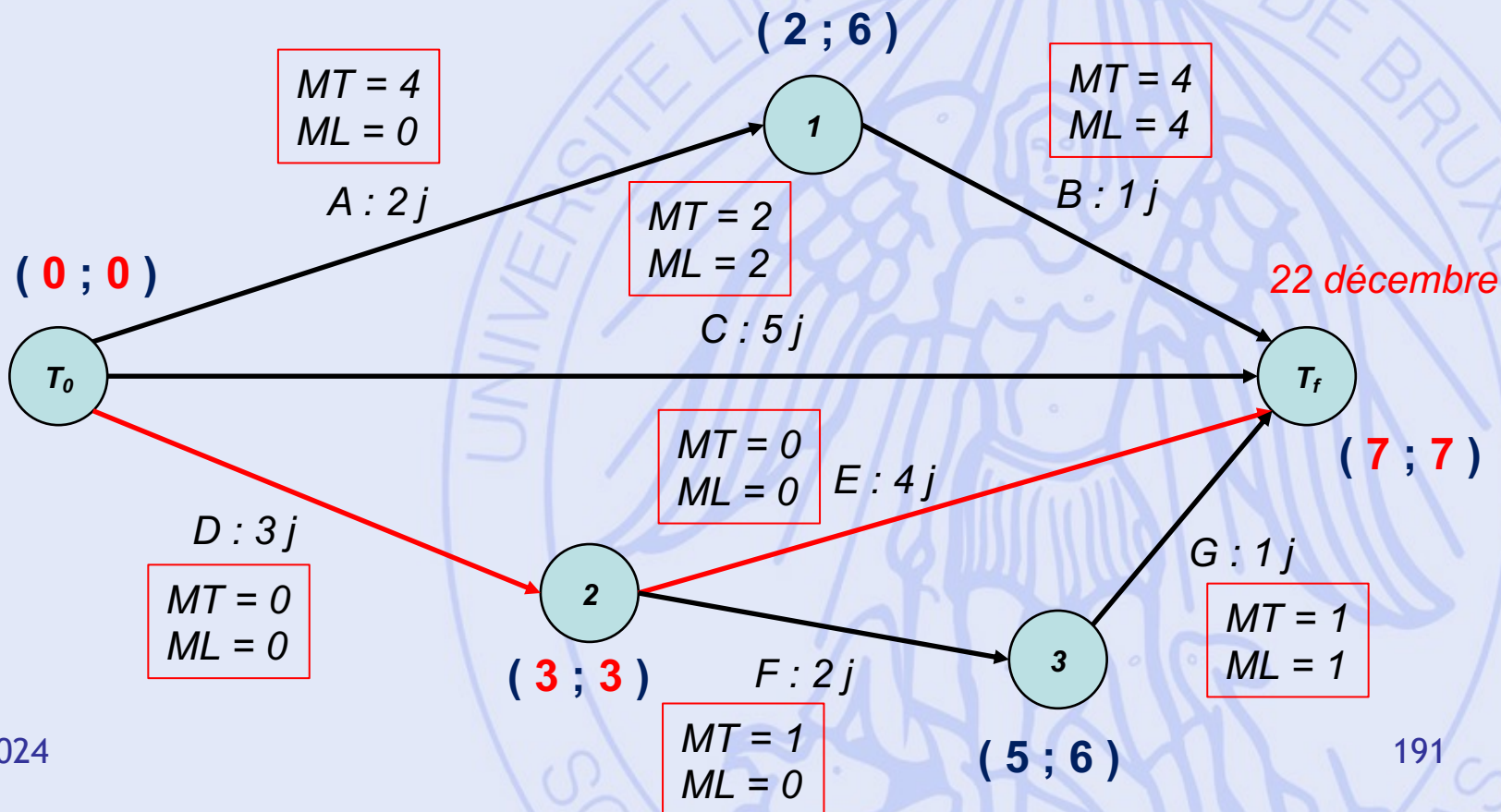
- Marge libre de la tâche i :

$$ML(i) = \min \{ ES(j) - EF(i) \mid j \text{ suit } i \}$$

- Retard maximum sans perturber les dates au plus tôt.

Exemple

- Date au plus tôt pour chaque sommet.
- $T_0 = 0 - T_f = 7$



Exemple 2 - Exploitation minière

- En vue de l'exploitation d'une mine, on construit :
 - un port sur un canal proche du site d'extraction,
 - ainsi qu'une route et une voie de chemin de fer qui relie la mine au port.
- Au total, il y a 10 tâches à effectuer (durées exprimées en mois).
- Contraintes temporelles uniquement (dans un premier temps).

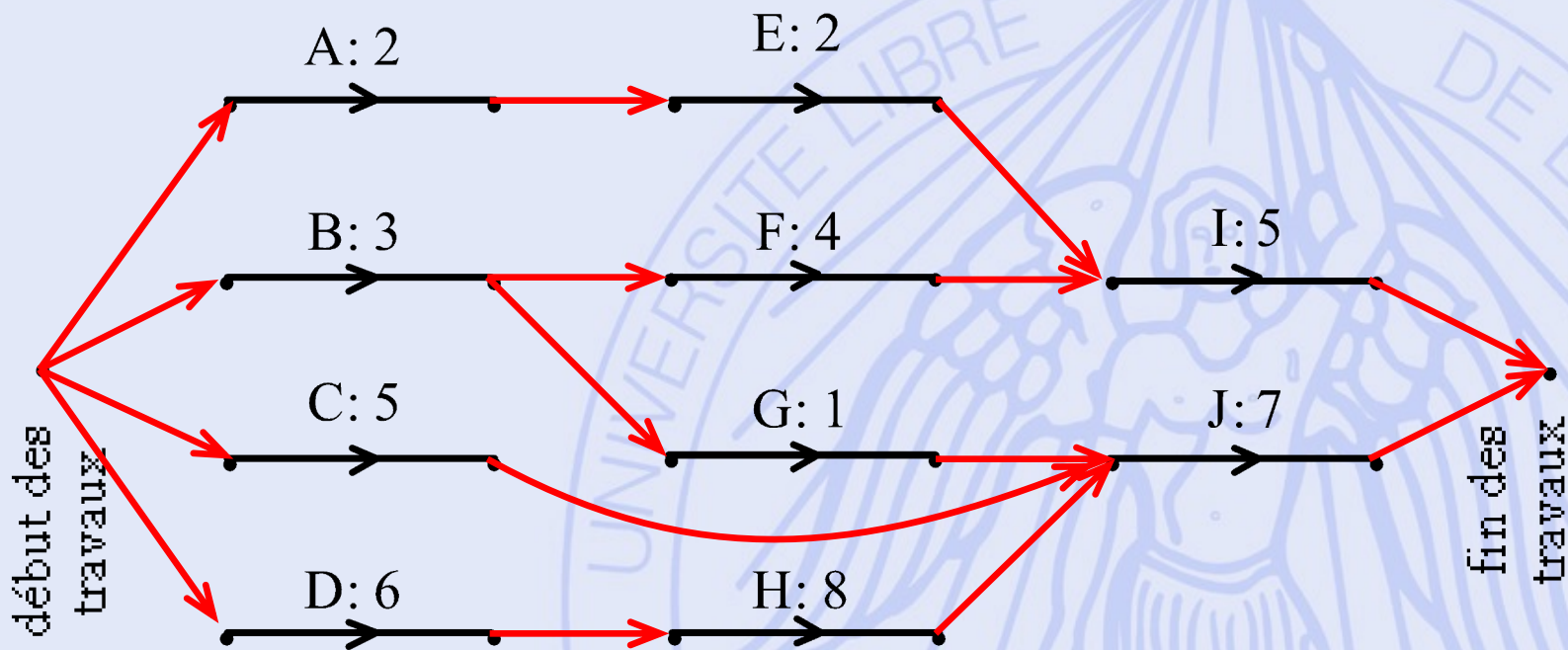
Exemple 2 - Liste des tâches

Tâches	Durées	Contraintes
A: Construction d'un port provisoire	2	-
B: Déblai pour route et voie ferrée	3	-
C: Commande du matériel minier	5	-
D: Commande du matériel portuaire	6	-
E: Implantation du port définitif	2	Après A.
F: Construction de la route	4	Après B.
G: Pose de la voie ferrée	1	Après B.
H: Installation portuaire	8	Après D.
I : Construction d'une cité	5	Après A,B,E,F.
J: Installation minière	7	Après B,C,D,G,H.

Exemple 2 - Questions

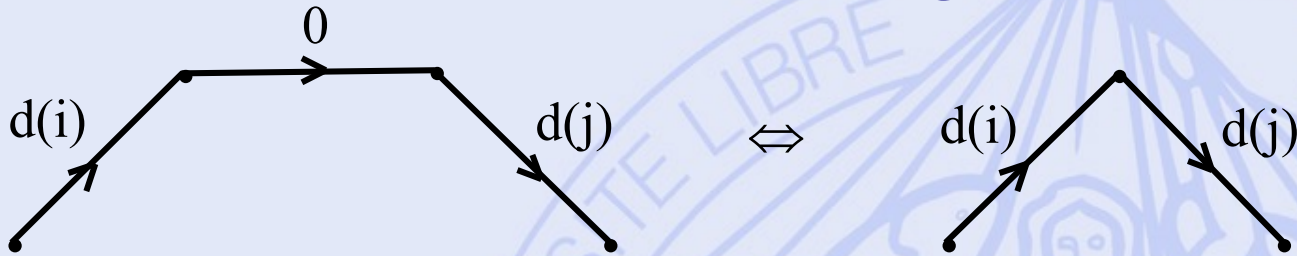
- Quelle est la durée de réalisation minimale des travaux, en tenant compte des contraintes ?
- Quel est le calendrier d'exécution des différentes tâches correspondant ?
- On pourrait aussi prendre en compte le nombre d'ouvriers disponibles et leurs qualifications, ...

Exemple 2 - graphe

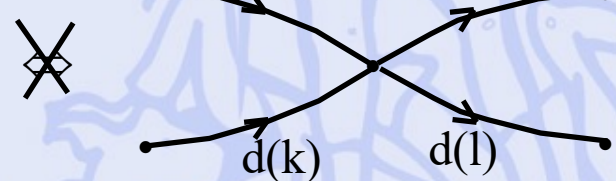
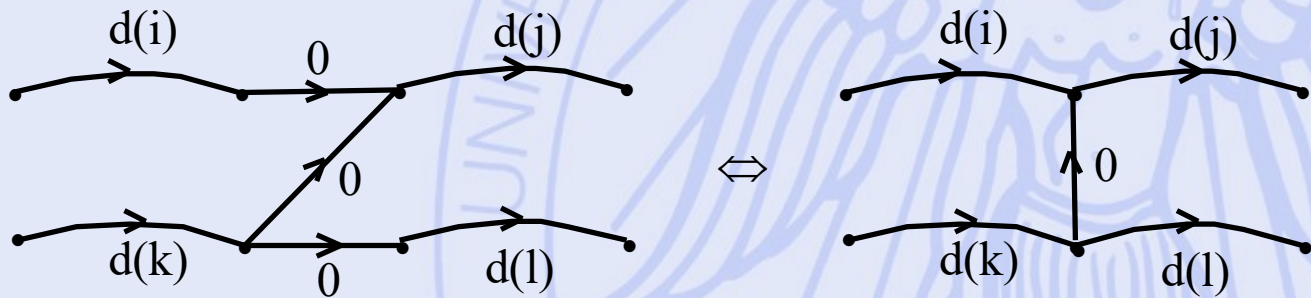


Simplification du graphe

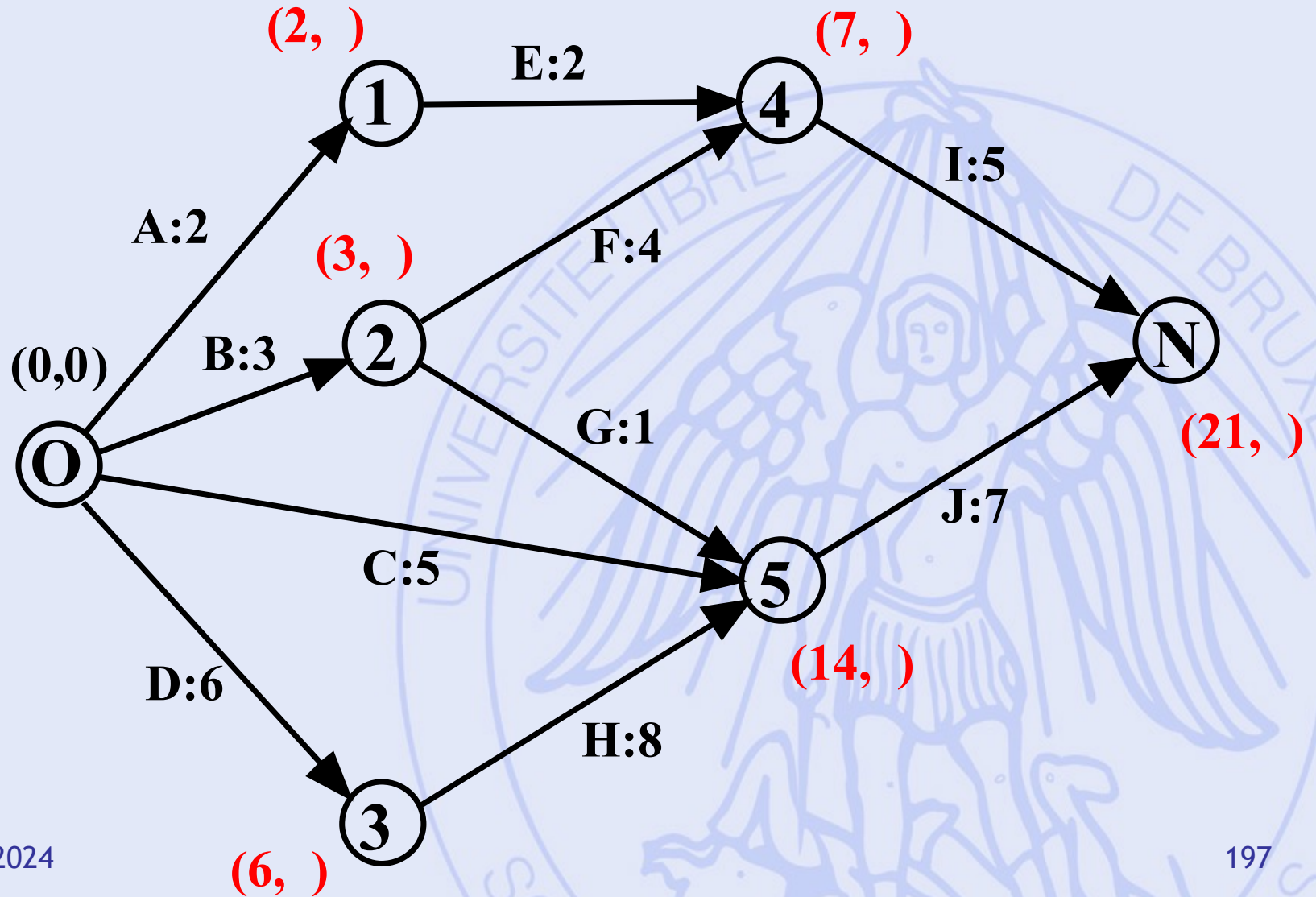
- Elimination des arcs de longueur nulle :



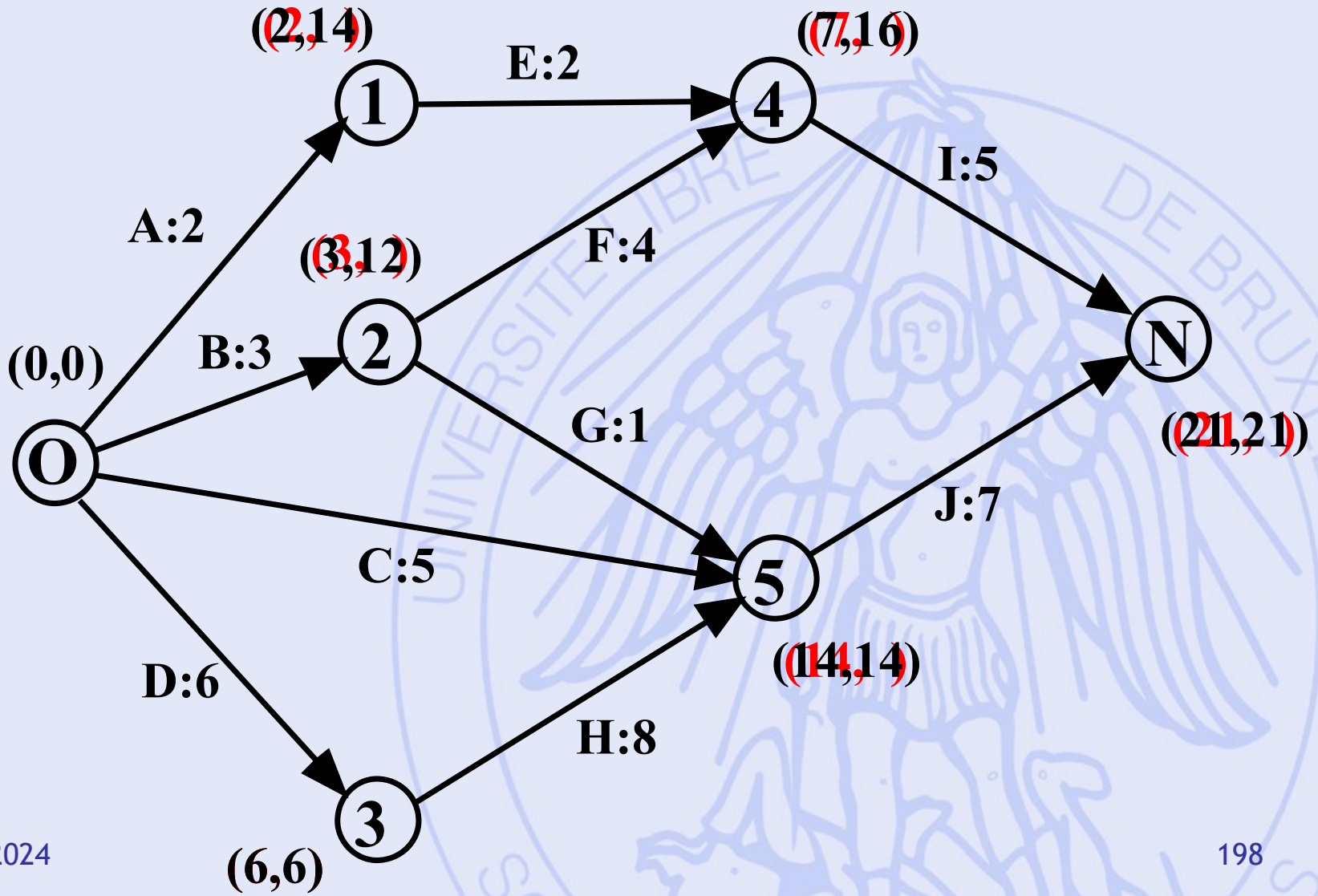
- Attention :



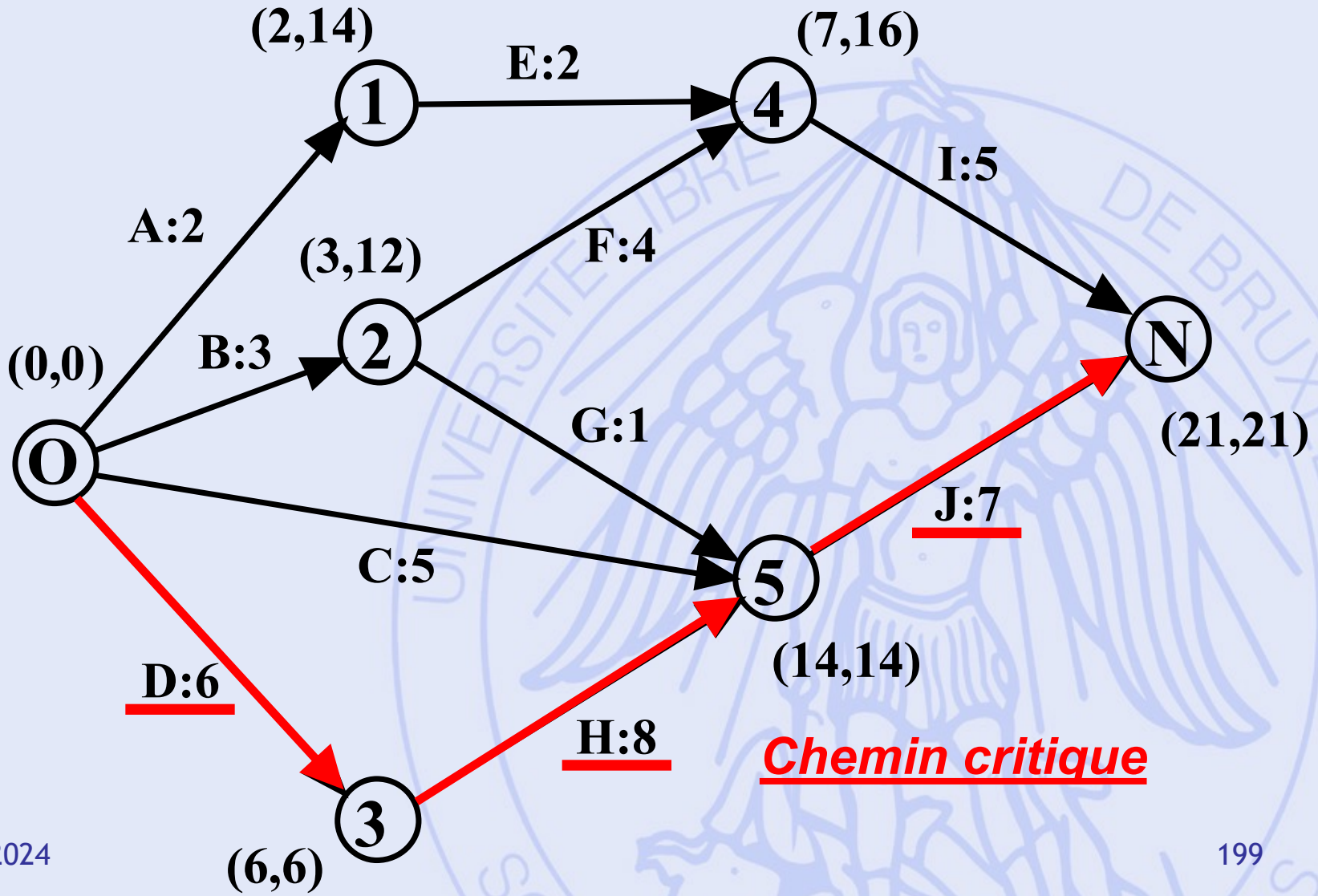
Exemple 2 - graphe simplifié



Exemple 2 - graphe simplifié



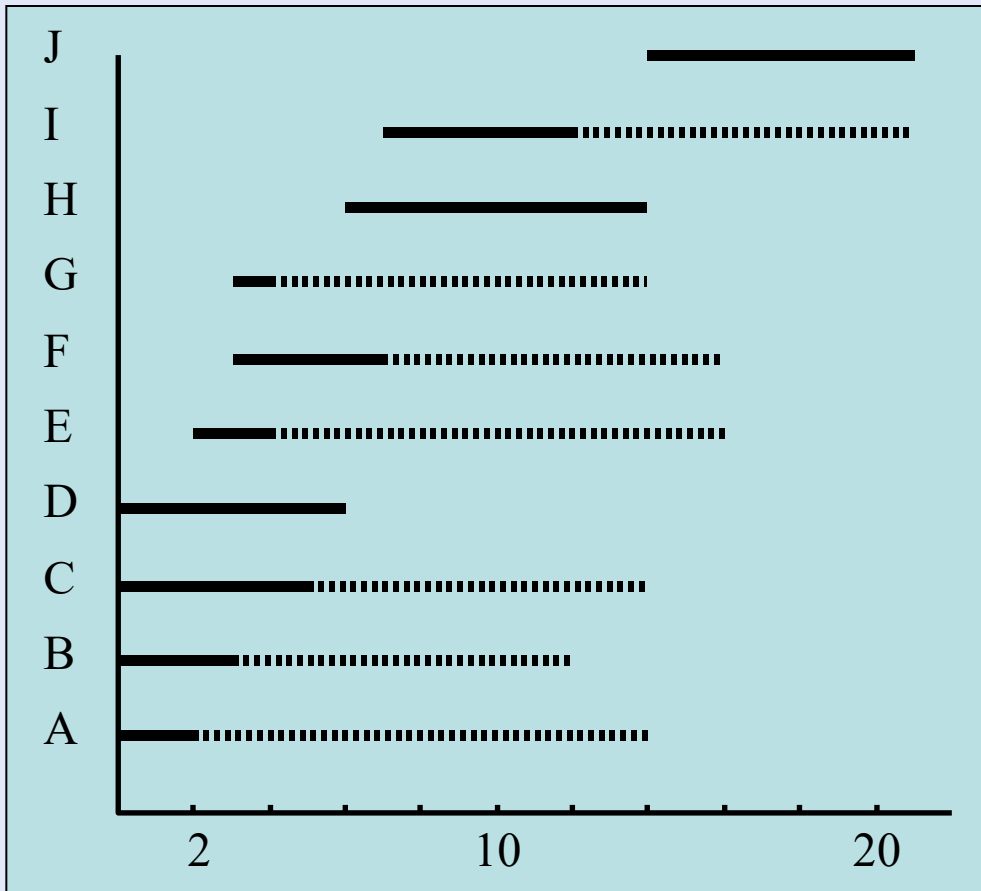
Exemple 2 - graphe simplifié



Exemple 2 - résultats

Tâche	Durée	Après	ES	EF	LS	LF	ML	MT
A	2	-	0	2	12	14	0	12
B	3	-	0	3	9	12	0	9
C	5	-	0	5	9	14	9	9
D	6	-	0	6	0	6	0	0
E	2	A	2	4	14	16	3	12
F	4	B	3	7	12	16	0	9
G	1	B	3	4	13	14	10	10
H	8	D	6	14	6	14	0	0
I	5	A,B,E,F	7	12	16	21	9	9
J	7	B,C,D,G,H	14	21	14	21	0	0

Diagramme de Gantt



- Trait plein :
 - Ordonnancement au plus tôt.
- Pointillés :
 - Marge totale.

Contraintes cumulatives

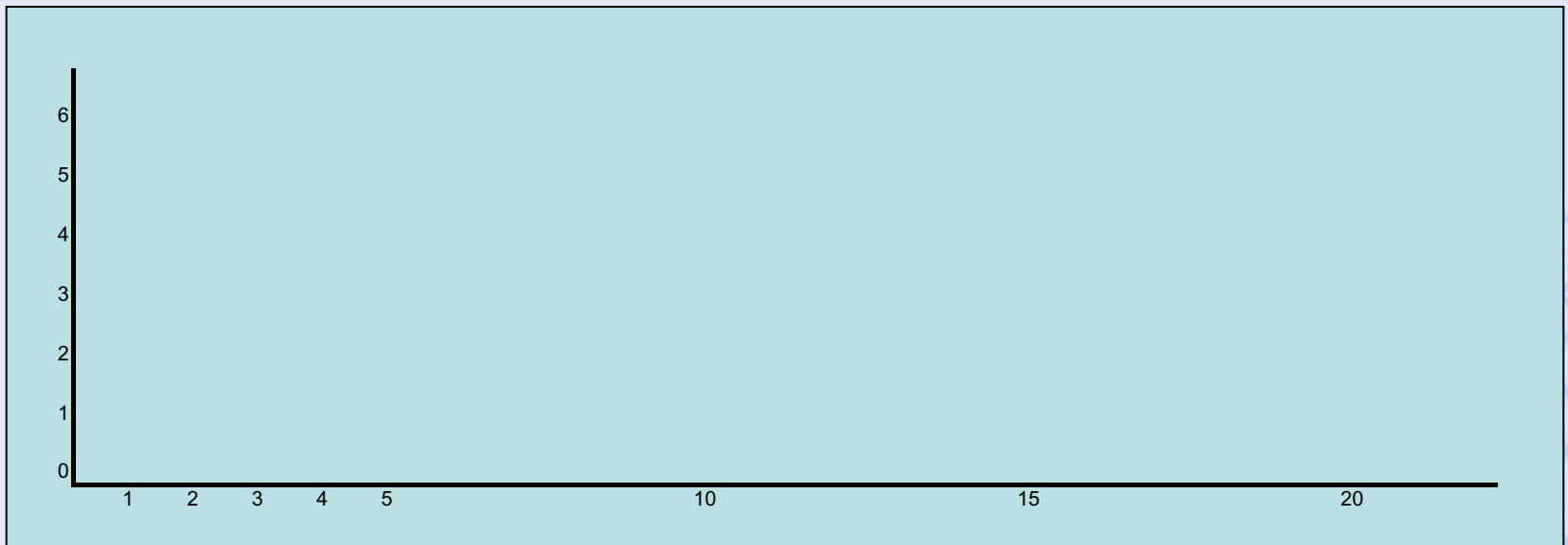
- Origine :
 - Utilisation de ressources disponibles en quantités limitées :
outils, matières premières, ouvriers, budget, ...
- Courbe de charge :
 - Pour un type de ressource et pour un ordonnancement donné : quantités cumulées nécessaires en fonction du temps.
- Problèmes :
 - Respecter un profil maximum pour la courbe de charge (contrainte).
 - Lisser la courbe de charge (éviter les pics).

Exemple 2

- Ressource : 3 équipes d'ouvriers disponibles.
- Equipes nécessaires par tâche :
(pendant toute la durée de la tâche)

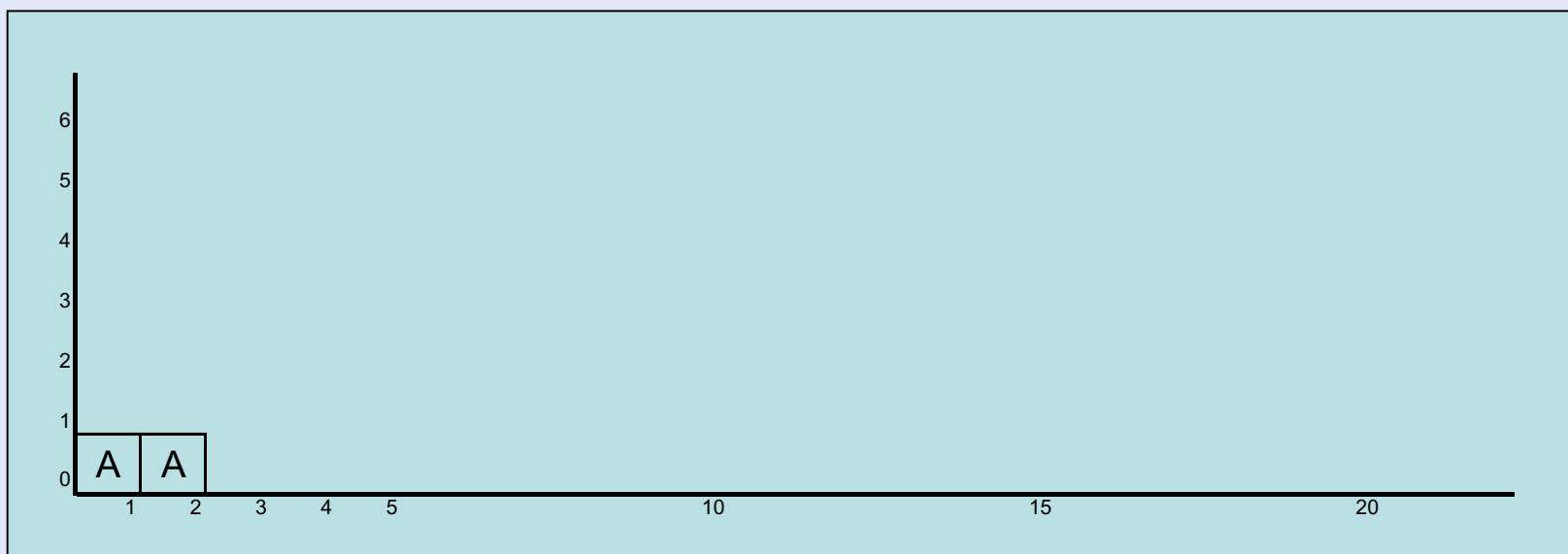
A : 1	B : 1	C : 0	D : 0	E : 3
F : 2	G : 1	H : 0	I : 3	J : 1

Courbe de charge



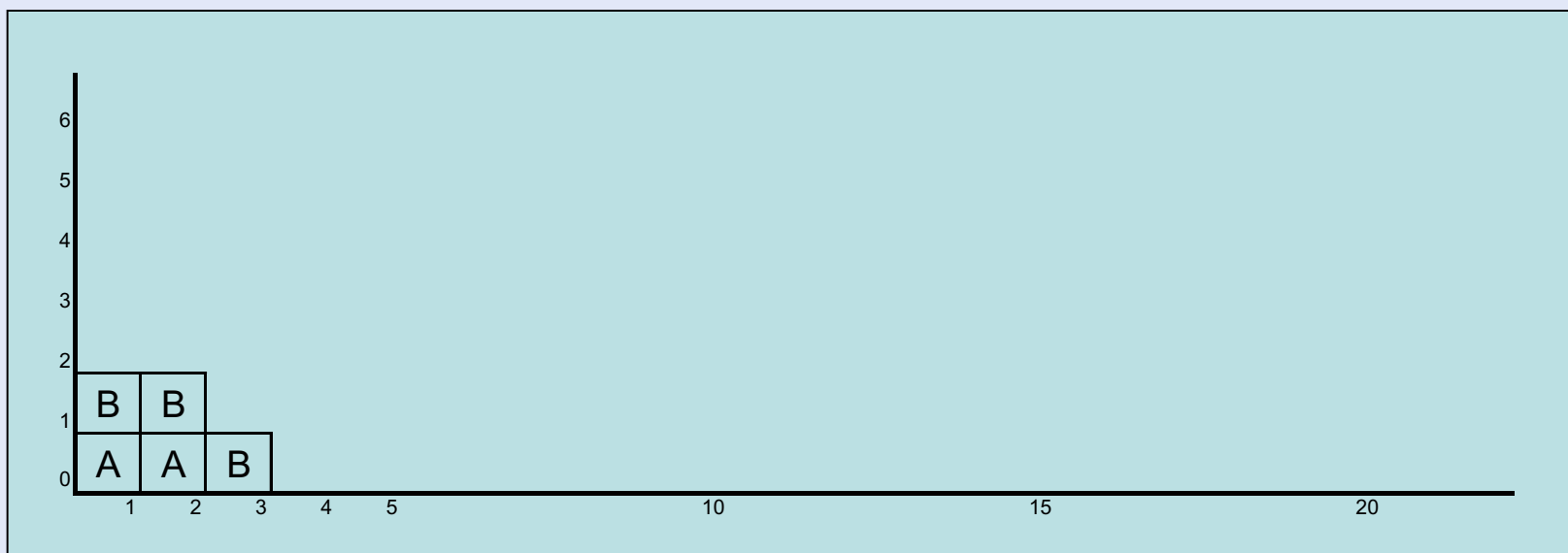
- Tâche A :
 - Durée : 2 mois,
 - Dès le début des travaux,
 - 1 équipe d'ouvriers.

Courbe de charge



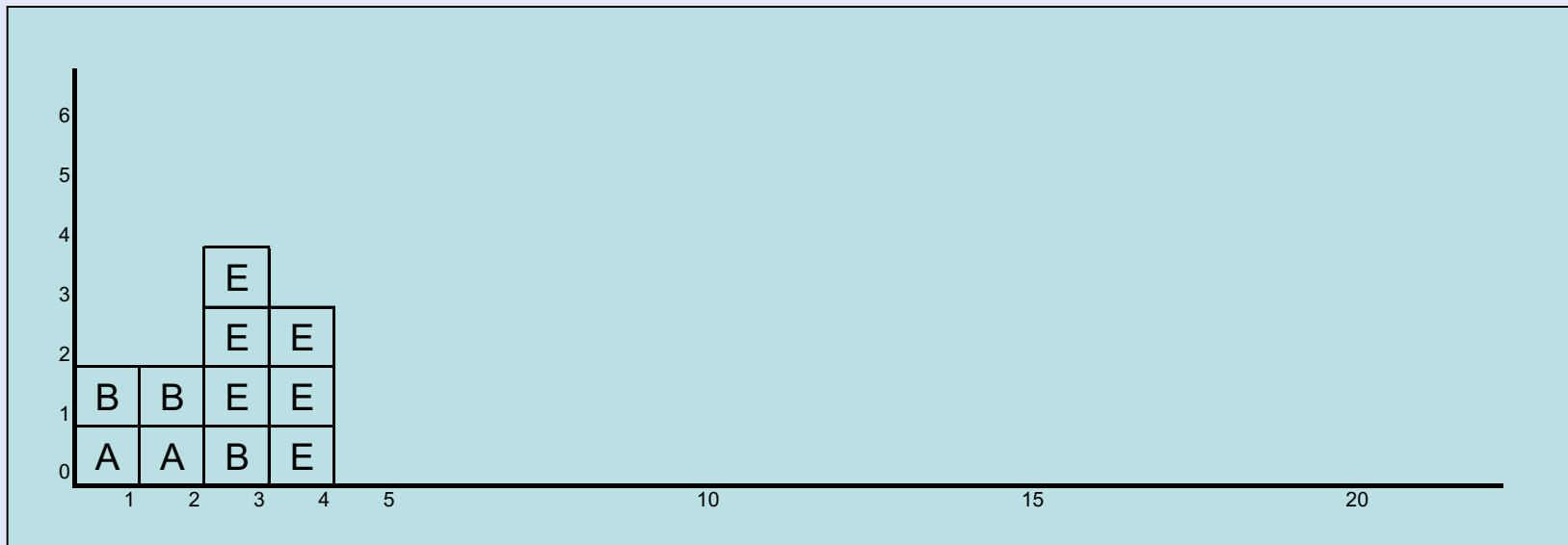
- Tâche B :
 - Durée : 3 mois,
 - Dès le début des travaux,
 - 1 équipe d'ouvriers.

Courbe de charge



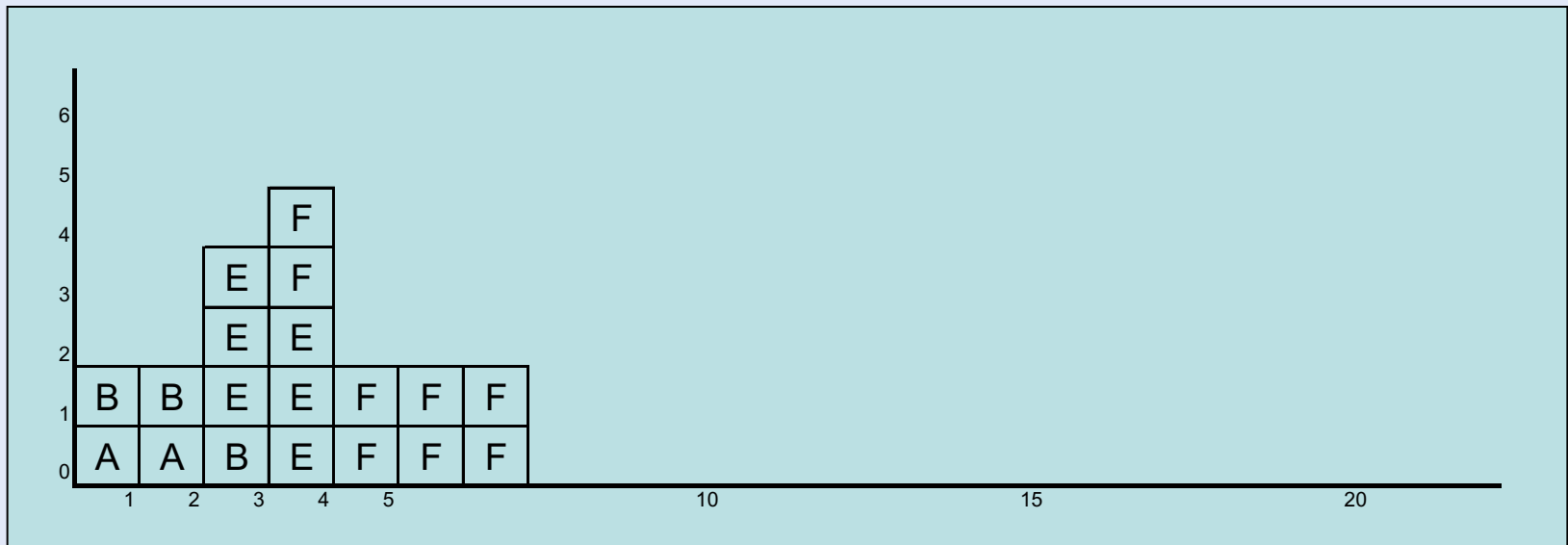
- Tâche E :
 - Durée : 2 mois,
 - Au plus tôt 2 mois après le début des travaux,
 - 3 équipes d'ouvriers.

Courbe de charge



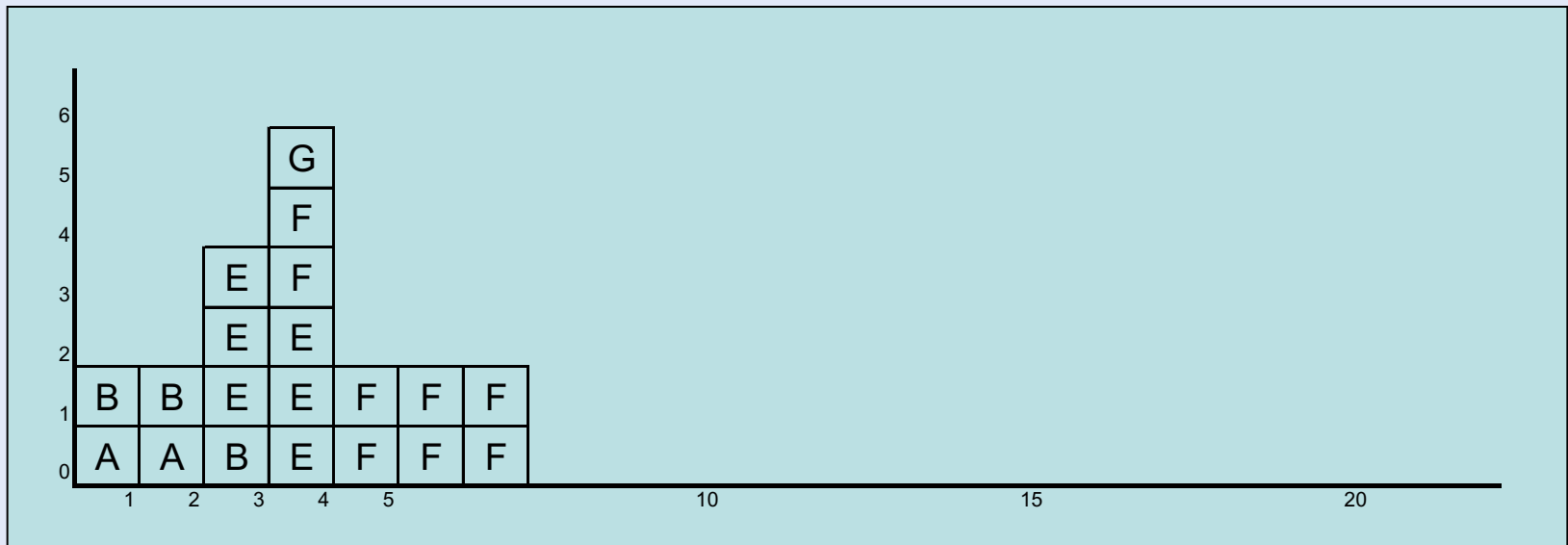
- Tâche F :
 - Durée : 4 mois,
 - Au plus tôt 3 mois après le début des travaux,
 - 2 équipes d'ouvriers.

Courbe de charge



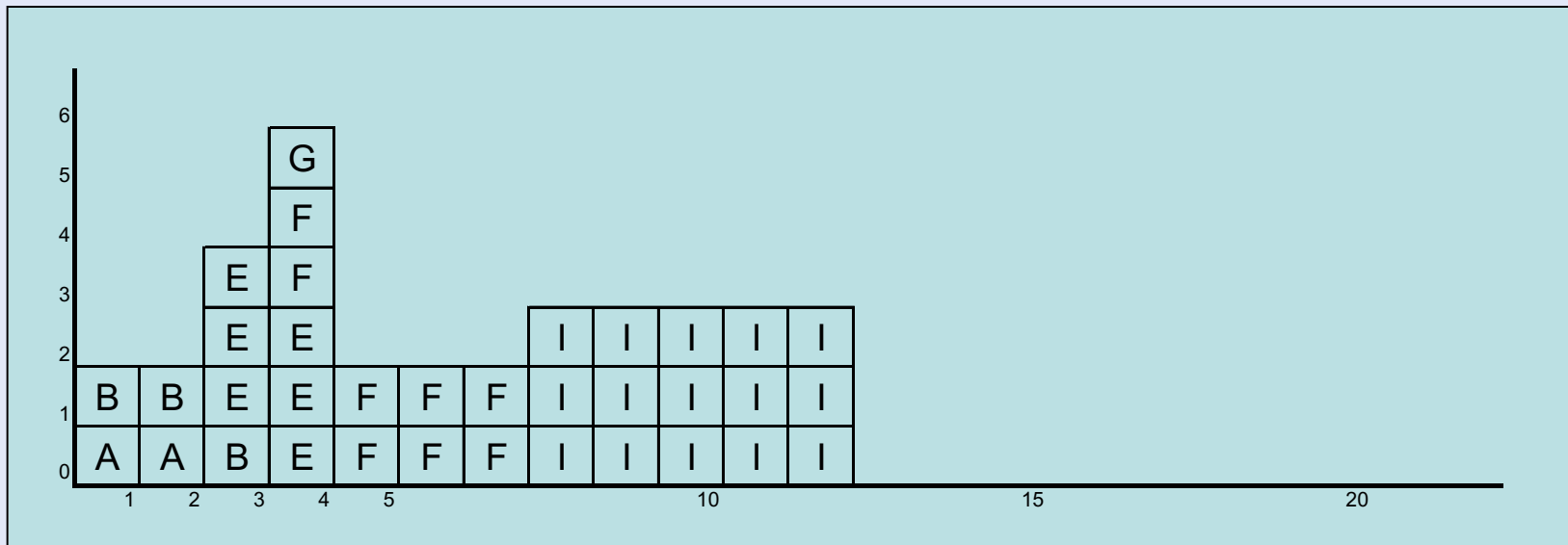
- Tâche G :
 - Durée : 1 mois,
 - Au plus tôt 3 mois après le début des travaux,
 - 1 équipe d'ouvriers.

Courbe de charge



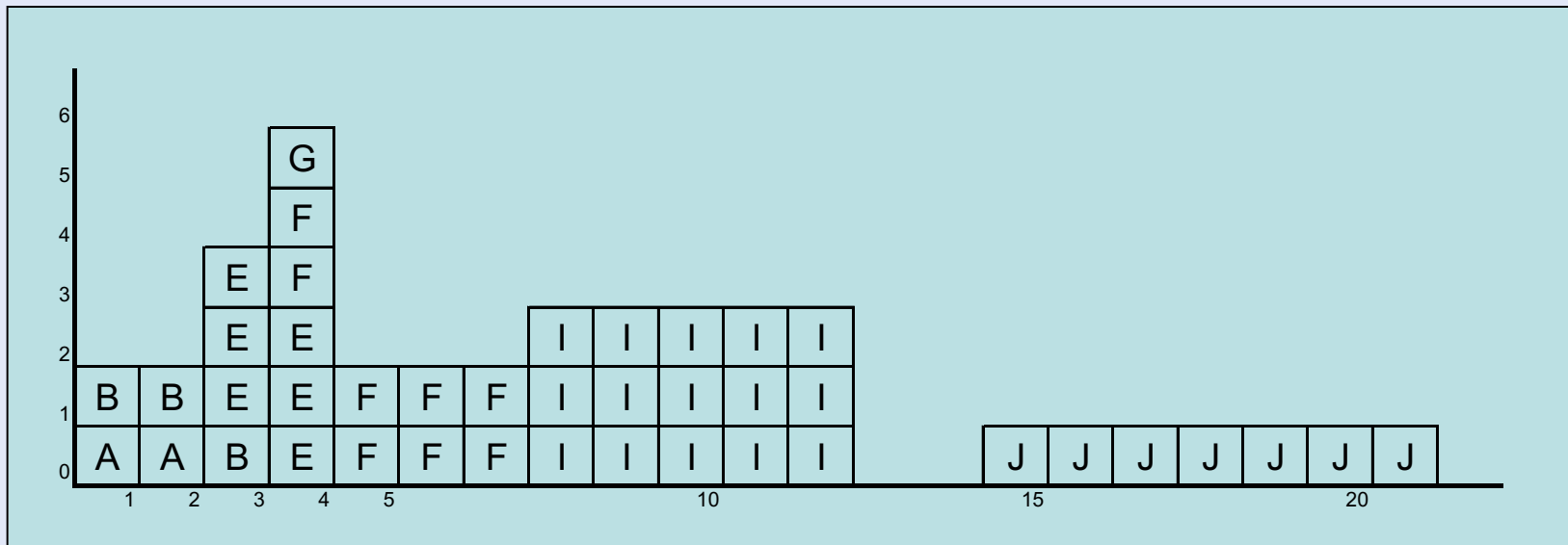
- Tâche I :
 - Durée : 5 mois,
 - Au plus tôt 7 mois après le début des travaux,
 - 3 équipes d'ouvriers.

Courbe de charge



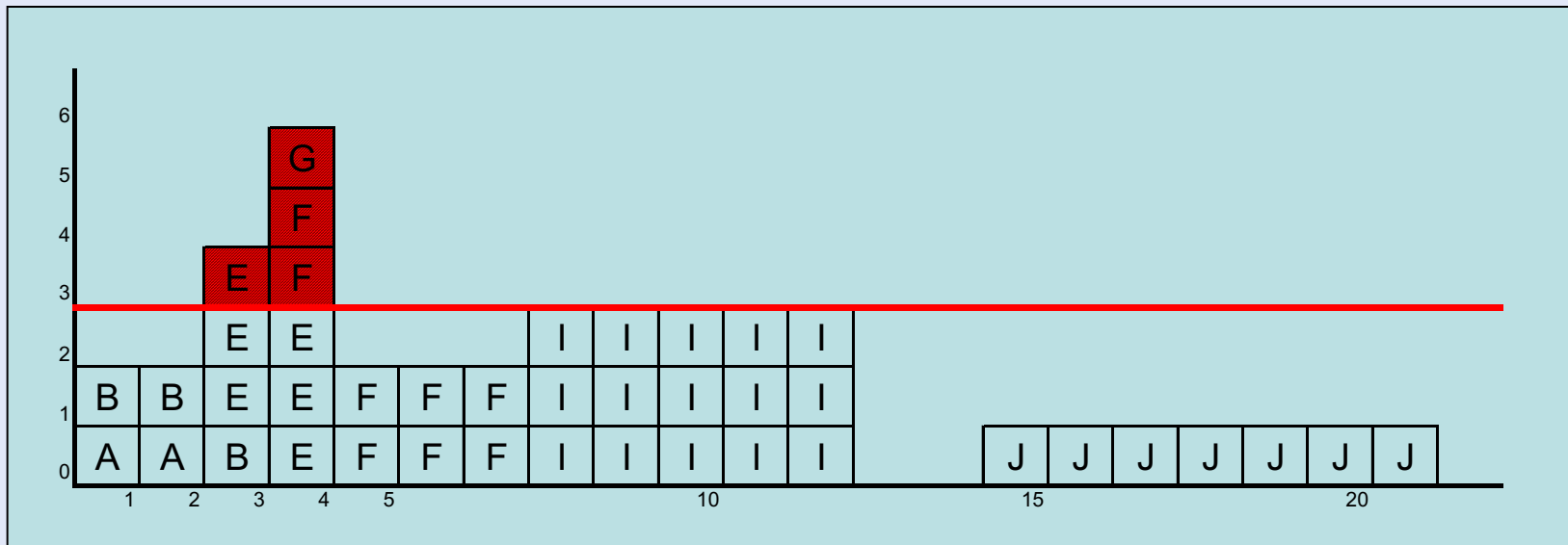
- Tâche J :
 - Durée : 7 mois,
 - Au plus tôt 14 mois après le début des travaux,
 - 1 équipe d'ouvriers.

Courbe de charge



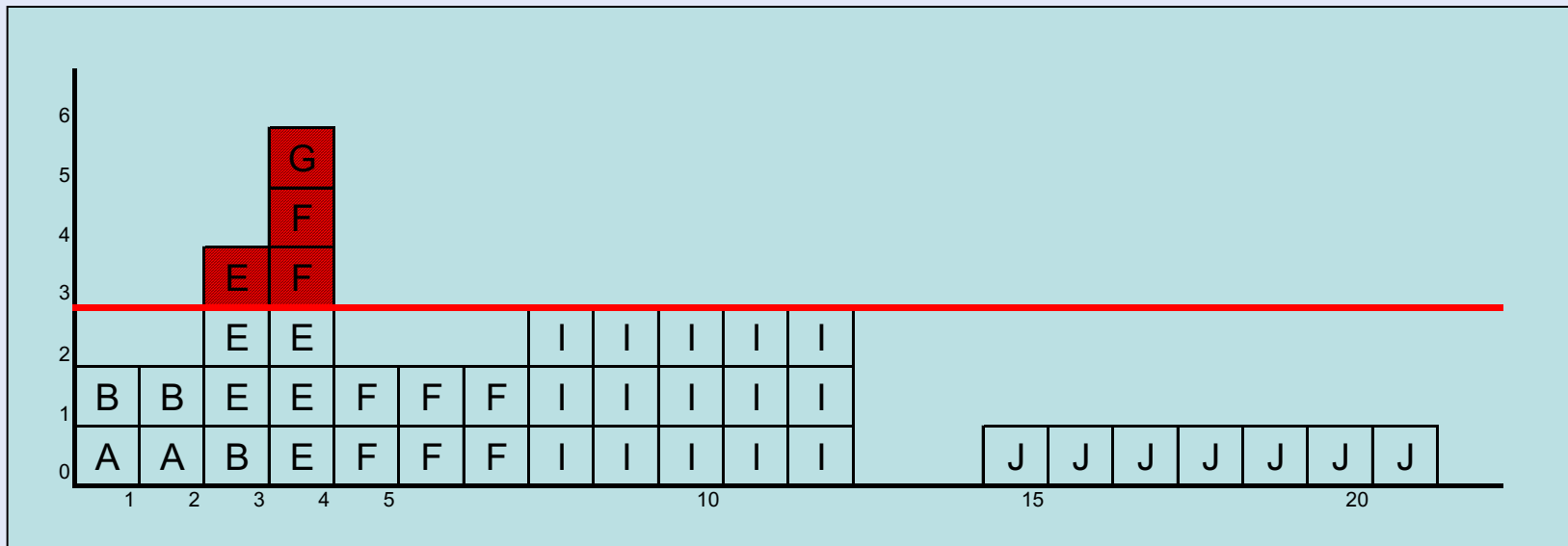
- Courbe de charge peu équilibrée :
 - De 0 à 6 équipes par mois !

Courbe de charge



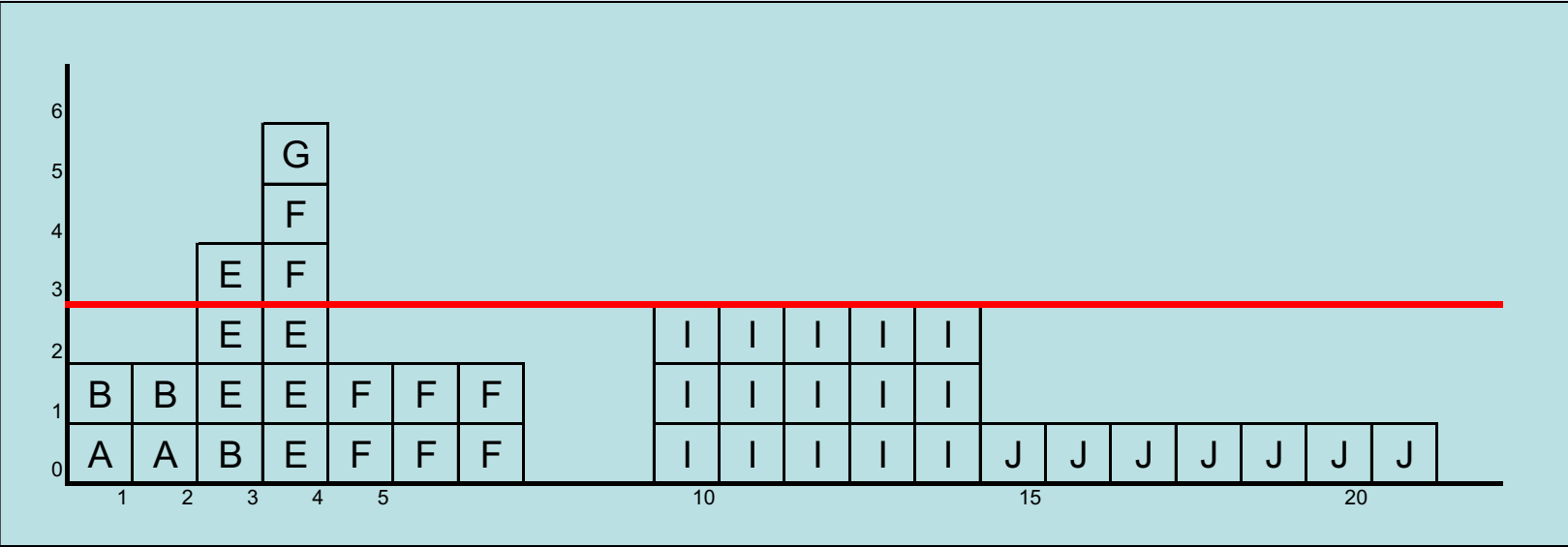
- Contrainte cumulative non respectée :
 - Plus de 3 équipes pendant 2 mois !

Lissage manuel



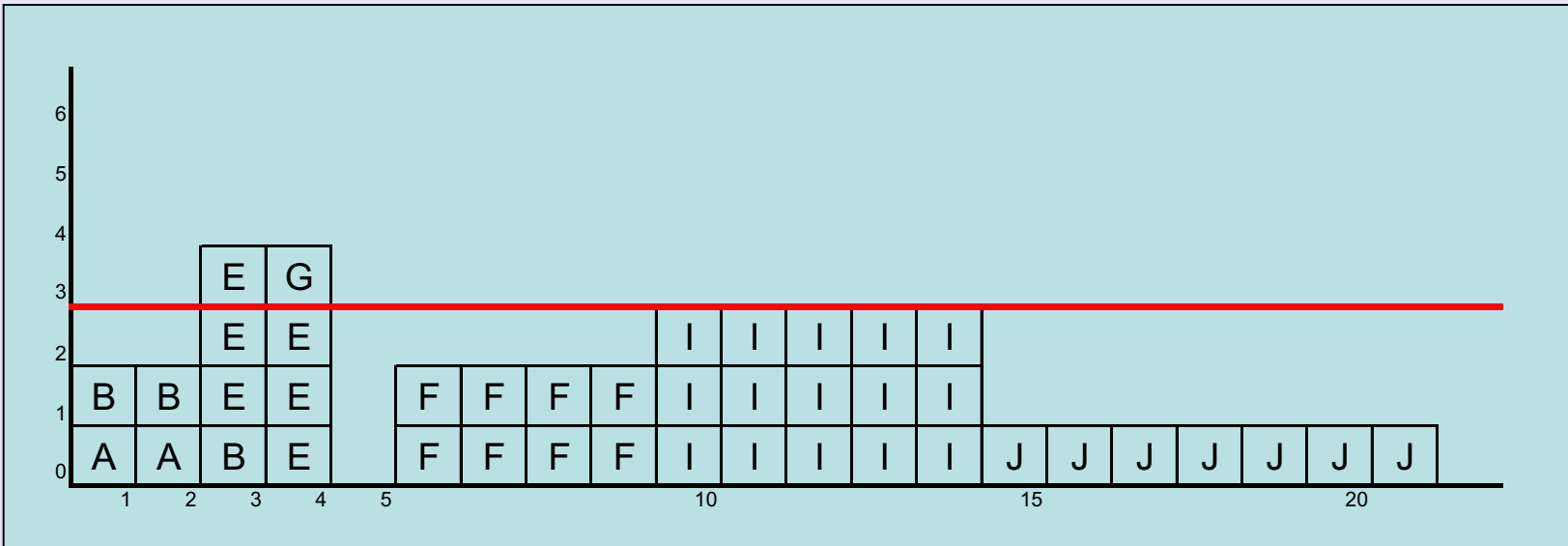
- Reculer la tâche I de 2 mois.

Lissage manuel



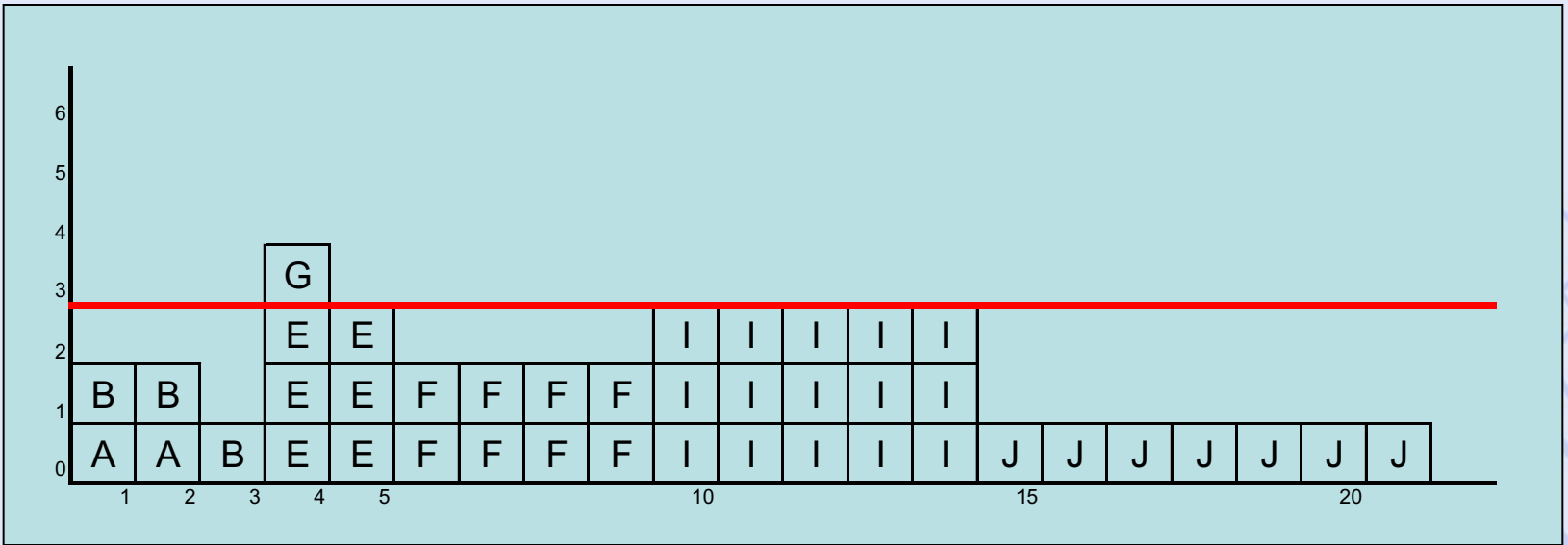
- Reculer la tâche F de 2 mois.

Lissage manuel



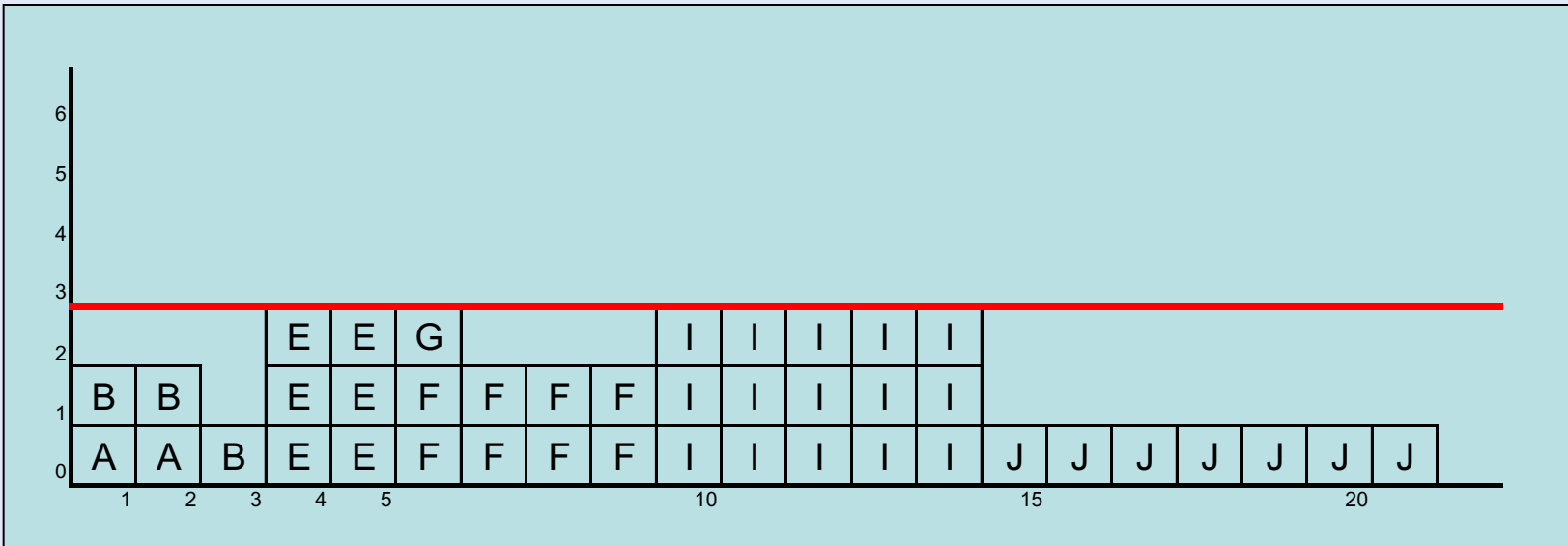
- Reculer la tâche E de 1 mois.

Lissage manuel



- Reculer la tâche G de 2 mois.

Lissage manuel



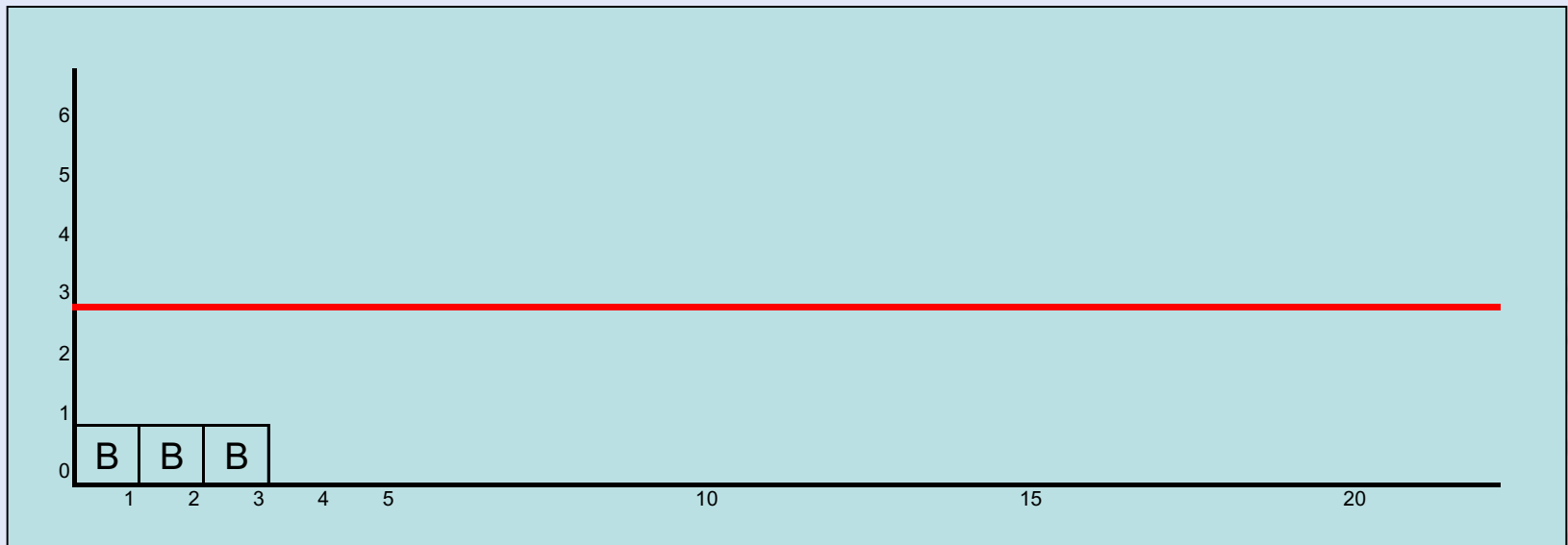
- Contrainte respectée.
- En 21 mois malgré tout (coup de chance) !
- Approche systématique ?

Algorithme MILORD

- Ranger les tâches par ordre croissant de leur date de début au plus tard. Départager les ex-aequo par leur marge libre.
- Placer successivement les tâches au plus tôt, en tenant compte des contraintes.

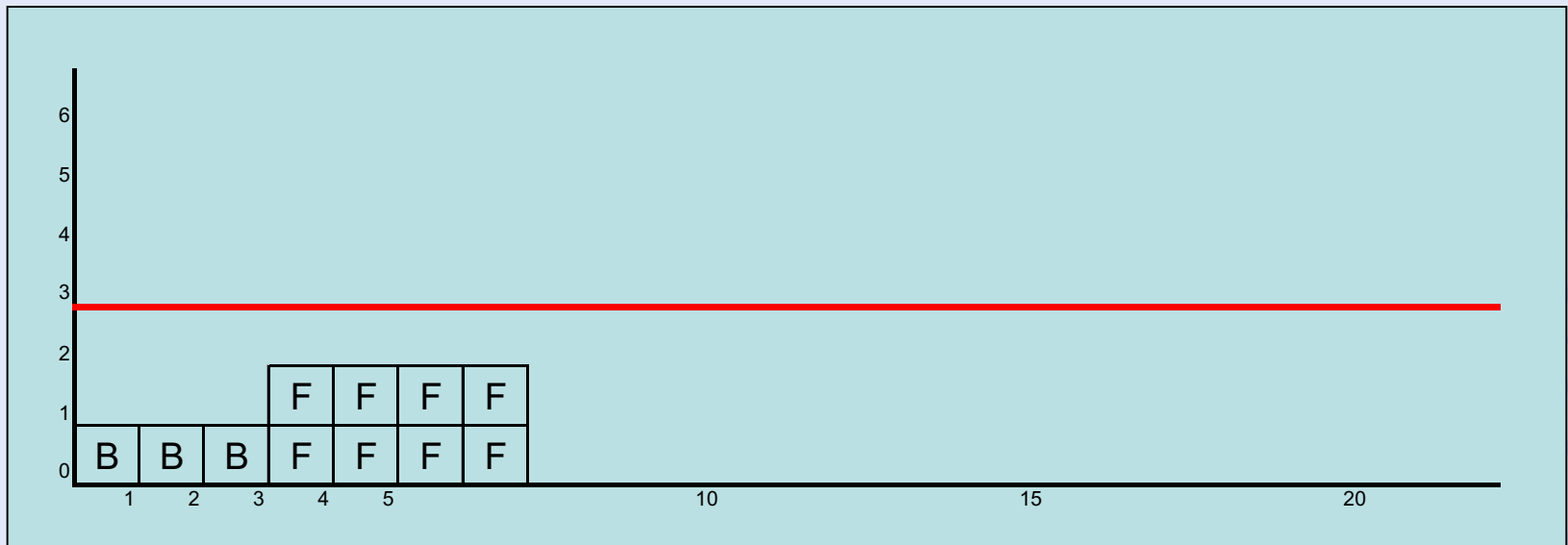
	D	H	B	C	F	A	G	J	E	I
LS	0	6	9	9	12	12	13	14	14	16
ML	0	0	0	9	0	0	10	0	3	9
ES	0	6	0	0	3	0	3	14	2	7

MILORD



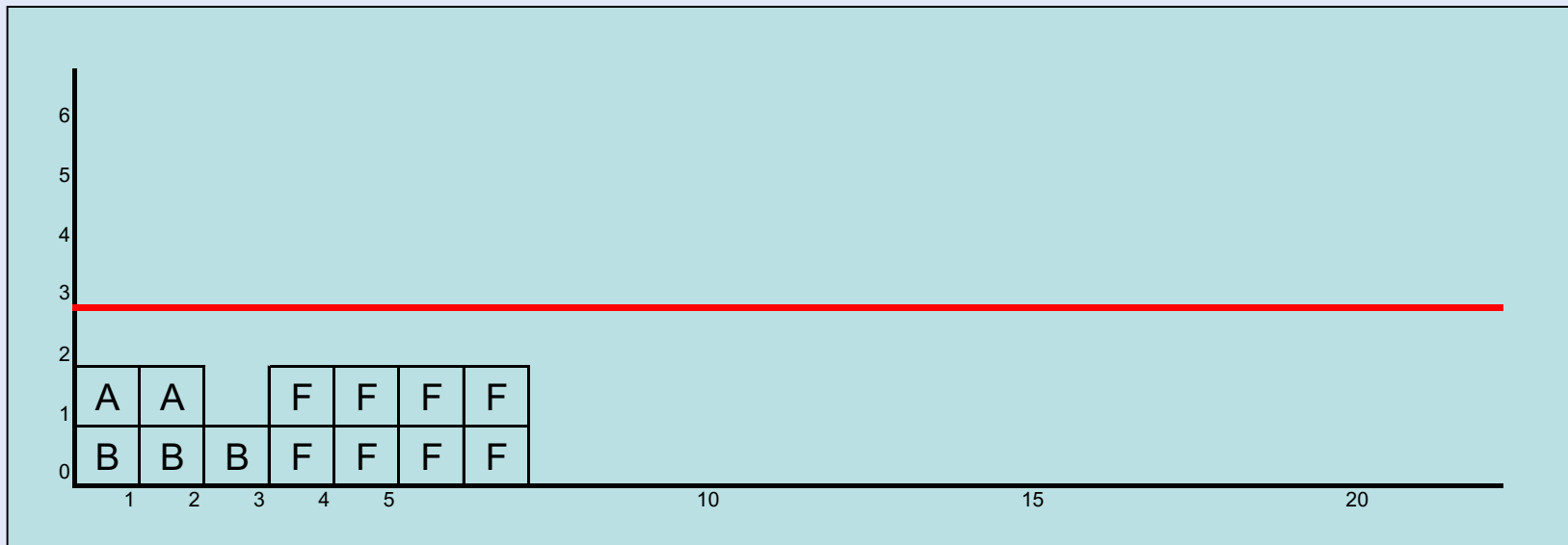
- Placer la tâche F ($ES = 3$).

MILORD



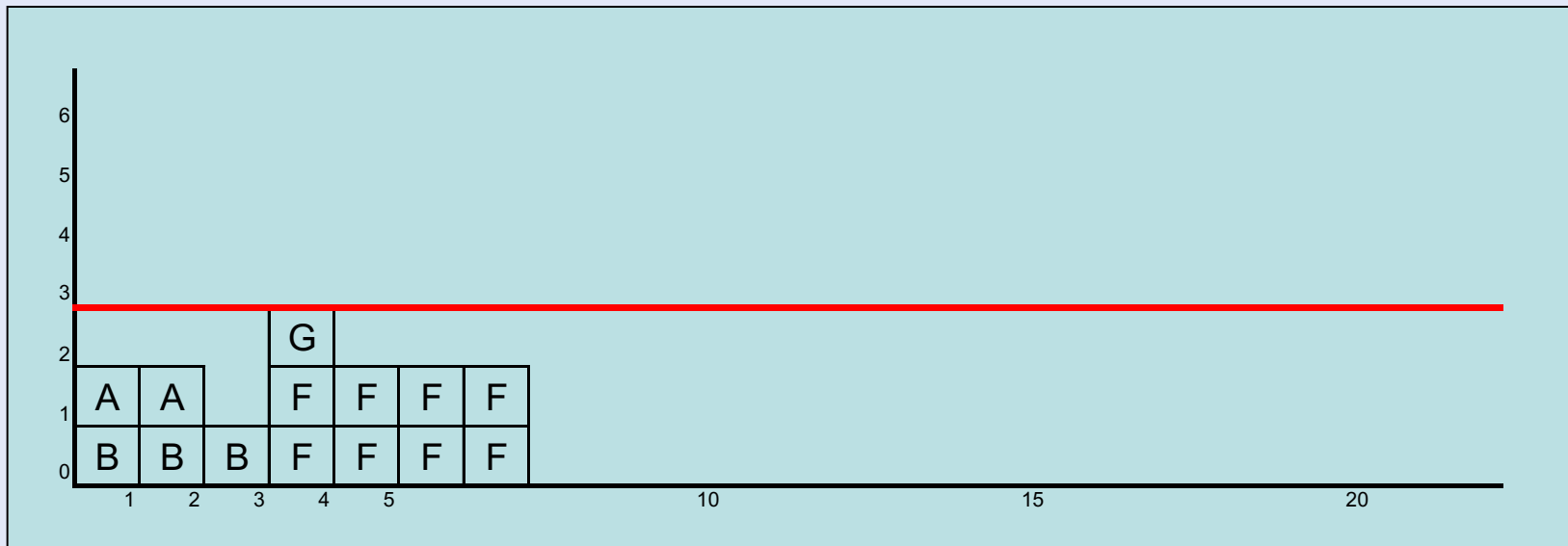
- Placer la tâche A ($ES = 0$).

MILORD



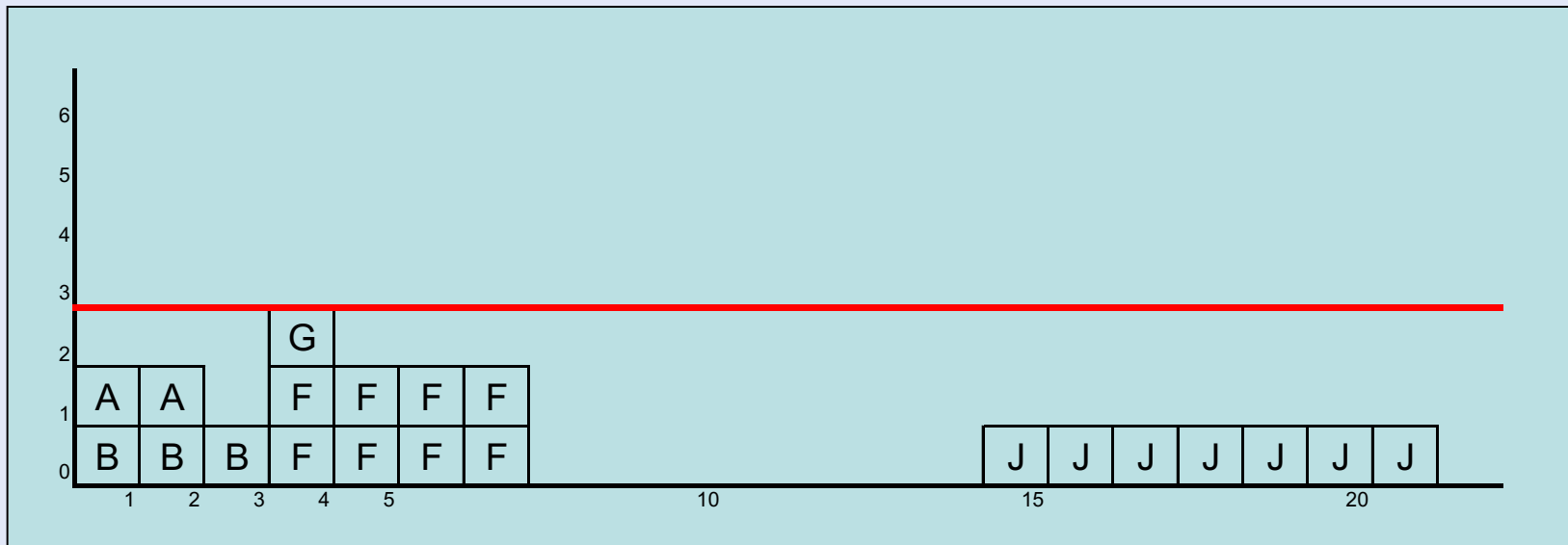
- Placer la tâche G ($ES = 3$).

MILORD



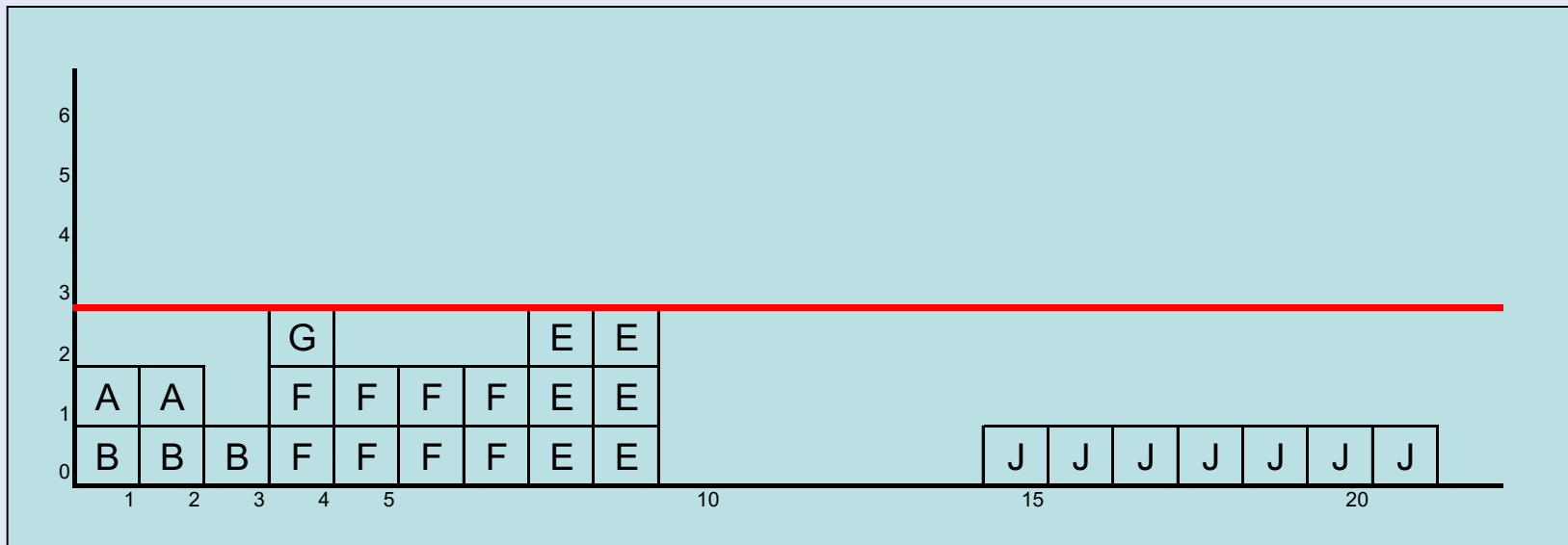
- Placer la tâche J (ES = 14).

MILORD



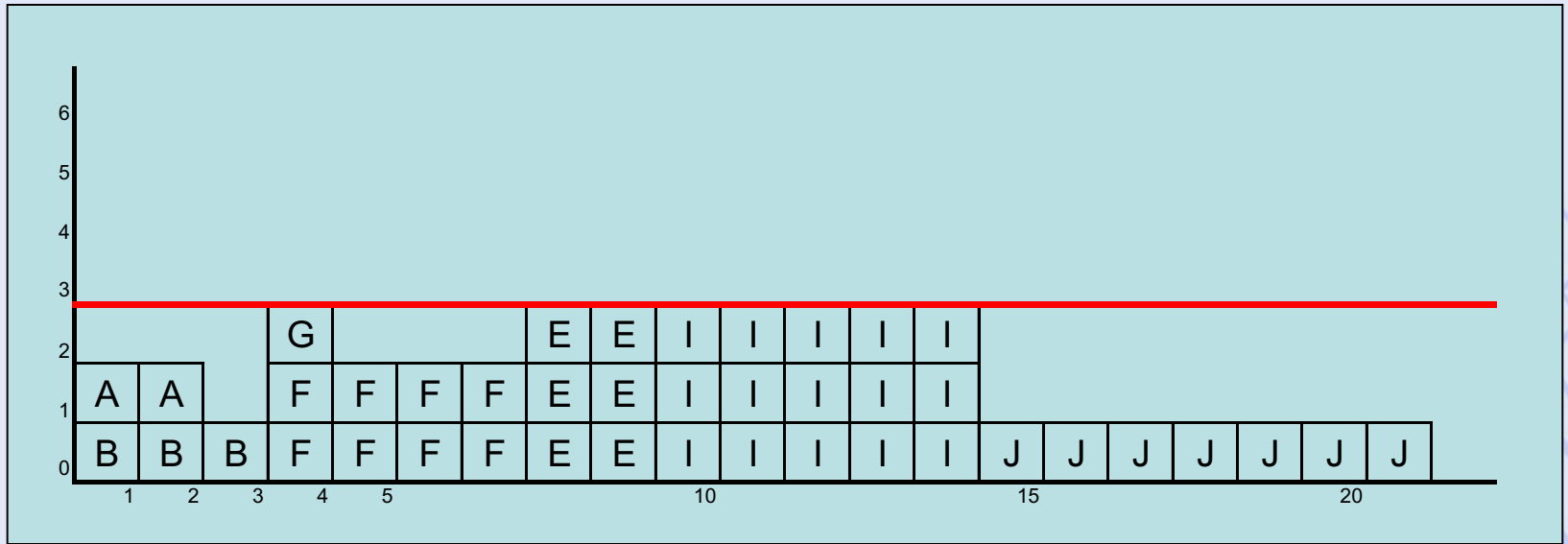
- Placer la tâche E (ES = 2).
- Reculée jusqu'en 7 !

MILORD



- Placer la tâche I (ES = 7).
- Reculée jusqu'en 9 !
- Tout juste...

MILORD



- Fin...

Variantes

- Méthode des potentiels :
 - Autre mise en graphe : sommets = tâches.
- Méthode PERT :
 - Incertitude sur la durée de réalisation des tâches.
- Prise en compte du coût vs durée de réalisation des tâches.