

□

# Recherche Opérationnelle

## Aide à la décision multicritère

Bertrand Mareschal

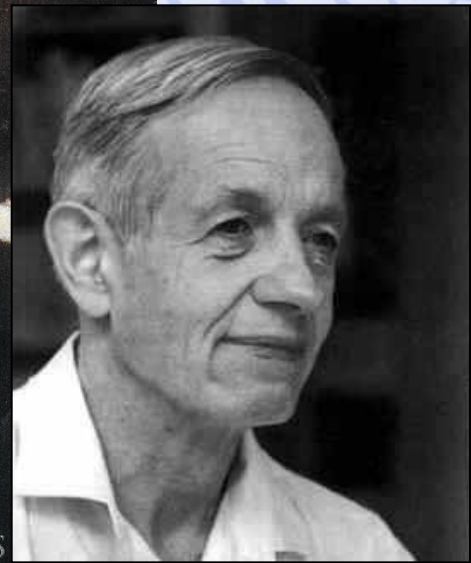
[Bertrand.Mareschal@ulb.be](mailto:Bertrand.Mareschal@ulb.be)

<https://bertrand.mareschal.web.ulb.be/mquant1328.html>



2001...

John Nash  
Nobel  
d'Economie  
1994



# Plan du cours

## 1. Introduction

- Historique, modélisation

## 2. Aide multicritère à la décision

- Choix social
- Méthodes PROMETHEE et GAIA

## 3. Optimisation multiobjectif

# En pratique...

- Organisation du cours :
  - Théorie
  - Travaux pratiques
- Evaluation :
  - Examen écrit :
  - Travail de groupe :
    - Aide à la decision (PROMETHEE et GAIA)

# Travail d'aide à la décision

- Travail de groupe (2-3 étudiant.e.s).
- Elaborer un problème de décision : min. 8 actions, 5 critères et 2 scénarios.
- Modéliser le problème avec PROMETHEE.
- Analyser le problème avec Visual PROMETHEE:
  - Classements PROMETHEE.
  - Analyse GAIA.
  - Analyse de sensibilité:
    - Poids des critères.
    - Différents scénarios.
  - Bonus: catégories, groupes, clusters, ...
- Présentation/défense.
- Rapport écrit à rentrer au plus tard le jour de l'examen.

# Calendrier 2023

- 01 - 28/02 : théorie
- 02 - 07/03 : théorie
- 03 - 14/03 : théorie
- 04 - 21/03 : théorie
- 05 - 22/03 : travaux pratiques
- 06 - 28/03 : théorie
- 07 - 29/03 : travaux pratiques
- 08 - 17/05 : présentations

# 1. Introduction

- Contexte
- Historique
- Prise de décision
- Aide à la décision
- Modélisation
- Principaux outils
- Exemples d'applications

# Contexte

- Augmentation de la taille et de la complexité des organisations.
- Division du travail, spécialisation, décentralisation des responsabilités et de la gestion.
- Nouveaux problèmes liés à la spécialisation :
  - Plus grande autonomie des départements au sein des organisations,
  - Manque de coordination,
  - Objectifs conflictuels,
  - Difficulté d'allouer des ressources limitées aux départements d'une façon globalement optimale.







# Historique

## 2ème guerre mondiale

- Allocation de ressources limitées aux opérations militaires.
- Idée : approche scientifique (UK - USA).
- “Research on Operations” par des équipes multidisciplinaires de scientifiques (Cf. “Blackett’s Circus”, UK).
- Grand succès : amélioration de l’efficacité des opérations militaires complexes
  - déploiement des radars en Angleterre,
  - détermination de la taille des convois,
  - logistique ...

# Déploiement des radars



# Déploiement des radars



**RADAR** puts the finger on our enemies!

Hiding above the clouds there's a plane. Anti-aircraft guns let loose—down crashes the enemy bomber.

How can you hit enemies you can't see—through clouds, darkness and fog? The answer is Radar—radio detecting and ranging equipment.

*How Radar does it*

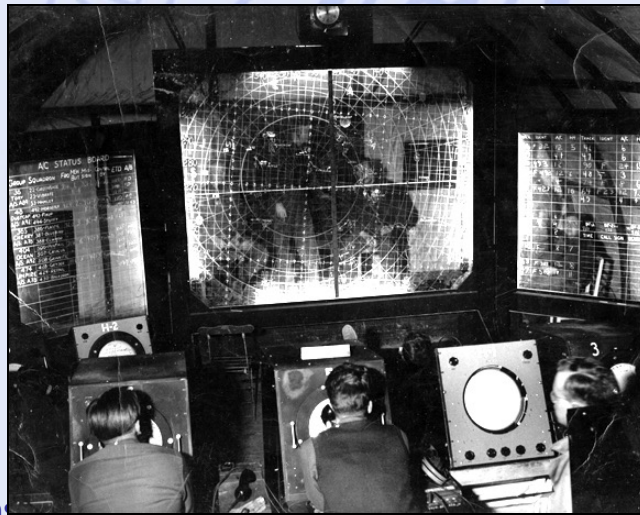
Radar sends out a wave which searches the sky or sea. When this beam hits a plane or ship, it bounces back to the Radar. Traveling with the speed of light, the beam makes this round trip in a few thousandths of a second and tells you... *there he is!*

You keep the Radar focused on him. It tells you his direction, distance, speed, whether he's climbing or descending. Having this information, gunners direct their fire with deadly accuracy.

*Radar is the result of the work of many research groups in this country and abroad. Bell Telephone Laboratories has played an important part in its development. Western Electric today is one of the world's largest manufacturers of Radar.*

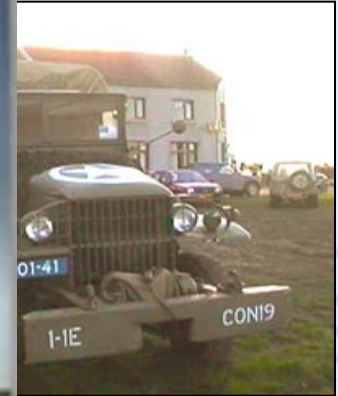
**Western Electric**

IN PEACE... SOURCE OF SUPPLY FOR THE BELL SYSTEM.  
IN WAR... ARSENAL OF COMMUNICATIONS EQUIPMENT.



# Protection des convois





# Historique

## Après-guerre

- Succès des applications militaires.
- Intérêt marqué des entreprises pour la RO.
- Applications civiles, d'abord dans les grandes entreprises industrielles :
  - Ex: industrie pétrolière - programmation linéaire pour la gestion de la production
- Plus tard, résultats utilisés (à moindre coût) par des organisations plus petites.
- Facteur clé : développement de l'informatique.



# Prise de Décision



- Décrire la Réalité,
- Comprendre la Réalité,
- Gérer la Réalité.

## 2 Approches :

- Approche Qualitative,
- Approche Quantitative.

# Aide à la Décision



Modèle quantitatif

- Décisions possibles ?
- Comment les comparer ?
- Préférences, Objectifs ?

# Aide à la Décision



Modèle quantitatif

- Approximation de la réalité !
- Aide à la décision.

# Quelques techniques

- Statistique
- Programmation mathématique (optimisation)
- Aide à la décision de type multicritère (MCDA)
- Simulation
- **PERT/CPM**
- Gestion des stocks et de la production
- Réseaux (transport)
- Fiabilité des équipements

# Plan du cours

## 1. Introduction

- Historique, modélisation

## 2. Aide multicritère à la décision

- Choix social
- Méthodes PROMETHEE et GAIA

## 3. Optimisation multiobjectif

# Un tunnel entre l'Espagne et le Maroc ?



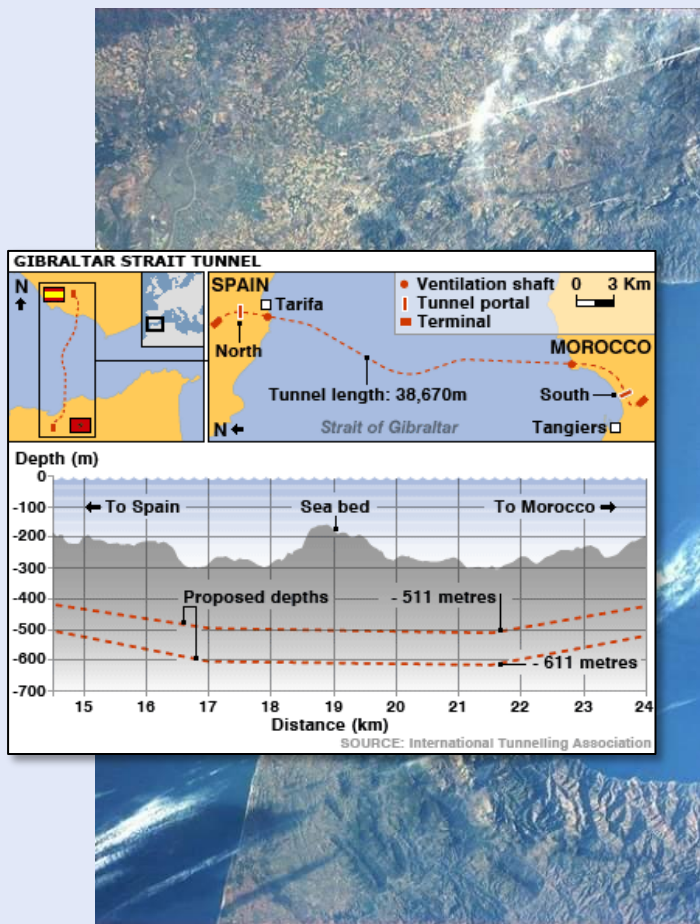
- **Pas-de-Calais :**

- 33,3 km

- **Détroit de Gibraltar :**

- 14,4 km

# Un tunnel entre l'Espagne et le Maroc ?



- D'où (MA) ?
- A où (ES) ?
- Par où ?
  
- Différents tracés possibles.
- Lequel choisir ?

# Un tunnel entre l'Espagne et le Maroc ?



- Meilleur tracé ?
  - Coût
  - Vitesse commerciale
  - Retombées économiques
  - Impacts sociaux (expropriations, bruit, emplois, ...)
  - Impacts environnementaux (paysage, faune, ...)
- Lequel choisir ?



# Un tunnel entre l'Espagne et le Maroc ?



- Un problème multicritère
- Et multi-acteurs :
  - Pouvoirs publics (MA et ES)
  - ONCF
  - Renfe
  - Opérateurs (transport)
  - Industries
  - Populations
  - ONGs et experts
- Un problème difficile !

# Un tunnel entre l'Espagne et le Maroc ?



- Comment résoudre le problème ?
- Recherche d'un compromis.
- Recherche d'un consensus.
- Aide à la décision de type multicritère.

# Quelques Problèmes de Décision et d'Evaluation

- Définir le tracé d'un tunnel, d'une LGV, ...
- Choisir le site d'implantation d'une nouvelle usine, d'un magasin, ...
- Engager du personnel, GRH.
- Acheter du matériel.
- Evaluer des projets (R&D).
- Choisir une stratégie d'investissement.

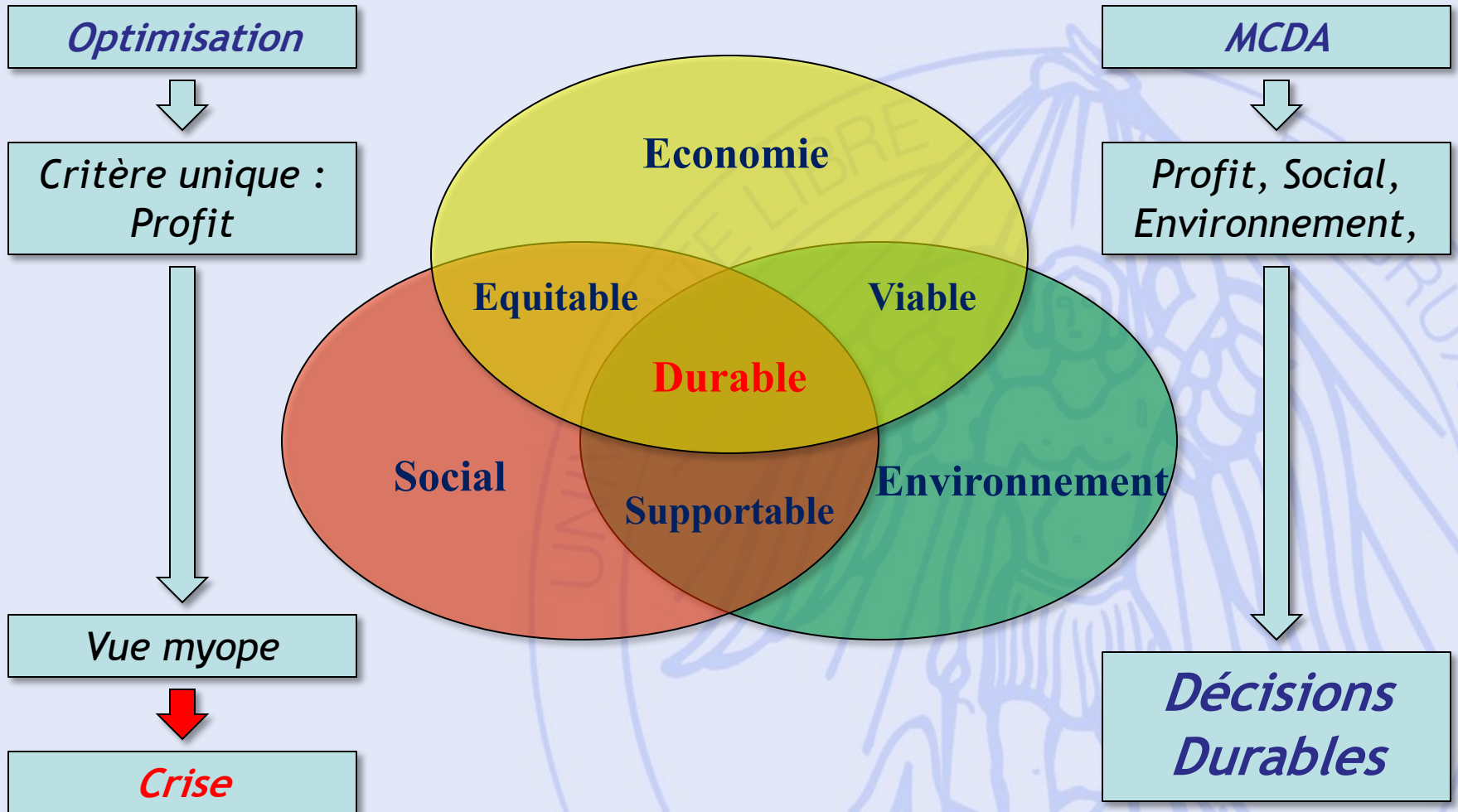
# Modèle Multicritère vs Unicritère

- Modèle unicritère :

$$\text{Optimiser } \{g(a) \mid a \in A\}$$

- Mathématiquement bien posé :
  - Notion de solution optimale,
  - Classement complet des actions.
- Humainement mal posé :
  - Un seul critère ? Peu réaliste.
  - Notion de critère : seuils de perception, ...

# MCDA vs Optimisation



# Modèle

## Multicritère vs Unicritère

- Modèle multicritère (MCDA) :

Optimiser  $\{g_1(a), g_2(a), \dots, g_k(a) \mid a \in A\}$

- Mathématiquement mal posé :
  - Pas de solution optimale,
  - Pas de sens mathématique.
- Humainement bien posé :
  - Plus proche du problème de décision réel,
  - Recherche d'une solution de compromis.

# Tableau Multicritère

- Actions :
  - décisions possibles,
  - items à évaluer.
- Critères :
  - quantitatifs,
  - qualitatifs.

# Tableau Multicritère

Action 1	
Action 2	
Action 3	
Action 4	
Action 5	
...	



# Tableau Multicritère

	Crit. 1 (unité)	Crit. 2 (unité)	Crit. 3 (unité)	Crit. 4 (unité)	...
Action 1					
Action 2					
Action 3					
Action 4					
Action 5					
...					

# Tableau Multicritère

	Crit. 1 (/20)	Crit. 2 (cote)	Crit. 3 (appréc.)	Crit. 4 (O/N)	...
Action 1	18	135	B	Oui	...
Action 2	9	147	M	Oui	...
Action 3	15	129	TB	Non	...
Action 4	12	146	TM	?	...
Action 5	7	121	B	Oui	...
...	...	...	...	...	...

# Localisation d'une Usine

	Investissement (MEUR)	Coûts (kEUR)	Environn. (estimation)	...
Site 1	18	135	B	...
Site 2	9	147	M	...
Site 3	15	129	TB	...
Site 4	12	146	TM	...
Site 5	7	121	B	...
...	...	...	...	...

# Possibilité d'Achats

	Prix (kEUR)	Fiabilité (jours)	Maintenance (estimation)	...
Produit A	18	135	B	...
Produit B	9	147	M	...
Produit C	15	129	TB	...
Produit D	12	146	TM	...
Produit E	7	121	B	...
...	...	...	...	...

# Un Exemple

## Achat d'une automobile

### Objectifs :

- Economie à l'achat (prix),
- Economie à l'usage (consommation),
- Performances (puissance),
- Confort,
- Habitabilité.

# Tableau Multicritère

Marque	Prix	Puissance	Consomm.	Habitabilité	Confort
Moyenne A	26000	75	8,0	3	3
Sport	29000	110	9,0	1	2
Moyenne B	25500	85	7,0	4	3
Luxe 1	38000	90	8,5	4	5
Economic	15000	50	7,5	2	1
Luxe 2	35000	85	9,0	5	4

- Quel est le meilleur achat ?

1: *TM*  
2: *M*  
3: *Mo*  
4: *B*  
5: *TB*

# Tableau Multicritère

Marque	Prix	Puissance	Consomm.	Habitabilité	Confort
Moyenne A	26000	75	8,0	3	3
Sport	29000	<b>110</b>	9,0	1	2
Moyenne B	25500	85	<b>7,0</b>	4	3
Luxe 1	38000	90	8,5	4	<b>5</b>
Economic	<b>15000</b>	50	7,5	2	1
Luxe 2	35000	85	9,0	<b>5</b>	4

- Quel est le meilleur achat ?

# Tableau Multicritère

Marque	Prix	Puissance	Consomm.	Habitabilité	Confort
Moyenne A	26000	75	8,0	3	3
Sport	29000	<b>110</b>	9,0	1	2
Moyenne B	25500	85	<b>7,0</b>	4	3
Luxe 1	38000	90	8,5	4	<b>5</b>
Economic	<b>15000</b>	50	7,5	2	1
Luxe 2	35000	85	9,0	<b>5</b>	4

- Quel est le meilleur achat ?
- Quel est le meilleur compromis ?



# Tableau Multicritère

Marque	Prix	Puissance	Consomm.	Habitabilité	Confort
Moyenne A	26000	75	8,0	3	3
Sport	29000	<b>110</b>	9,0	1	2
Moyenne B	25500	85	<b>7,0</b>	4	3
Luxe 1	38000	90	8,5	4	<b>5</b>
Economic	<b>15000</b>	50	7,5	2	1
Luxe 2	35000	85	9,0	<b>5</b>	4

- Quel est le meilleur achat ?
- Quel est le meilleur compromis ?
- Quelles sont les priorités de l'acheteur ?



# Théorie du choix social

- Problème :
  - Un groupe de personnes doivent choisir un candidat parmi plusieurs (élection).
  - Chaque personne (électeur) classe les candidats par ordre de préférence.
  - Quel candidat doit être élu ?
- Quelle est la « meilleure » procédure de vote ?
- Analogie avec les modèles multicritères :
  - Candidats  $\leftrightarrow$  actions,
  - Electeurs  $\leftrightarrow$  critères.

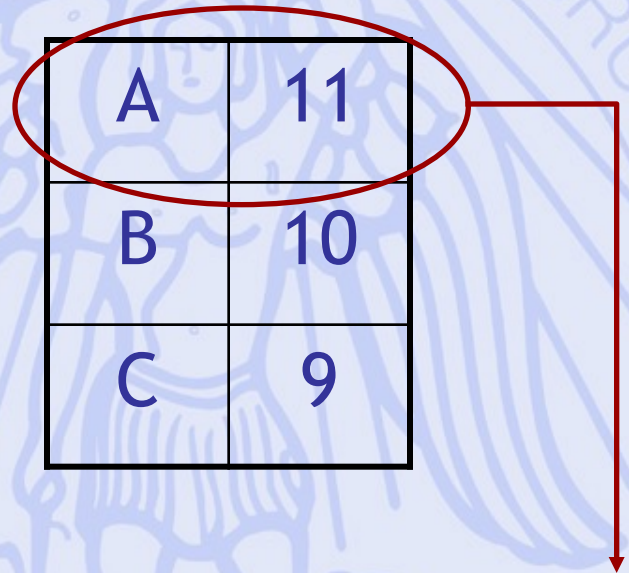
# 5 procédures... ... parmi d'autres...

1. Majorité relative.
2. Condorcet.
3. Scrutin à 2 tours (présidentielle).
4. Borda.
5. Éliminations successives.

# Procédure 1 : Majorité relative

3 candidats: Albert, Bruno, Claire  
 30 votants:

11 votants	10 votants	9 votants
A	B	C
B	C	B
C	A	A



**Albert est élu**

# Procédure 1 : Majorité relative

3 candidats: Albert, Bruno, Claire

30 votants:

11 votants	10 votants	9 votants
A	B	C
B	C	B
C	A	A

A	11
B	10
C	9

Problème : B et C préférés à A  
par une majorité de votants !

**Albert est élu**

# Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat Marquis de Condorcet 1743 - 1794



# Procédure 2 : Condorcet

3 candidats: Albert, Bruno, Claire  
 30 votants:

11 votants	10 votants	9 votants
A	B	C
B	C	B
C	A	A

B meilleur que A	19 votes
B meilleur que C	21 votes
C meilleur que A	19 votes

**Bruno est élu**

# Procédure 2 : Paradoxe de Condorcet

3 candidats: Albert, Bruno, Claire  
9 votants:

4 votants	3 votants	2 votants
A	B	C
B	C	A
C	A	B

A meilleur que B	6 votes
B meilleur que C	7 votes
C meilleur que A	5 votes



**pas d'élus !**



# Procédure 3 : Scrutin à 2 tours (élection présidentielle française)

4 candidats: Albert, Bruno, Claire, Diane

63 votants:

22 votants	21 votants	20 votants
B	C	D
A	A	A
C	D	C
D	B	B

**1<sup>er</sup> tour:** B et C

**2<sup>ème</sup> tour:** C bat B (41 contre 22)

**Claire est élue**

# Procédure 3 : Scrutin à 2 tours

## (élection présidentielle française)

4 candidats: Albert, Bruno, Claire, Diane

63 votants:

22 votants	21 votants	20 votants
B	C	D
A	A	A
C	D	C
D	B	B

Claire est élue !!!

...alors que

A meilleur que C	42 votes
A meilleur que B	41 votes
A meilleur que D	43 votes

# Procédure 3 : scrutin à 2 tours (élection présidentielle française)

3 candidats: Albert, Bruno, Claire

17 votants:

5 votants	6 votants	4 votants	2 votants
C	A	B	B
A	B	C	A
B	C	A	C

<b>1<sup>er</sup> tour:</b>	A et B
-----------------------------	--------

<b>2<sup>ème</sup> tour:</b>	A bat B (11 contre 6)
------------------------------	-----------------------

**Albert est élu**

# Procédure 3 : scrutin à 2 tours

## (élection présidentielle française)

3 candidats: Albert, Bruno, Claire

17 votants:

5 votants	6 votants	4 votants	2 votants
C	A	B	<del>AB</del>
A	B	C	<del>BA</del>
B	C	A	C

**Albert était élu**

**1<sup>er</sup> tour:** A et C

**2<sup>ème</sup> tour:** C bat A (9 contre 8)

**Claire est élue !**

**Problème : non-monotonicité !**

# Jean Charles de Borda

## 1733 - 1799



# Procédure 4 : Borda

3 candidats: Albert, Bruno, Claire  
81 votants:

<b>30</b> votants	<b>29</b> votants	<b>10</b> votants	<b>10</b> votants	<b>1</b> votant	<b>1</b> votant
A	C	C	B	A	B
C	A	B	A	B	C
B	B	A	C	C	A

Points	Score	
2	A	<b>101</b>
1	B	<b>33</b>
0	C	<b>109</b>

$31 \times 2 + 39 \times 1$

$11 \times 2 + 11 \times 1$

$39 \times 2 + 31 \times 1$

**Claire est élue !**

# Procédure 4 : Borda

3 candidats: Albert, Bruno, Claire

81 votants:

30 votants	29 votants	10 votants	10 votants	1 votant	1 votant
A	C	C	B	A	B
C	A	B	A	B	C
B	B	A	C	C	A

Points	Scores	
2	A	<b>101</b>
1	B	<b>33</b>
0	C	<b>109</b>

**A meilleur que C : 41 sur 81**

# Procédure 4 : Borda

4 candidats: Albert, Bruno, Claire, Diane

7 votants:

3 votants	2 votants	2 votants	Points
C	B	A	3
B	A	D	2
A	D	C	1
D	C	B	0

Scores		Classement
A	13	A
B	12	B
C	11	C
D	6	D



# Procédure 4 : Borda

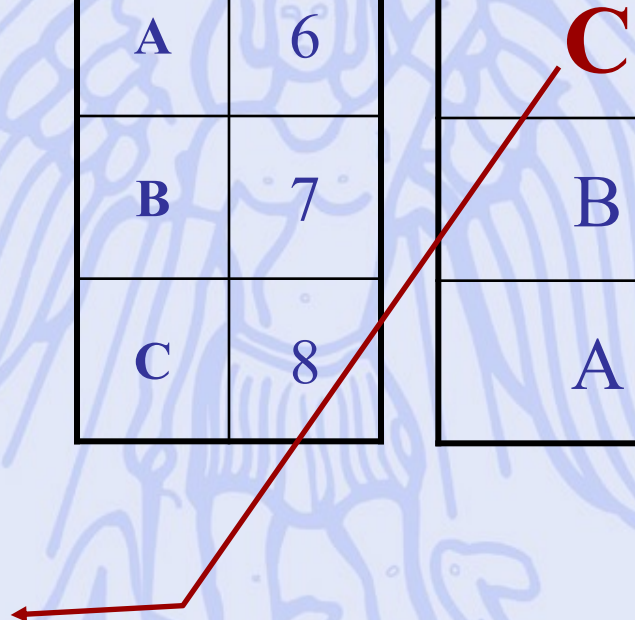
4 candidats: Albert, Bruno, Claire, ~~Diane~~

7 votants:

<b>3</b> votants	<b>2</b> votants	<b>2</b> votants	<b>Points</b>	
C	B	A		2
B	A	C		1
A	C	B		0

Scores		Classement
A	6	<b>C</b>
B	7	B
C	8	A

**Claire est élue**



# Borda (manipulation)

3 candidats: Albert, Bruno, Claire

34 votants:

*Les partisans de Bruno  
suscitent la candidature du  
candidat  $x$  (« candidat  
bidon »)*

Scores		Classement
A	46	<b>A</b>
B	36	B
C	20	C

**Albert est élu**

# Borda (manipulation)

4 candidats: Albert, Bruno, Claire, x

34 votants:

12 votants	12 votants	10 votants	Points
A	B	C	3
B	x	A	2
C	A	B	1
x	C	x	0

Scores		Classement
A	68	<b>B</b>
B	70	A
C	42	C
x	24	x

**Bruno est élu!**

# Borda (manipulation)

4 candidats: Albert, Bruno, Claire, x

34 votants:

12 votants	12 votants	10 votants	Points
A	B	C	3
x	x	x	2
B	A	A	1
C	C	B	0

Scores		Classement
A	58	<b>x</b>
B	48	A
C	30	B
x	68	C

**Le candidat « bidon » est élu!**

# Procédure 5 :

## Eliminations successives

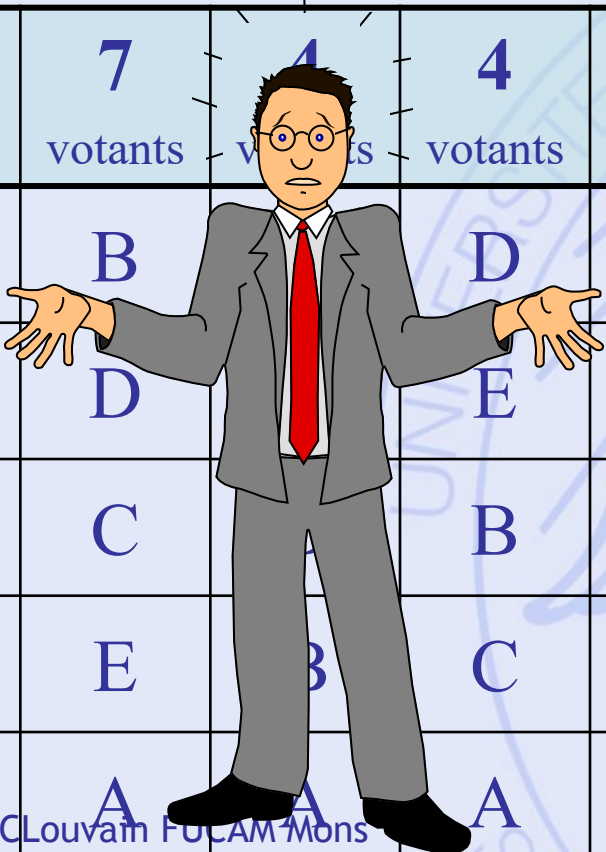
- Procédure par tours.
- Principe :  
Eliminer à chaque tour le moins bon candidat, jusqu'à ce qu'il n'en reste plus qu'un.

# En conclusion ?

5 candidats: Albert, Bruno, Claire, Diane, Eric

25 votants:

8 votants	7 votants	4 votants	4 votants	2 votants
A	B	D	C	
C	D	E	E	
D	C	B	D	
B	E	C	B	
E	A	A	A	A



Majorité relative:

↳ **Albert est élu**

Procédure française:

↳ **Bruno est élu**

Procédure de Condorcet:

↳ **Claire est élue**

Procédure de Borda:

↳ **Diane est élue**

Eliminations successives:

↳ **Eric est élu**

# Kenneth Arrow

## (Nobel d'économie, 1972)

- **Théorème d'impossibilité (1952) :**  
Avec au moins 2 votants et 3 candidats, il est impossible de construire une procédure de vote satisfaisant simultanément les 5 propriétés suivantes :
  - Non-dictature.
  - Universalité.
  - Indépendance vis-à-vis des tiers.
  - Monotonicité.
  - Non-imposition.

# Problématiques

	$g_1$	$g_2$	$g_3$	...
$a$	$g_1(a)$	$g_2(a)$	$g_3(a)$	...
$b$	$g_1(b)$	$g_2(b)$	$g_3(b)$	...
$c$	...			
...	...			

## Evaluations

- $n$  actions
- $k$  critères

- $\alpha$  - choix : déterminer un sous-ensemble d'actions (les « meilleures »).
- $\beta$  - tri : trier les actions dans des catégories pré-déterminées.
- $\gamma$  - classement : de la meilleure à la moins bonne action.
- $\delta$  - description : décrire les actions et leurs conséquences.



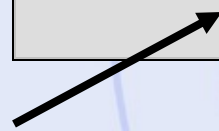
# Une Approche Courante : La Somme Pondérée

Critères

Actions  
ou  
Décisions

	$g_1$	$g_2$	$g_3$	...
$a$	$g_1(a)$	$g_2(a)$	$g_3(a)$	...
$b$	$g_1(b)$	$g_2(b)$	$g_3(b)$	...
$c$	...			
...	...			
	$W_1$	$W_2$	$W_3$	...

Poids des  
critères



# Une Approche Courante : La Somme Pondérée

- Valeur globale de  $a$  :

$$V(a) = w_1 g_1(a) + w_2 g_2(a) + \dots$$

- $a$  est meilleure que  $b$  si :

$$V(a) > V(b)$$

(en supposant que tous les critères soient à maximiser)

# Somme Pondérée :

## Exemple 1

	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$	$g_5$
$a$	100	100	100	100	55
$b$	85	85	85	85	100
	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5

- $V(a) = 91$        $V(b) = 88$
- Compensation totale des points faibles par les points forts.

# Somme Pondérée :

## Exemple 2

	$g_1$	$g_2$
$a$	100	0
$b$	0	100
$c$	50	50
$d$	50	50
	$1/2$	$1/2$

- $V(a) = V(b) = V(c) = V(d) = 50$
- Elimination des conflits.

# Somme Pondérée :

## Exemple 3

*"Le bénéfice est environ 2 fois plus important que le gain de temps;  
0.7 pour le bénéfice et 0.3 pour le gain de temps.*

	$g_1$ (BF)	$g_2$ (min)
$a$	60	60
$b$	48	70
	0.7	0.3

$$V(a) = 60$$

$$V(b) = 54.6$$

$a$  est première.

# Somme Pondérée :

## Exemple 3

*"Le bénéfice est environ 2 fois plus important que le gain de temps;  
0.7 pour le bénéfice et 0.3 pour le gain de temps.*

	$g_1$ (FF)	$g_2$ (min)
$a$	10	60
$b$	8	70
	0.7	0.3

$$V(a) = 25$$

$$V(b) = 26.6$$

$b$  est première.

# Somme Pondérée :

## Exemple 3

	$g_1$ (BF)	$g_2$ (min)
$a$	60	60
$b$	48	70
	0.7	0.3

$$V(a) = 60$$

$$V(b) = 54.6$$

$a$  est première.

	$g_1$ (FF)	$g_2$ (min)
$a$	10	60
$b$	8	70
	0.7	0.3

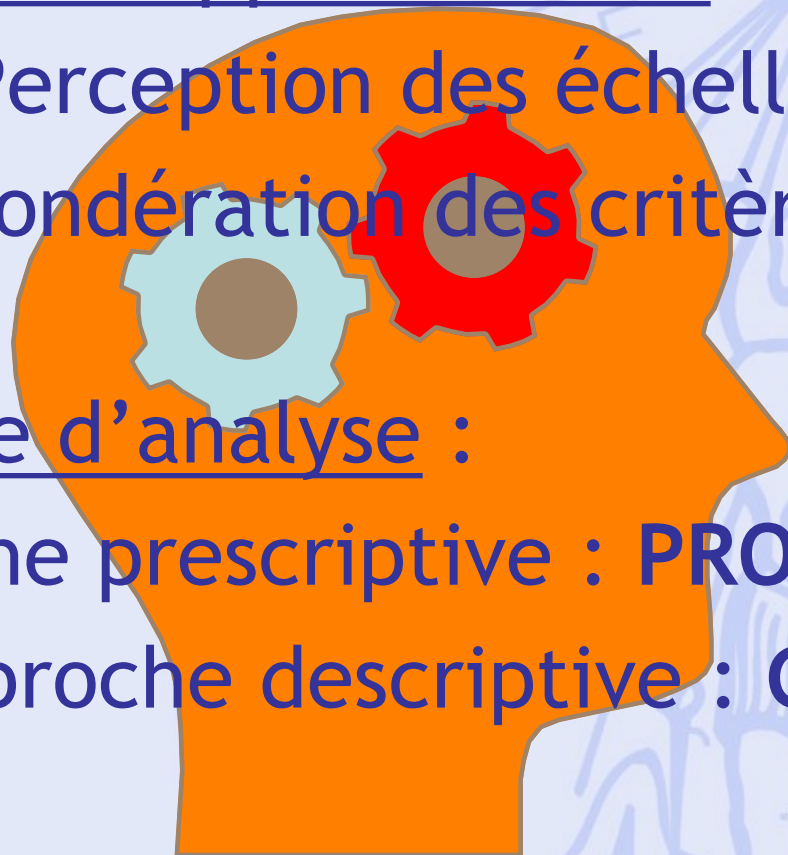
$$V(a) = 25$$

$$V(b) = 26.6$$

$b$  est première.

# Méthodes d'Aide à la Décision

- Information supplémentaire :  
Perception des échelles  
Pondération des critères
- Procédure d'analyse :  
Approche prescriptive : **PROMETHEE**  
Approche descriptive : **GAIA**

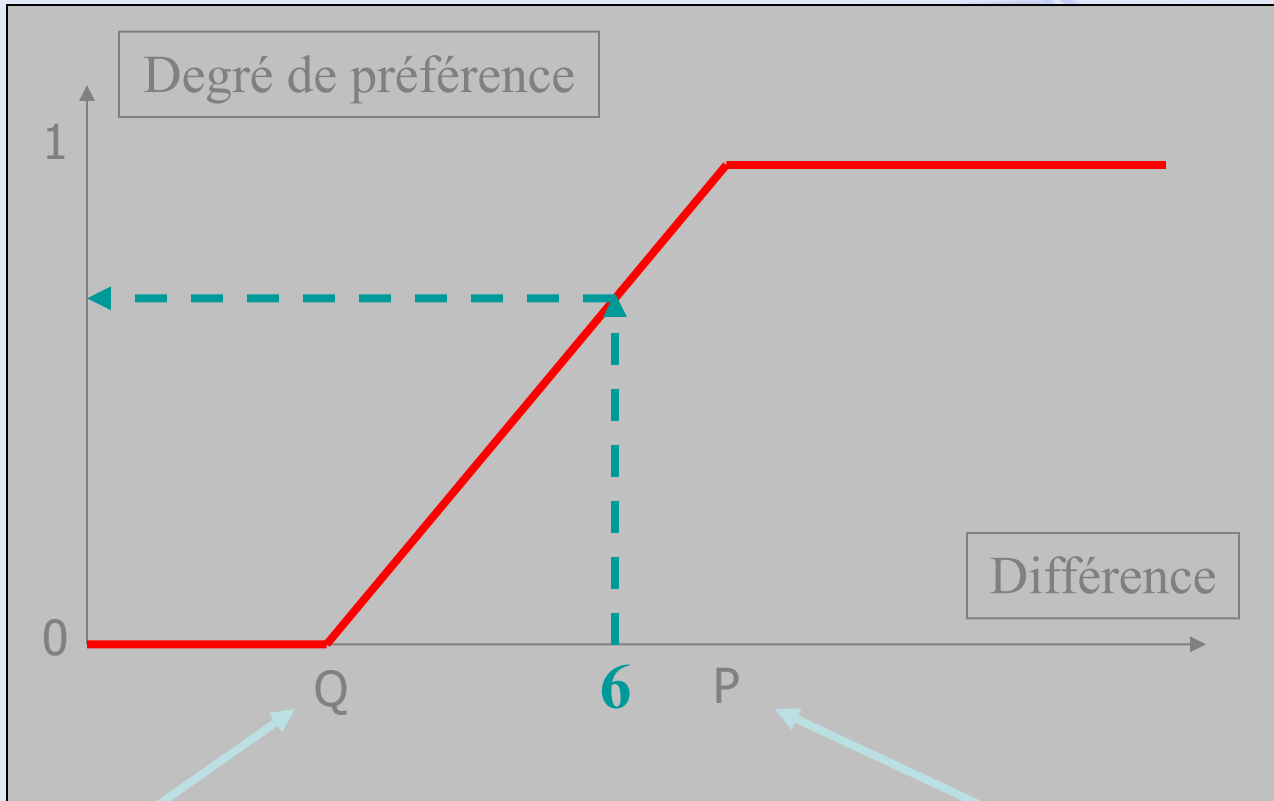




# Comparaison de 2 Actions

	Crit. 1 (/20)	Crit. 2 (cote)	Crit. 3 (appréc.)	Crit. 4 (O/N)	...
Action 1	18	135	B	Oui	...
Action 2	9	147	Différence = 6		...
Action 3	15	129	TB	Non	...
Action 4	12	146	TM	?	...
Action 5	7	121	B	Oui	...
...	...	...	...	...	...

# Fonctions de Préférence



Seuil d'indifférence

Linéaire

Seuil de préférence

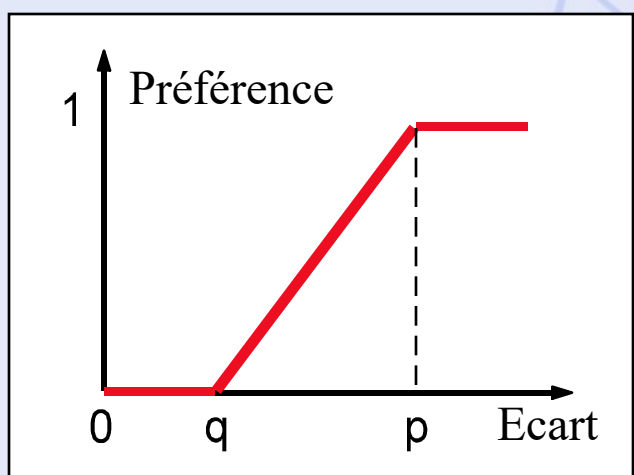
# PROMETHEE

	<b>Economic</b>		<b>Luxe 1</b>	
<b><u>-230000</u></b>	<b>250000</b>	<i>Prix</i>	480000	
	50	<i>Puissance</i>	<b>90</b>	<b><u>+40</u></b>
<b><u>-1,0</u></b>	<b>7,5</b>	<i>Consomm.</i>	8,5	
	2	<i>Habitabilité</i>	<b>4</b>	<b><u>+2</u></b>
	1	<i>Confort</i>	<b>5</b>	<b><u>+4</u></b>



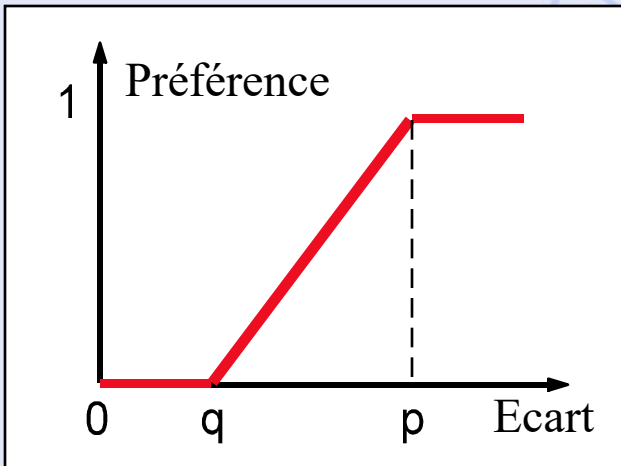
# PROMETHEE

		Economic		Luxe 1		
1,0	<u>-230000</u>	250000	Prix	480000		
		50	Puissance	90	<u>+40</u>	1,0
0,5	<u>-1,0</u>	7,5	Consomm.	8,5		
		2	Habitabilité	4	<u>+2</u>	0,5
		1	Confort	5	<u>+4</u>	1,0



# PROMETHEE

Préf (Eco.,Lux.)		Economic		Luxe 1	Préf (Lux.,Eco.)	
1,0	<u>-230000</u>	250000	Prix	480000		0,0
0,0		50	Puissance	90	<u>+40</u>	1,0
0,5	<u>-1,0</u>	7,5	Consomm.	8,5		0,0
0,0		2	Habitabilité	4	<u>+2</u>	0,5
0,0		1	Confort	5	<u>+4</u>	1,0

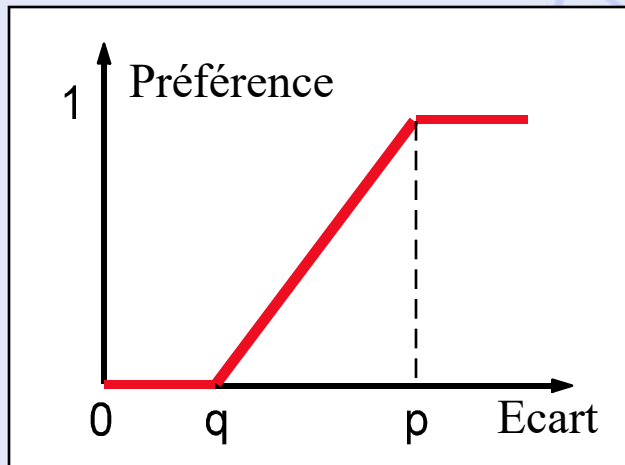


# PROMETHEE

Préf (Eco.,Lux.)

Préf (Lux.,Eco.)

		Economic		Luxe 1			Poids
1,0	<u>-230000</u>	250000	Prix	480000		0,0	1
0,0		50	Puissance	90	<u>+40</u>	1,0	1
0,5	<u>-1,0</u>	7,5	Consomm.	8,5		0,0	1
0,0		2	Habitabilité	4	<u>+2</u>	0,5	1
0,0		1	Confort	5	<u>+4</u>	1,0	1



□  $\text{Préf (Eco.,Lux.)} = 0,3$   
 $= (1 + 0 + 0,5 + 0 + 0) / 5$

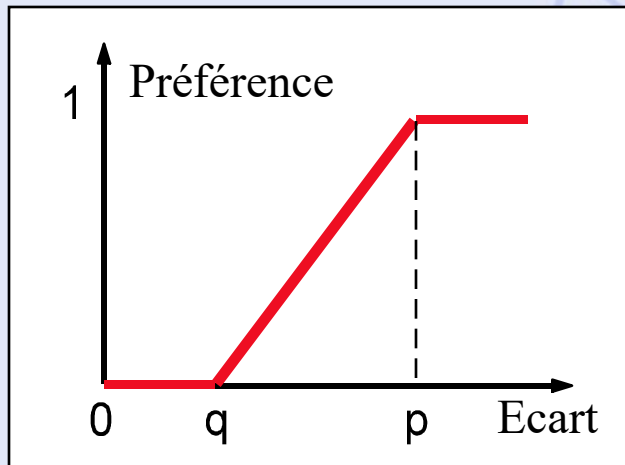
□  $\text{Préf (Lux.,Eco.)} = 0,5$   
 $= (0 + 1 + 0 + 0,5 + 1) / 5$

# PROMETHEE

Préf (Eco.,Lux.)

Préf (Lux.,Eco.)

		Economic		Luxe 1			Poids
1,0	<u>-230000</u>	250000	Prix	480000		0,0	2
0,0		50	Puissance	90	<u>+40</u>	1,0	1
0,5	<u>-1,0</u>	7,5	Consomm.	8,5		0,0	2
0,0		2	Habitabilité	4	<u>+2</u>	0,5	1
0,0		1	Confort	5	<u>+4</u>	1,0	1



□  $\text{Préf (Eco.,Lux.)} = 0,43$

$= (2 \times 1 + 0 + 2 \times 0,5 + 0 + 0) / 7$

□  $\text{Préf (Lux.,Eco.)} = 0,36$

$= (0 + 1 + 0 + 0,5 + 1) / 7$

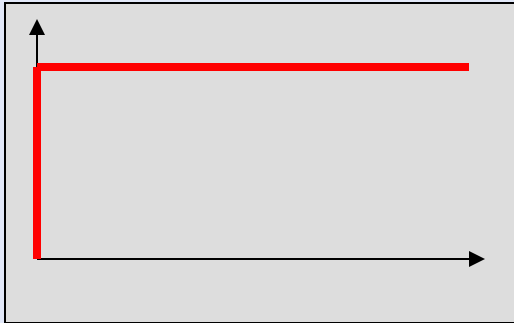
# Comparaisons par Paires

- Pour chaque critère  $g_j$  :
  - Fonction de préférence  $P_j$
  - Poids  $w_j$
- Degré de préférence multicritère de  $a$  sur  $b$  :

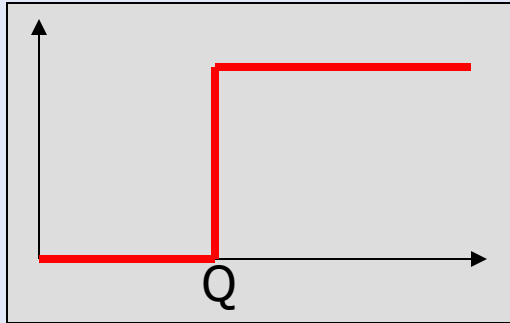
$$\pi(a, b) = \sum_{j=1}^k w_j P_j(a, b)$$



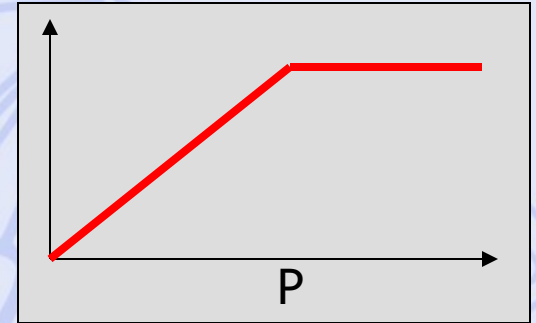
# Fonctions de Préférence



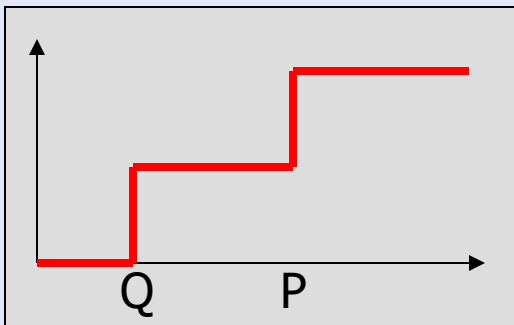
Critère usuel



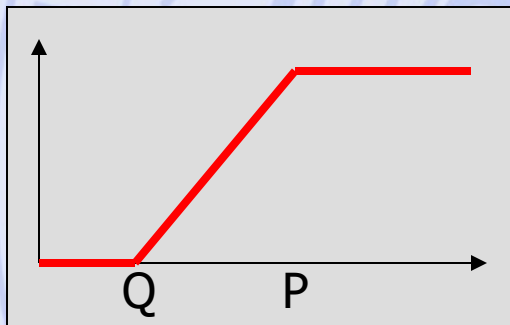
Critère en « U »



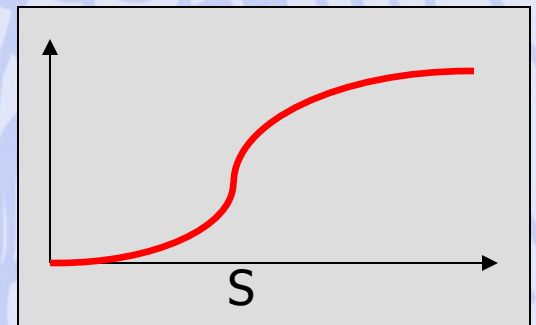
Critère en « V »



Critère à palier



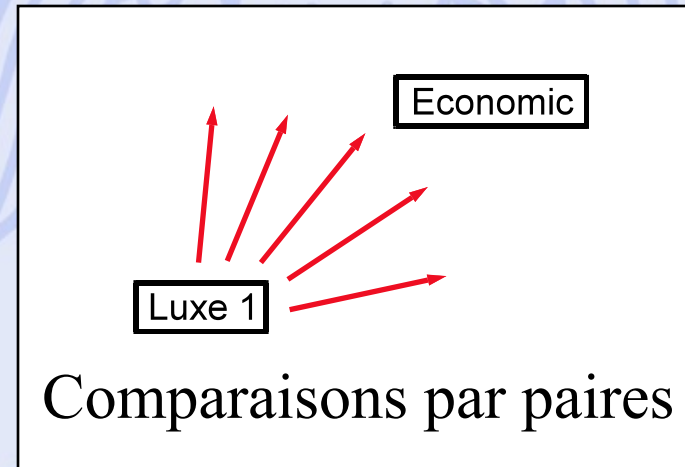
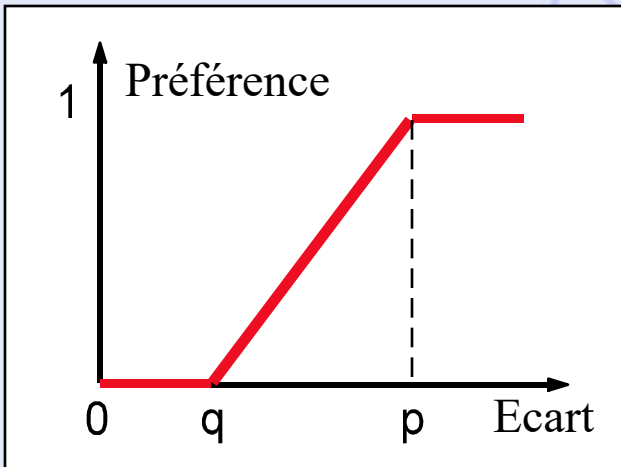
Critère linéaire



Critère Gaussien

# PROMETHEE

Préf (Eco.,Lux.)		Economic		Luxe 1	Préf (Lux.,Eco.)	
1,0	<u>-230000</u>	250000	Prix	480000		0,0
0,0		50	Puissance	90	<u>+40</u>	1,0
0,5	<u>-1,0</u>	7,5	Consomm.	8,5		0,0
0,0		2	Habitabilité	4	<u>+2</u>	0,5
0,0		1	Confort	5	<u>+4</u>	1,0



# Matrice des $\pi(a,b)$

$\pi(a,b)$	<i>Moy.A</i>	<i>Sport</i>	<i>Moy.B</i>	<i>Lux.1</i>	<i>Econ.</i>	<i>Lux.2</i>	$\phi^+(a)$
<i>Moy.A</i>	0,00						
<i>Sport</i>		0,00					
<i>Moy.B</i>			0,00				
<i>Lux.1</i>				0,00	0,50		
<i>Econ.</i>				0,30	0,00		
<i>Lux.2</i>						0,00	
$\phi^-(a)$							
$\phi(a)$							

# Matrice des $\pi(a,b)$

$\pi(a,b)$	<i>Moy.A</i>	<i>Sport</i>	<i>Moy.B</i>	<i>Lux.1</i>	<i>Econ.</i>	<i>Lux.2</i>	$\phi^+(a)$
<i>Moy.A</i>	0,00	0,34	0,00	0,21	0,26	0,22	
<i>Sport</i>	0,20	0,00	0,16	0,24	0,30	0,24	
<i>Moy.B</i>	0,15	0,55	0,00	0,32	0,45	0,33	
<i>Lux.1</i>	0,18	0,45	0,10	0,00	0,50	0,15	
<i>Econ.</i>	0,20	0,34	0,14	0,30	0,00	0,35	
<i>Lux.2</i>	0,24	0,30	0,10	0,04	0,60	0,00	
$\phi^-(a)$							
$\phi(a)$							

# Calcul de $\phi^+(a)$

$\pi(a,b)$	<i>Moy.A</i>	<i>Sport</i>	<i>Moy.B</i>	<i>Lux.1</i>	<i>Econ.</i>	<i>Lux.2</i>	$\phi^+(a)$
<i>Moy.A</i>	0,00	0,34	0,00	0,21	0,26	0,22	0,21
<i>Sport</i>	0,20	0,00	0,16	0,24	0,30	0,24	0,23
<i>Moy.B</i>	0,15	0,55	0,00	0,32	0,45	0,33	0,36
<i>Lux.1</i>	0,18	0,45	0,10	0,00	0,50	0,15	0,28
<i>Econ.</i>	0,20	0,34	0,14	0,30	0,00	0,35	0,27
<i>Lux.2</i>	0,24	0,30	0,10	0,04	0,60	0,00	0,26
$\phi^-(a)$							
$\phi(a)$							

# Calcul de $\phi^+(a)$

$\pi(a,b)$	<i>Moy.A</i>	<i>Sport</i>	<i>Moy.B</i>	<i>Lux.1</i>	<i>Econ.</i>	<i>Lux.2</i>	$\phi^+(a)$
<i>Moy.A</i>	0,00	0,34	0,00	0,21	0,26	0,22	0,21
<i>Sport</i>	0,20	0,00	0,16	0,24	0,30	0,24	0,23
<i>Moy.B</i>	0,15	0,55	0,00	0,32	0,45	0,33	0,36
<i>Lux.1</i>	0,18	0,45	0,10	0,00	0,50	0,15	0,28
<i>Econ.</i>	0,20	0,34	0,14	0,30	0,00	0,35	0,27
<i>Lux.2</i>	0,24	0,30	0,10	0,04	0,60	0,00	0,26
$\phi^-(a)$							
$\phi(a)$							

# Calcul de $\phi^-(a)$

$\pi(a,b)$	<i>Moy.A</i>	<i>Sport</i>	<i>Moy.B</i>	<i>Lux.1</i>	<i>Econ.</i>	<i>Lux.2</i>	$\phi^+(a)$
<i>Moy.A</i>	0,00	0,34	0,00	0,21	0,26	0,22	0,21
<i>Sport</i>	0,20	0,00	0,16	0,24	0,30	0,24	0,23
<i>Moy.B</i>	0,15	0,55	0,00	0,32	0,45	0,33	0,36
<i>Lux.1</i>	0,18	0,45	0,10	0,00	0,50	0,15	0,28
<i>Econ.</i>	0,20	0,34	0,14	0,30	0,00	0,35	0,27
<i>Lux.2</i>	0,24	0,30	0,10	0,04	0,60	0,00	0,26
$\phi^-(a)$	0,19	0,40	0,10	0,22	0,42	0,26	
$\phi(a)$							

# Calcul de $\phi^-(a)$

$\pi(a,b)$	<i>Moy.A</i>	<i>Sport</i>	<i>Moy.B</i>	<i>Lux.1</i>	<i>Econ.</i>	<i>Lux.2</i>	$\phi^+(a)$
<i>Moy.A</i>	0,00	0,34	0,00	0,21	0,26	0,22	0,21
<i>Sport</i>	0,20	0,00	0,16	0,24	0,30	0,24	0,23
<i>Moy.B</i>	0,15	0,55	0,00	0,32	0,45	0,33	0,36
<i>Lux.1</i>	0,18	0,45	0,10	0,00	0,50	0,15	0,28
<i>Econ.</i>	0,20	0,34	0,14	0,30	0,00	0,35	0,27
<i>Lux.2</i>	0,24	0,30	0,10	0,04	0,60	0,00	0,26
$\phi^-(a)$	0,19	0,40	0,10	0,22	0,42	0,26	
$\phi(a)$							



# Calcul de $\phi(a)$

$\pi(a,b)$	<i>Moy.A</i>	<i>Sport</i>	<i>Moy.B</i>	<i>Lux.1</i>	<i>Econ.</i>	<i>Lux.2</i>	$\phi^+(a)$
<i>Moy.A</i>	0,00	0,34	0,00	0,21	0,26	0,22	0,21
<i>Sport</i>	0,20	0,00	0,16	0,24	0,30	0,24	0,23
<i>Moy.B</i>	0,15	0,55	0,00	0,32	0,45	0,33	0,36
<i>Lux.1</i>	0,18	0,45	0,10	0,00	0,50	0,15	0,28
<i>Econ.</i>	0,20	0,34	0,14	0,30	0,00	0,35	0,27
<i>Lux.2</i>	0,24	0,30	0,10	0,04	0,60	0,00	0,26
$\phi^-(a)$	0,19	0,40	0,10	0,22	0,42	0,26	
$\phi(a)$	0,02	-0,17	0,26	0,06	-0,15	0,00	

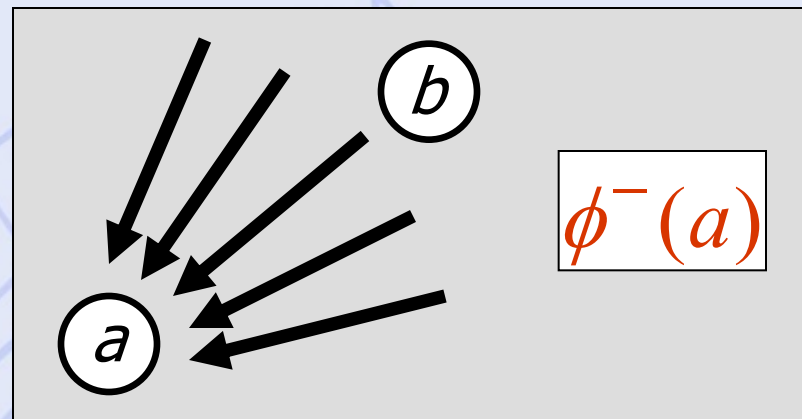
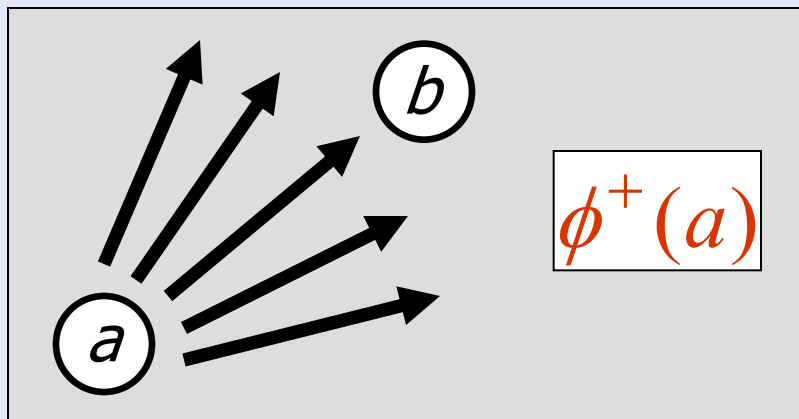
# Calcul de $\phi(a)$

$\pi(a,b)$	<i>Moy.A</i>	<i>Sport</i>	<i>Moy.B</i>	<i>Lux.1</i>	<i>Econ.</i>	<i>Lux.2</i>	$\phi^+(a)$
<i>Moy.A</i>	0,00	0,34	0,00	0,21	0,26	0,22	0,21
<i>Sport</i>	0,20	0,00	0,16	0,24	0,30	0,24	0,23
<i>Moy.B</i>	0,15	0,55	0,00	0,32	0,45	0,33	0,36
<i>Lux.1</i>	0,18	0,45	0,10	0,00	0,50	0,15	0,28
<i>Econ.</i>	0,20	0,34	0,14	0,30	0,00	0,35	0,27
<i>Lux.2</i>	0,24	0,30	0,10	0,04	0,60	0,00	0,26
$\phi^-(a)$	0,19	0,40	0,10	0,22	0,42	0,26	
$\phi(a)$	0,02	-0,17	0,26	0,06	-0,15	0,00	

# Calcul des flux de préférence

$\pi(a,b)$	<i>Moy.A</i>	<i>Sport</i>	<i>Moy.B</i>	<i>Lux.1</i>	<i>Econ.</i>	<i>Lux.2</i>	$\phi^+(a)$
<i>Moy.A</i>	0,00	0,34	0,00	0,21	0,26	0,22	0,21
<i>Sport</i>	0,20	0,00	0,16	0,24	0,30	0,24	0,23
<i>Moy.B</i>	0,15	0,55	0,00	0,32	0,45	0,33	0,36
<i>Lux.1</i>	0,18	0,45	0,10	0,00	0,50	0,15	0,28
<i>Econ.</i>	0,20	0,34	0,14	0,30	0,00	0,35	0,27
<i>Lux.2</i>	0,24	0,30	0,10	0,04	0,60	0,00	0,26
$\phi^-(a)$	0,19	0,40	0,10	0,22	0,42	0,26	
$\phi(a)$	0,02	-0,17	0,26	0,06	-0,15	0,00	

# Flux de Préférence



- Flux sortant :  
(puissance)
- Flux entrant :  
(faiblesse)
- Flux net :

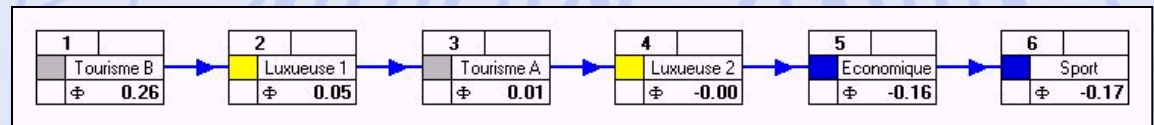
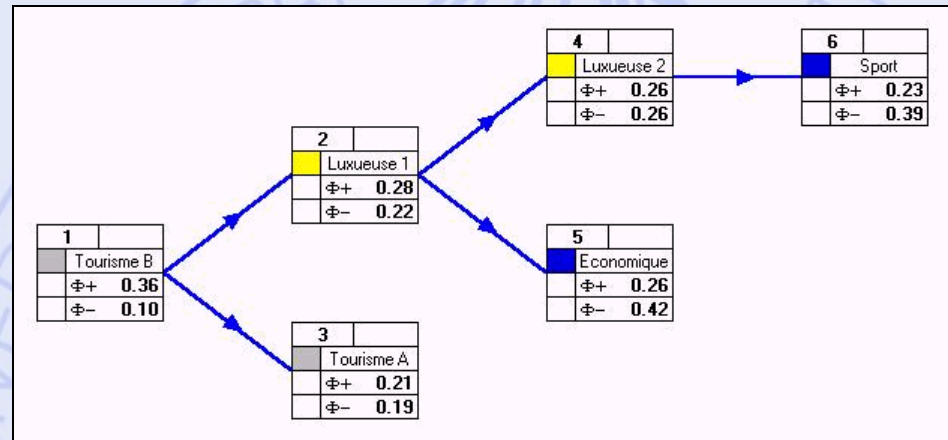
$$\phi^+(a) = \frac{1}{n-1} \sum_{b \in A} \pi(a, b)$$

$$\phi^-(a) = \frac{1}{n-1} \sum_{b \in A} \pi(b, a)$$

$$\phi(a) = \phi^+(a) - \phi^-(a)$$

# PROMETHEE

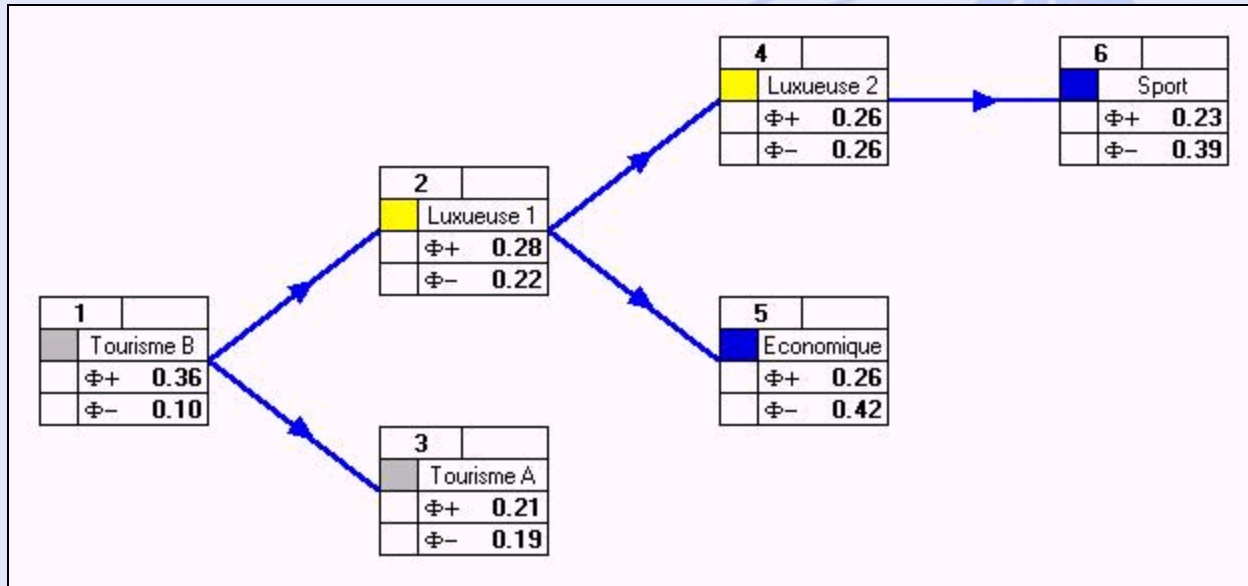
- Classer les décisions de la meilleure à la moins bonne
- Mettre en évidence les meilleurs compromis



# PROMETHEE

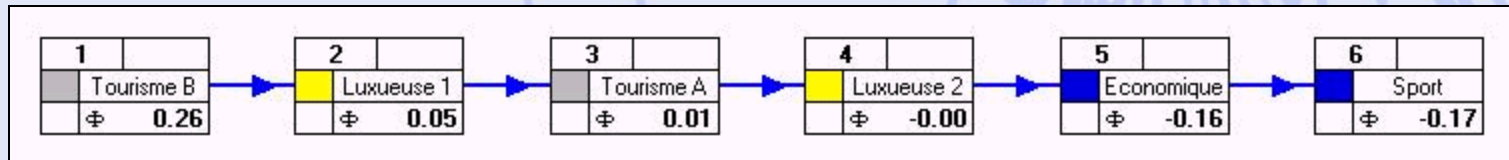
- PROMETHEE I : classement partiel

$\phi^+, \phi^-$



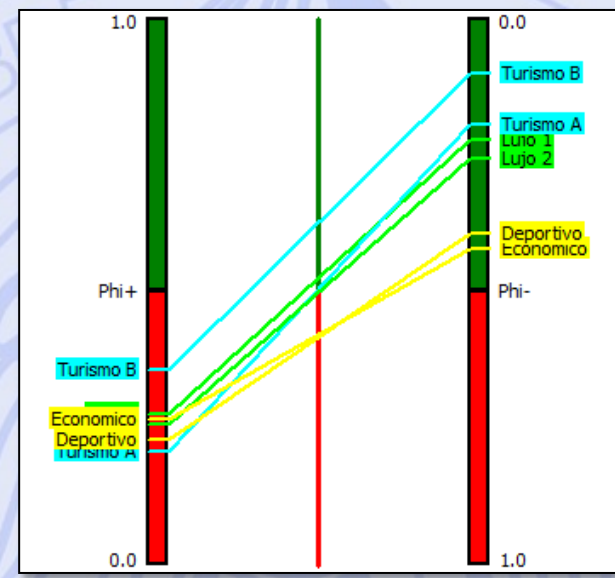
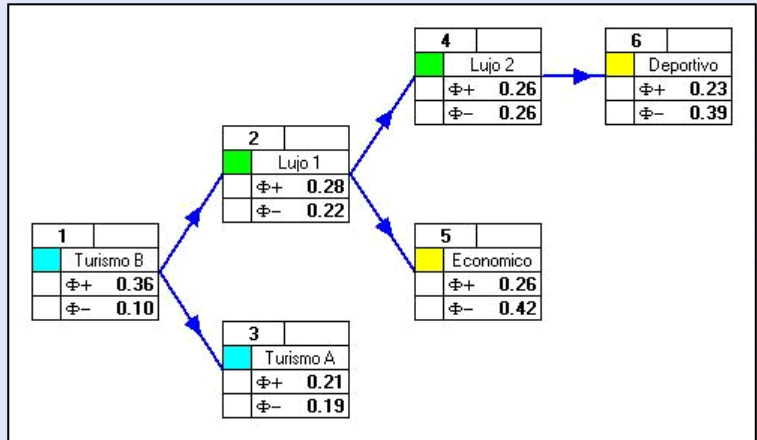
- PROMETHEE II : classement complet

$\phi$

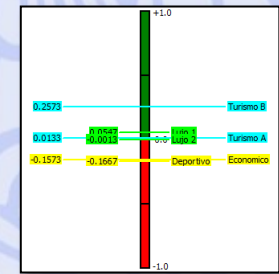
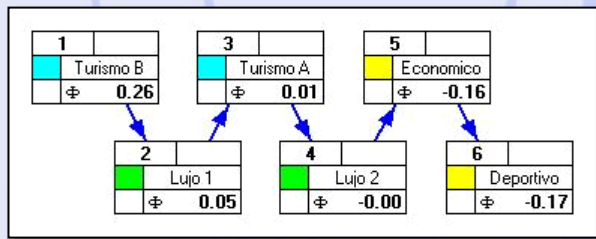


# PROMETHEE I & II

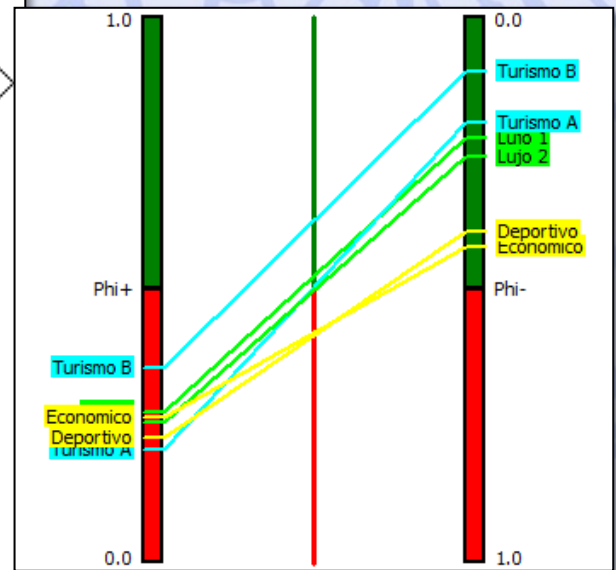
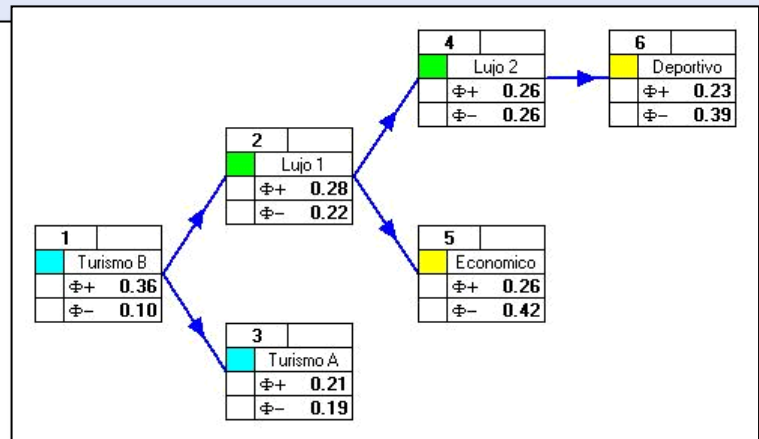
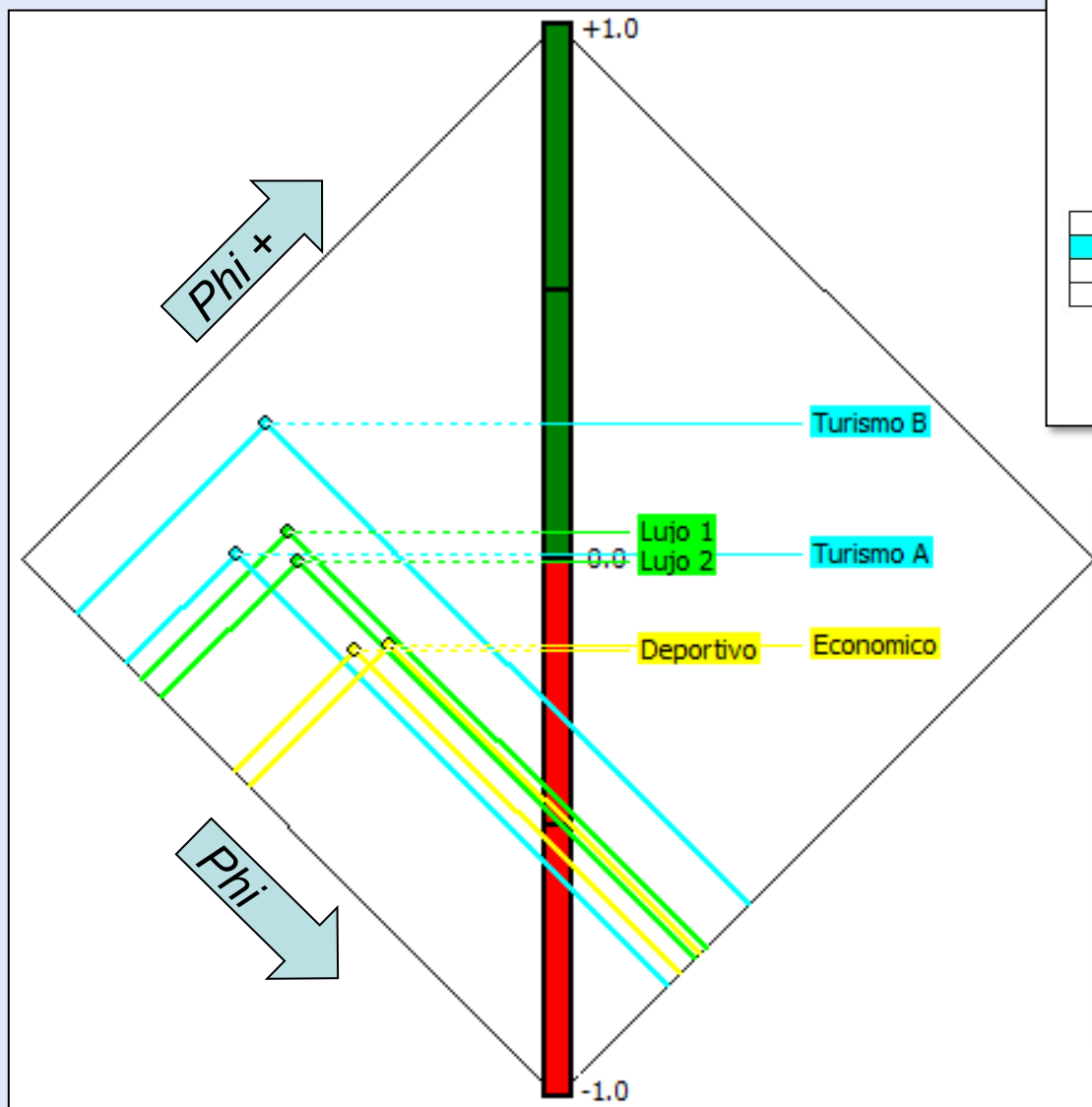
- PROMETHEE I : classement partiel -  $\phi^+$ ,  $\phi^-$



- PROMETHEE II : classement complet -  $\phi$



# Diamant PROMETHEE

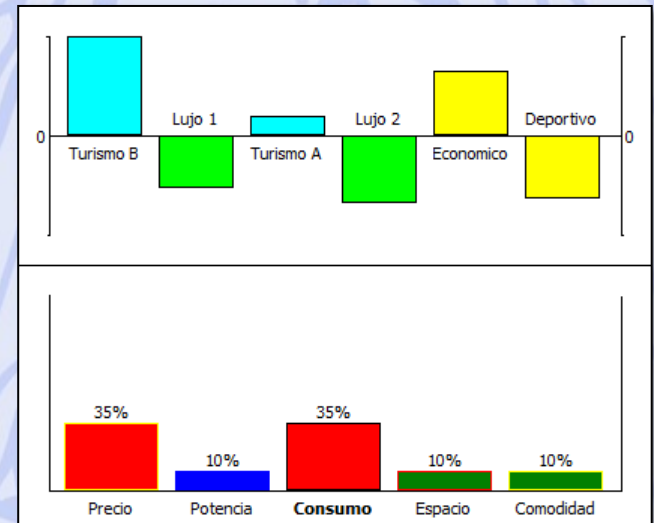
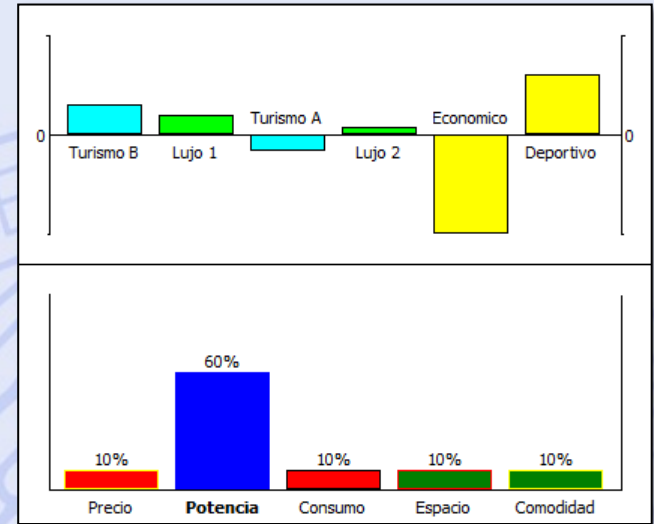
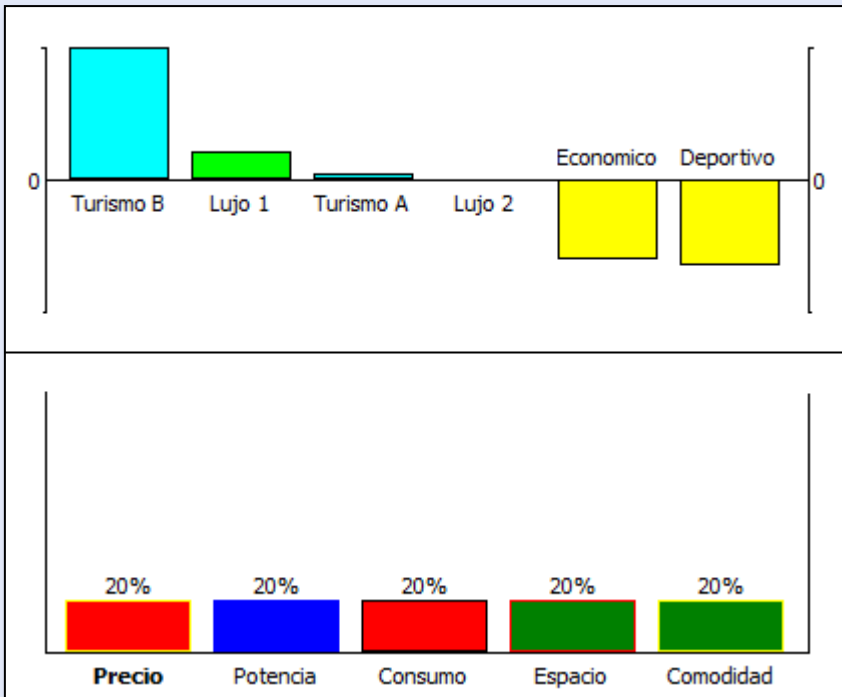




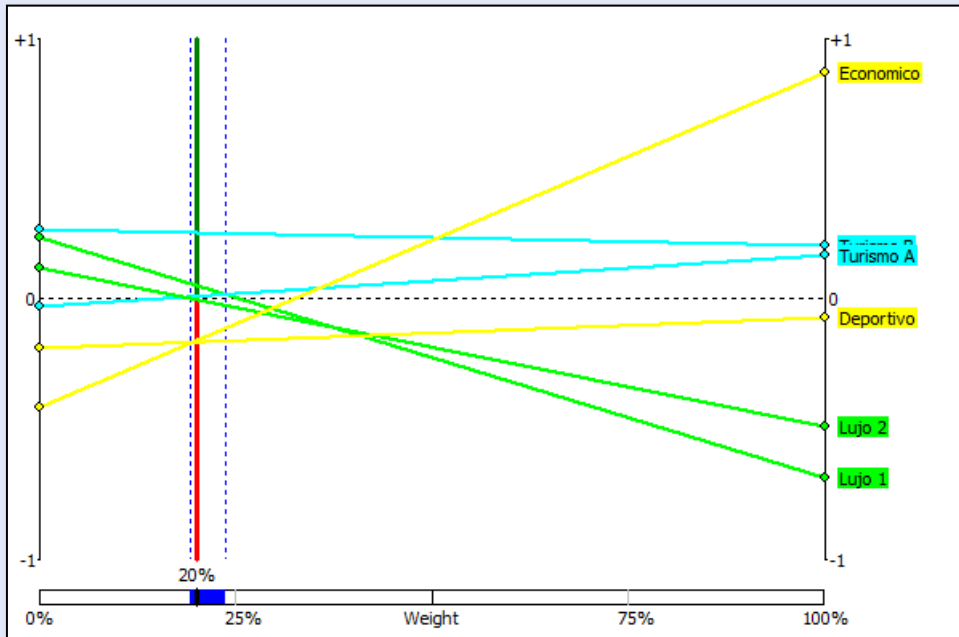
# Analyse de Sensibilité avec PROMETHEE

- Poids des critères  $\leftrightarrow$  classement PROMETHEE.
- Analyse de sensibilité interactive : « Walking Weights ».
- Robustesse par rapport aux poids ?
  - Intervalles de stabilité.
  - Intervalles de stabilité visuels.

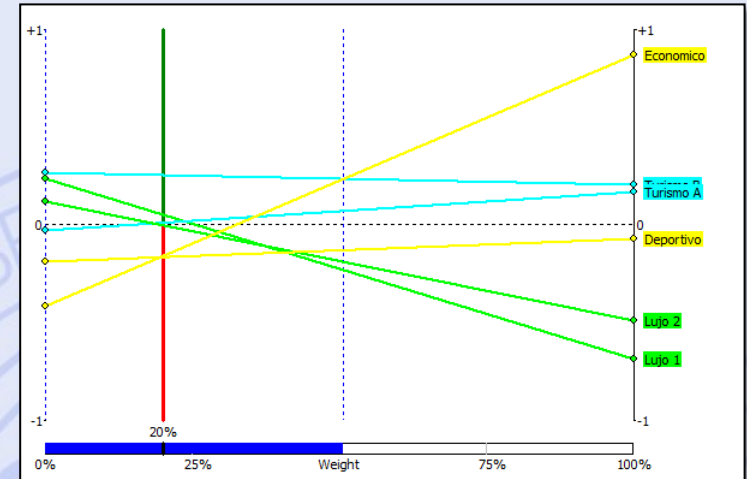
# Walking Weights



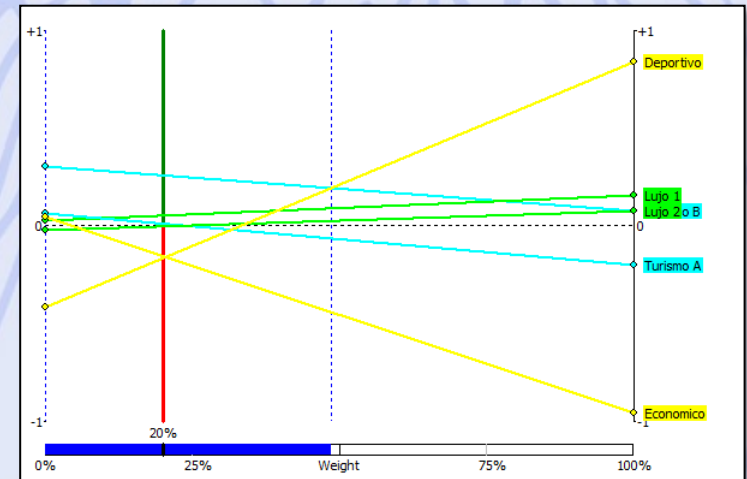
# Visual Stability Intervals



VSI pour « Prix » (niveau 6):  
[ 19.20% , 23.70% ]

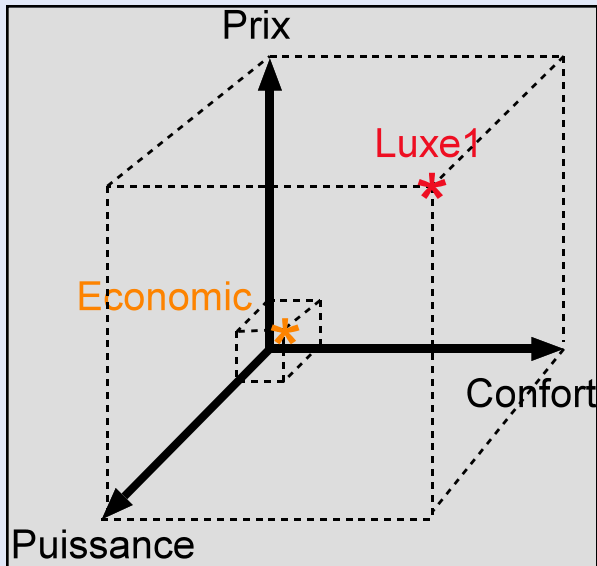


VSI pour « Prix » (niv. 1): [ 0.00% , 50.68% ]



VSI pour « Puissance » (niv. 1): [ 0.00% , 48.65% ]

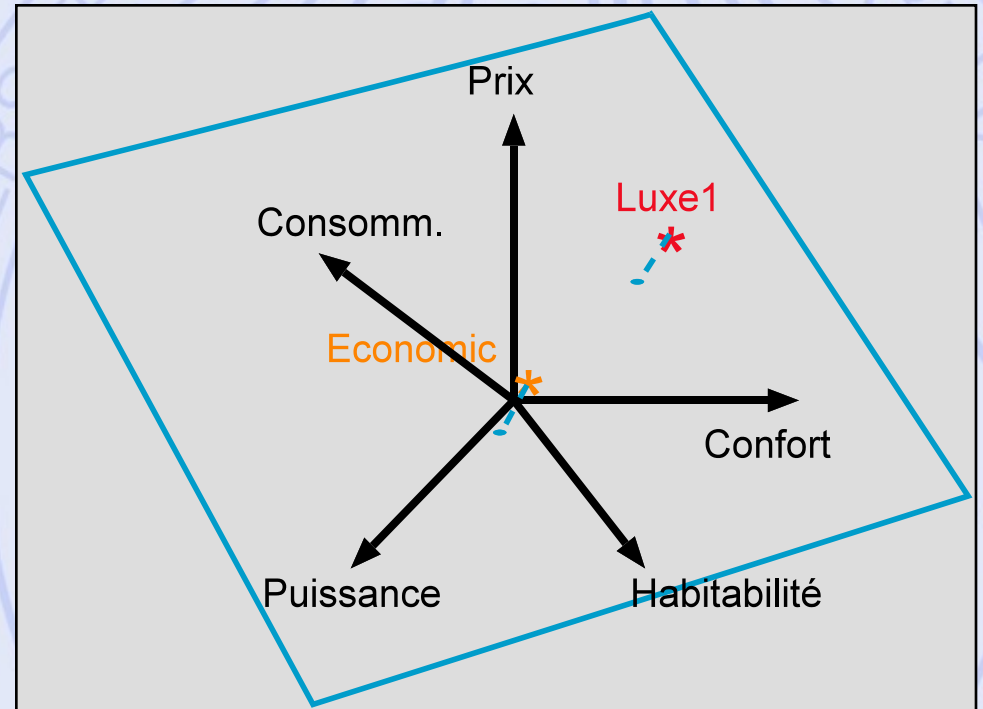
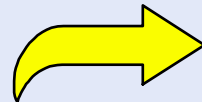
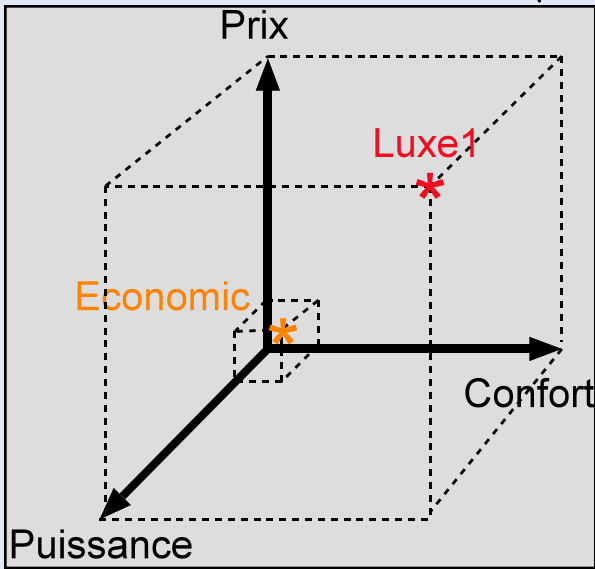
# GAIA



- Représentation graphique.
- 5 dimensions !

# GAIA

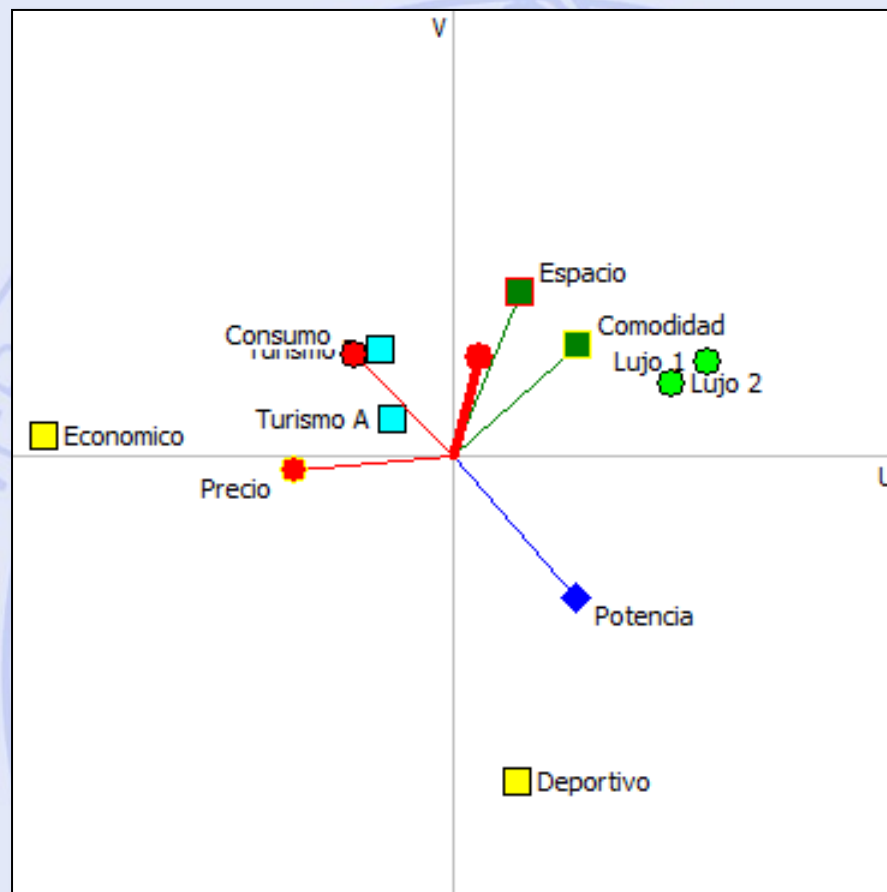
1. *Calcul des flux nets unicritères (normalisation)*
2. *Projection sur un plan :*



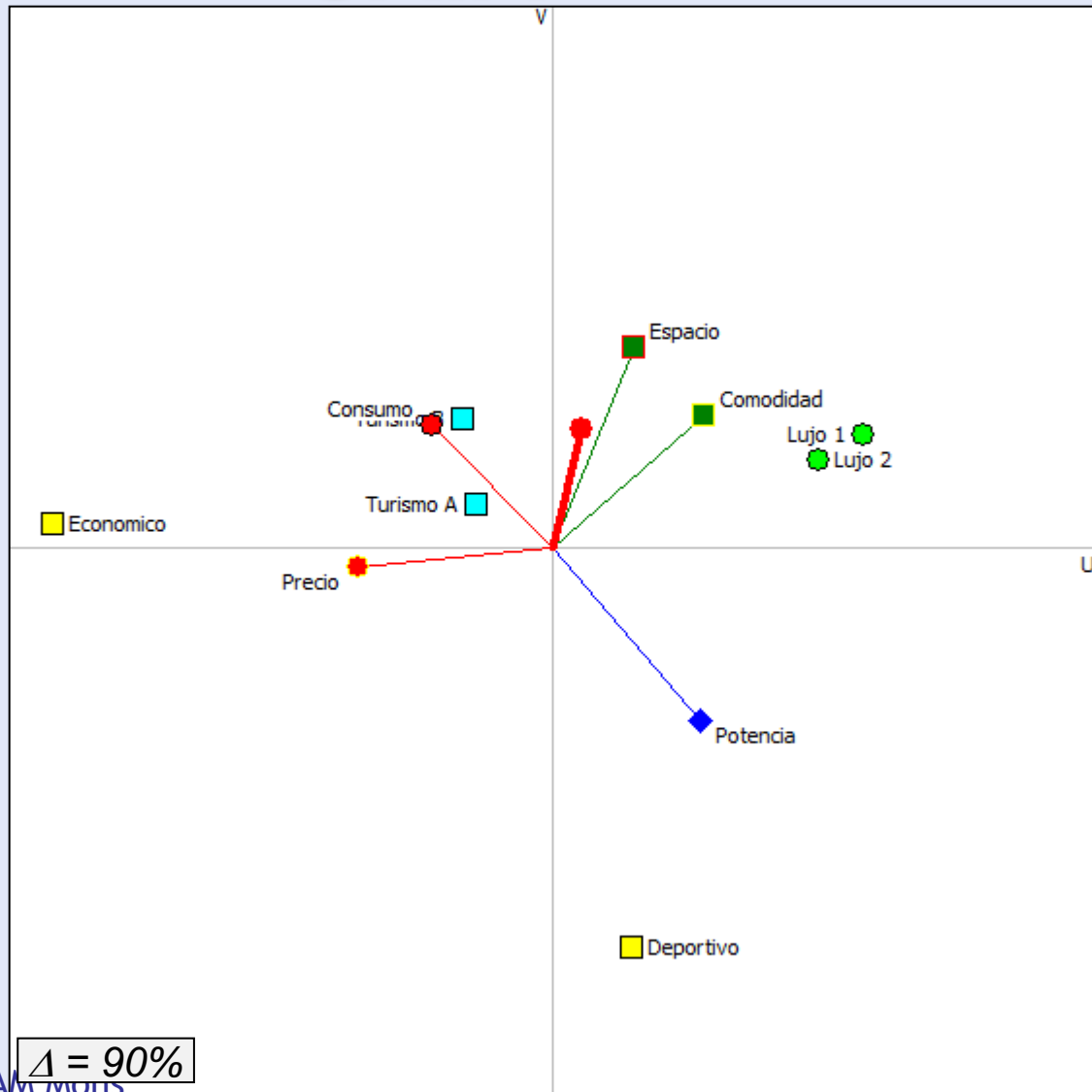
- Représentation graphique.
- 5 dimensions !

# GAIA

- Mettre en évidence les conflits entre critères.
- Identifier les compromis possibles.
- Aider à fixer les priorités.

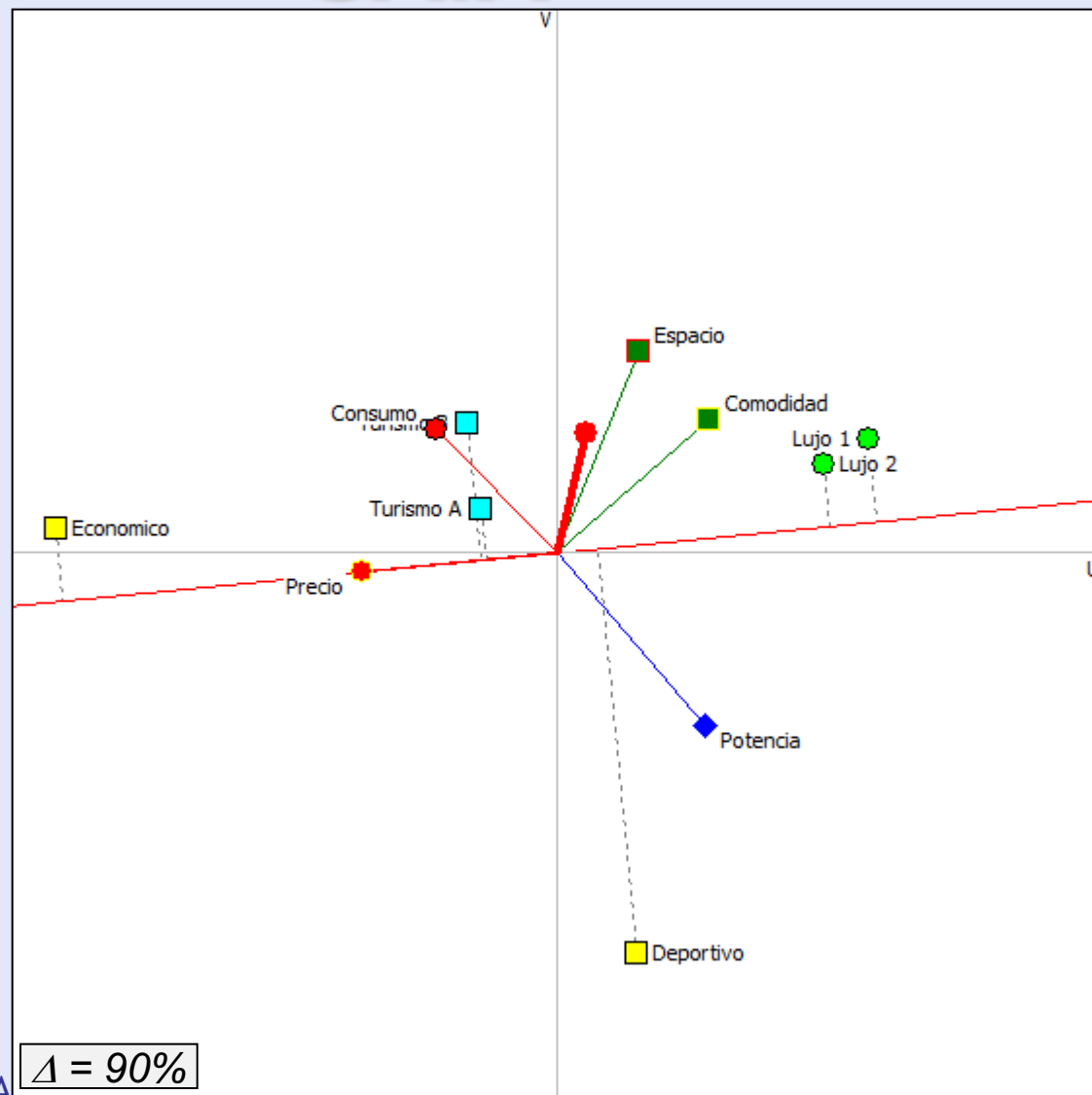


# GAIA



- *Actions :*  
*points*
- *Critères :*  
*axes*

# GAIA

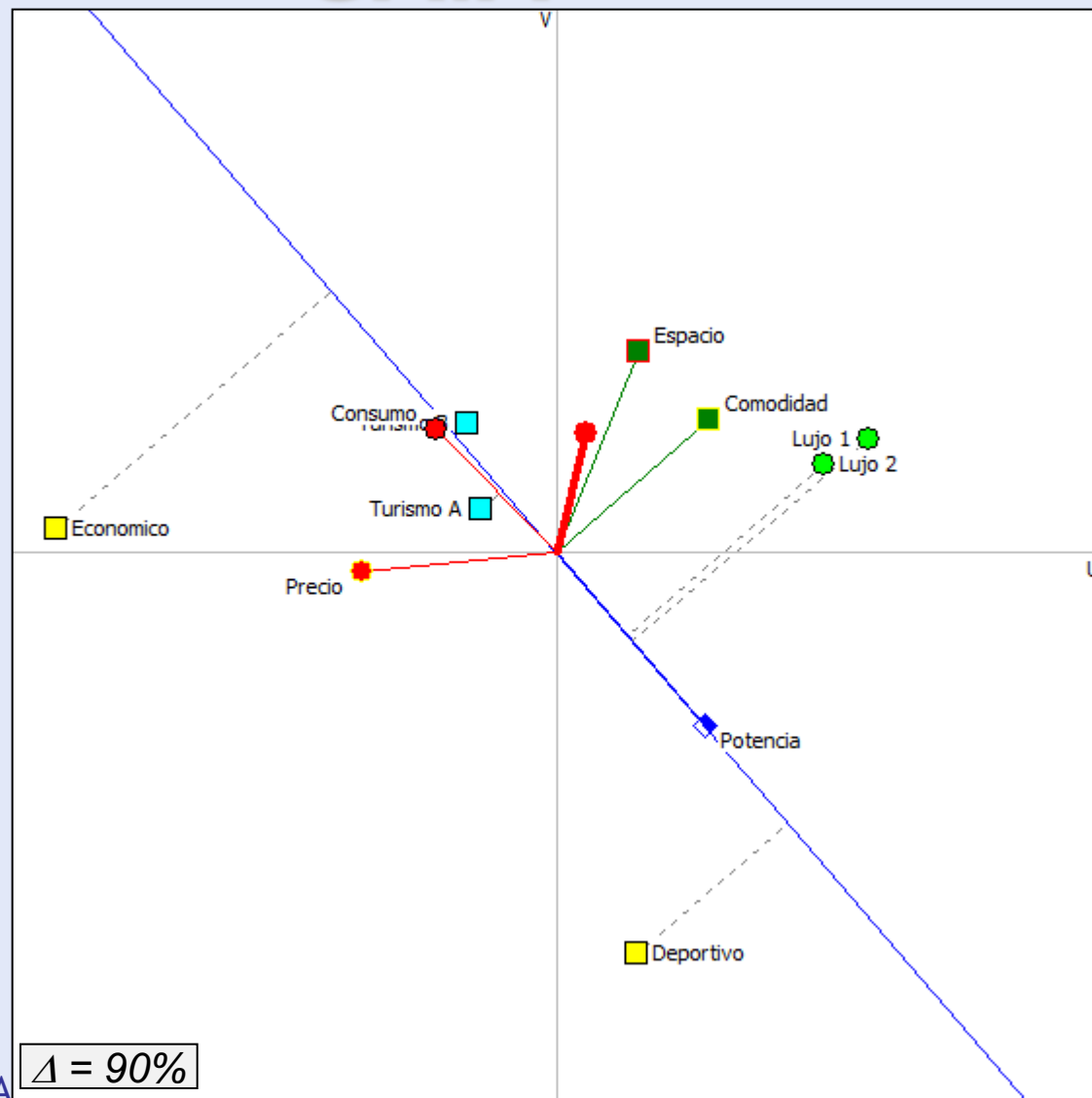


## Prix

- *Economico: 15 k€*
- *Turismo: 25,5-26 k€*
- *Deportivo: 29 k€*
- *Lujo: 35-38 k€*



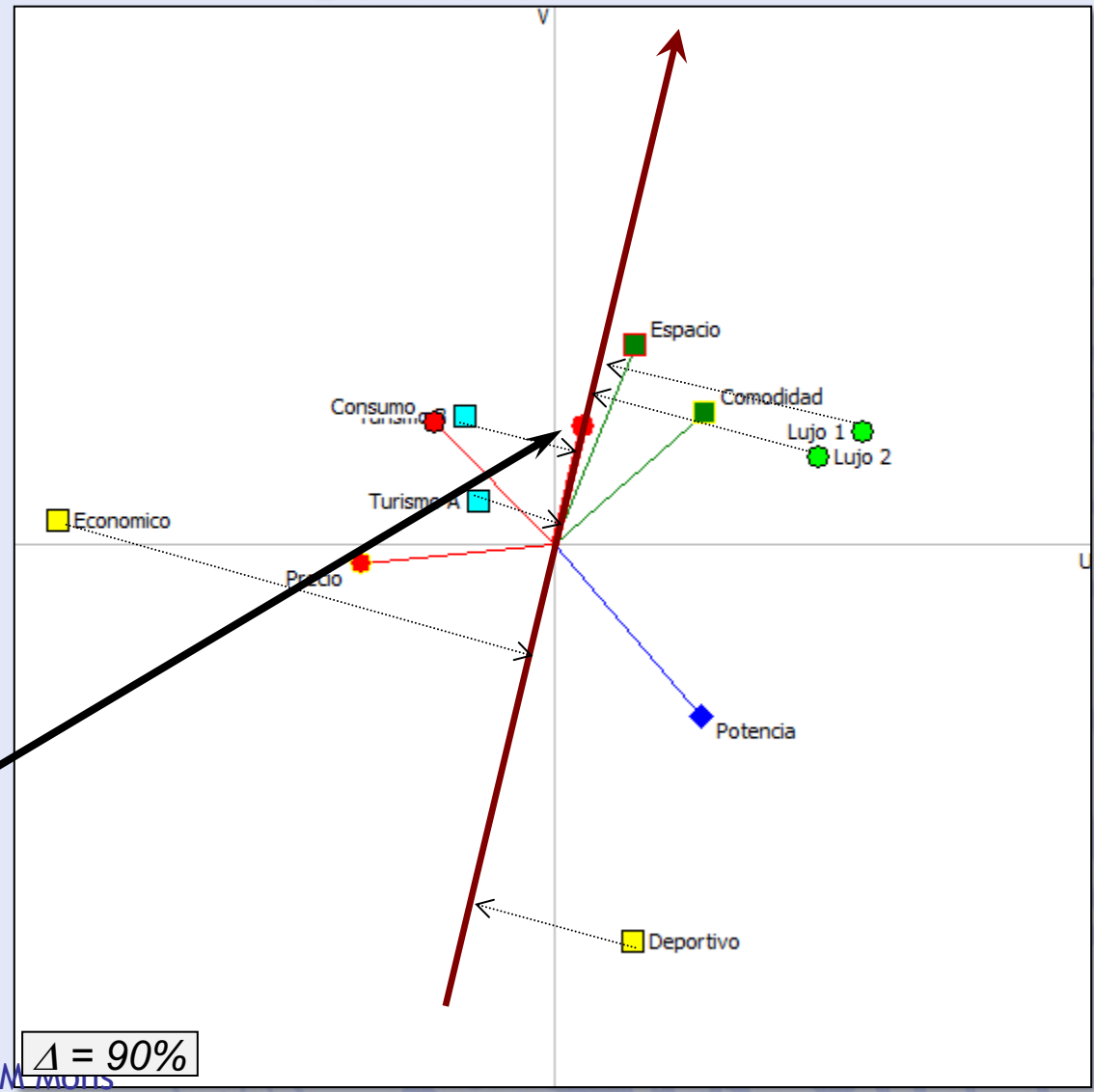
# GAIA



## Puissance

- Deportivo: 110 kW
- Lujo: 85-90 kW
- Turismo: 75-85 kW
- Economico: 50 kW

# GAIA



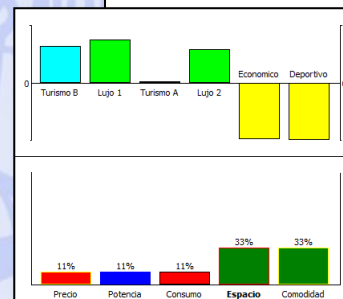
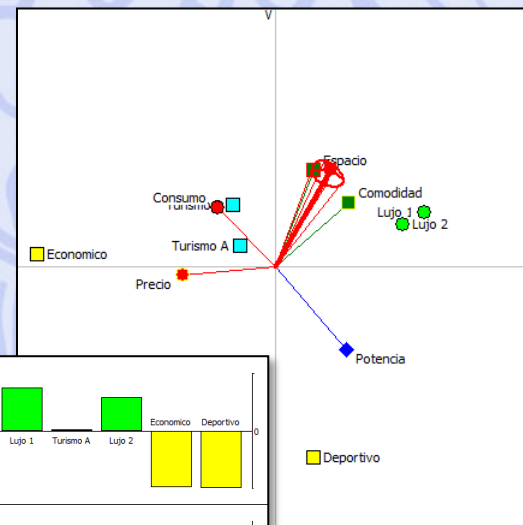
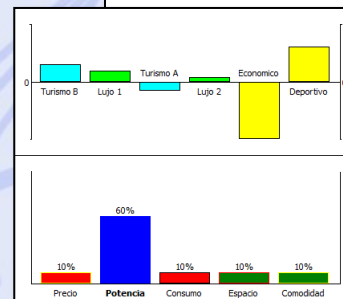
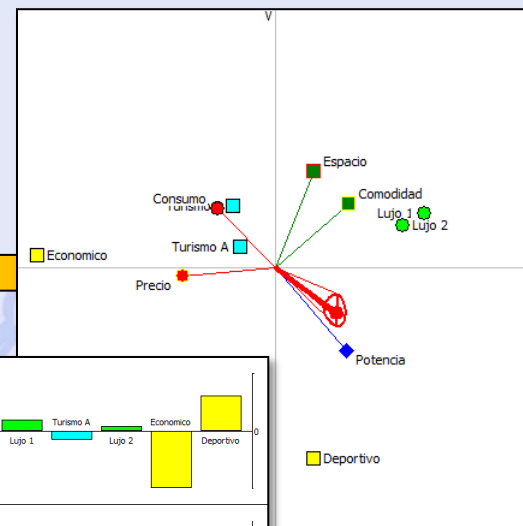
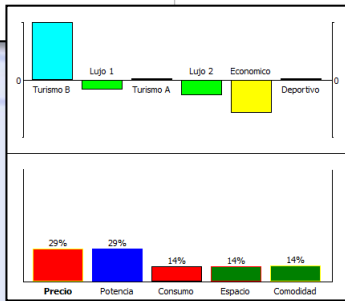
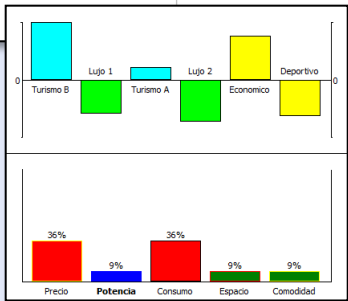
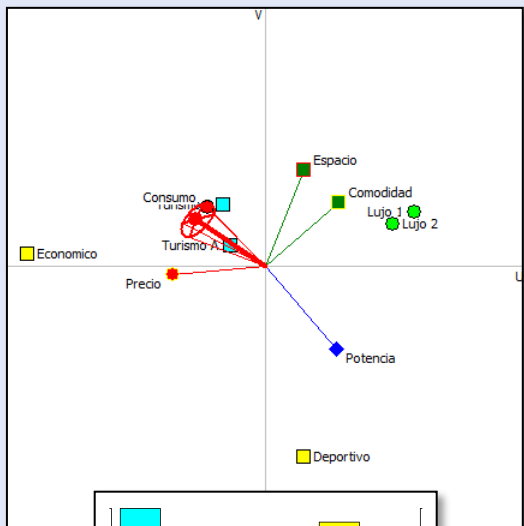
## PROMETHEE II !

- Turismo B : 0,26
- Lujo 1 : 0,06
- Turismo A : 0,02
- Lujo 2 : 0,00
- Economico : -0,15
- Deportivo : -0,17

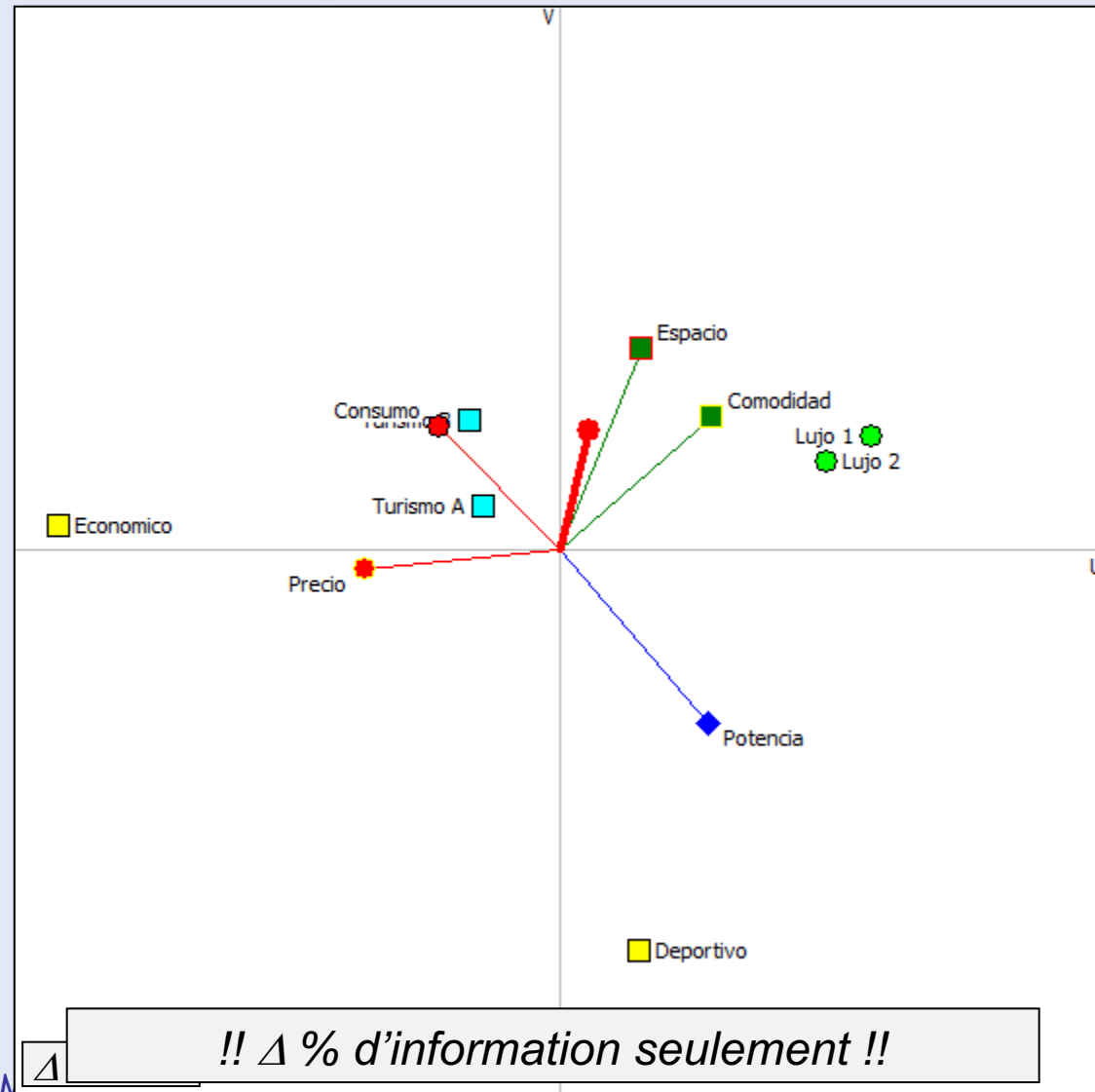
# GALA-Brain

20 ans

35 ans

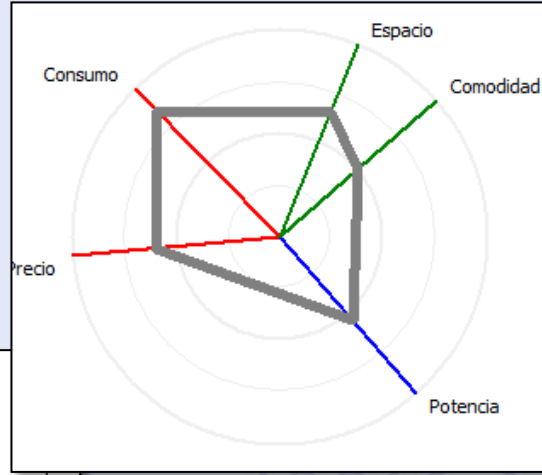
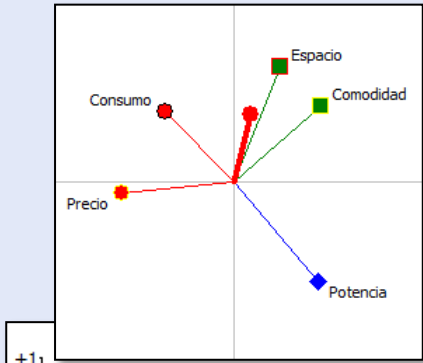


# GAIA

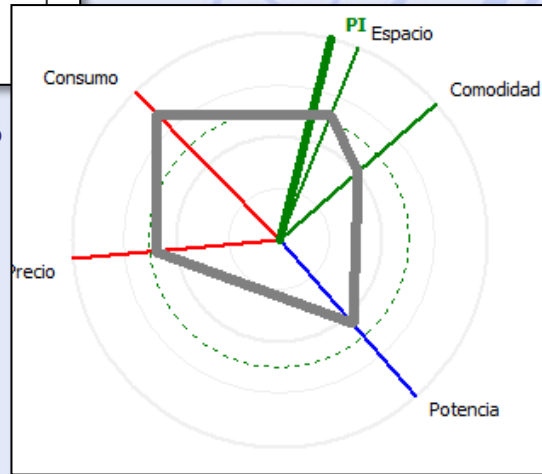


- *Actions :*  
*points*
- *Critères :*  
*axes*
- *Axe de décision*

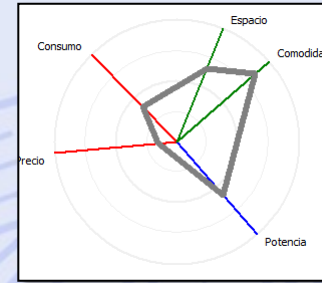
# GAIA Webs



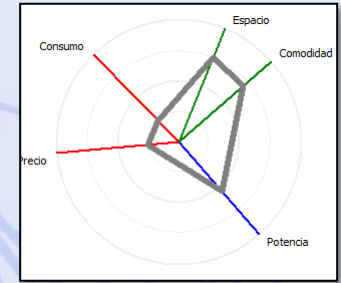
GAIA Web - Turismo B



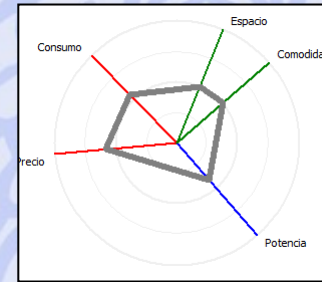
Action profile - Turismo B



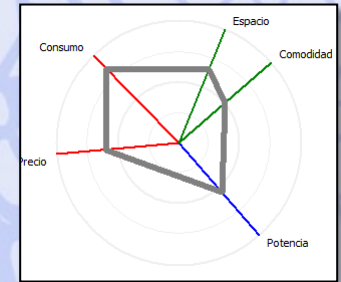
Lujos 1



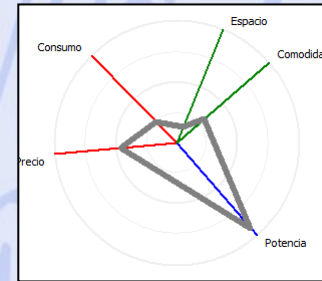
Lujos 2



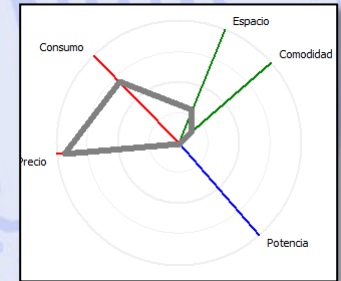
Turismo A



Turismo B



Deportes



Economico

# Méthodes PROMETHEE & GAIA

- PROMETHEE : approche prescriptive
  - Classement partiel des actions
    - PROMETHEE I
  - Classement complet des actions
    - PROMETHEE II
- GAIA : approche descriptive
  - Identification des conflits entre critères.
  - Profils caractéristiques des actions.
  - Fixer les priorités, analyse de sensibilité.

# Exemple 2 :

## Localisation d'une usine

- Actions : 5 sites potentiels
- Critères :
  - $f_1$  : Coût (investissement)
  - $f_2$  : Coût (opérations)
  - $f_3$  : Emploi
  - $f_4$  : Transport
  - $f_5$  : Impact sur l'environnement
  - $f_6$  : Impact social

# Tableau d'Evaluation

	Investment	Operations	Employment	Transportation	Environment	Social
Min/Max	Minimize	Minimize	Minimize	Maximize	Minimize	Minimize
Weight	25.0000	15.0000	20.0000	20.0000	10.0000	10.0000
Preference Functi	Linear	Linear	Linear	Level	Level	Level
Indifference Thres	5.00 %	5.00 %	5.00 %	0.5000	0.5000	0.5000
Preference Thres	25.00 %	25.00 %	10.00 %	1.5000	1.5000	1.5000
Gaussian Thresho	-	-	-	-	-	-
Threshold Unit	Percent	Percent	Percent	Absolute	Absolute	Absolute
<b>Unit</b>	M\$	M\$	workers	5-point	Impact	Impact
Site 1	74.0000	12.0000	175.0000	Average	High	Low
Site 2	86.0000	9.0000	170.0000	Good	Low	Very Low
Site 3	89.0000	7.0000	145.0000	Very Good	Very Low	Moderate
Site 4	115.0000	8.0000	95.0000	Bad	Low	High
Site 5	128.0000	10.0000	110.0000	Good	Moderate	Very Low

- Critères à minimiser ou maximiser.
- Echelles différentes.
- Critères quantitatifs ou qualitatifs.



# Problèmes de Décision Mono- et Multidécideur

- Monodécideur :
  - Une seule partie prenante dans le processus.
  - Evaluations et structure de préférence uniques.
- Multidécideur :
  - Plusieurs parties prenantes.
  - Evaluations et structures de préférences multiples.
  - Recherche d'un consensus.

# Exemple

- Quatre parties prenantes (“décideurs”) :
  - Industriel,
  - Pouvoirs publics (région),
  - Associations de protection de l’environnement,
  - Syndicats.
- Quatre tableaux multicritères.

# Modèle Multi-scénarios

- Scénarios :
  - Points de vue,
  - Hypothèses de travail, ...
- Evaluations :
  - Critères ‘objectifs’ : évaluations communes.
  - Critères ‘subjectifs’ : évaluations particulières à chaque scénario.
- Structures de préférences différentes :
  - Poids, seuils de préférence.

# Modèle Multi-scénarios

- Adaptation de PROMETHEE :
  - Classements individuels
  - Classements globaux (groupe) en tenant compte d'une pondération éventuelle des scénarios
- Adaptation de GAIA :
  - GAIA-Critères
  - GAIA-Scénarios
  - GAIA-Unicritère

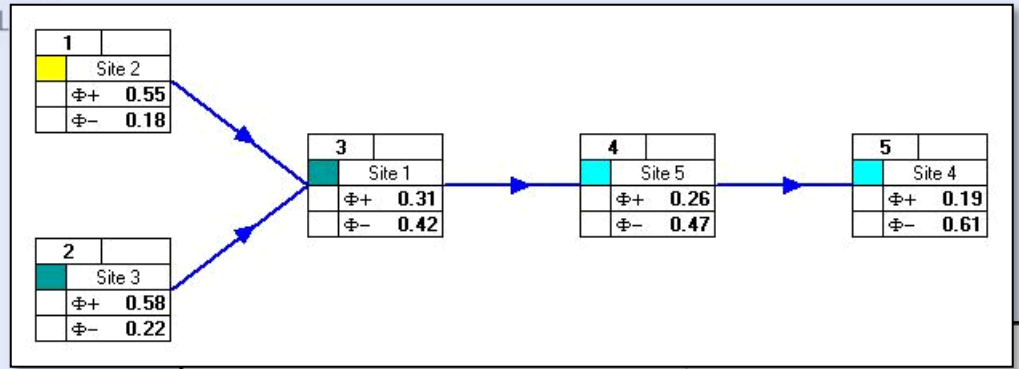
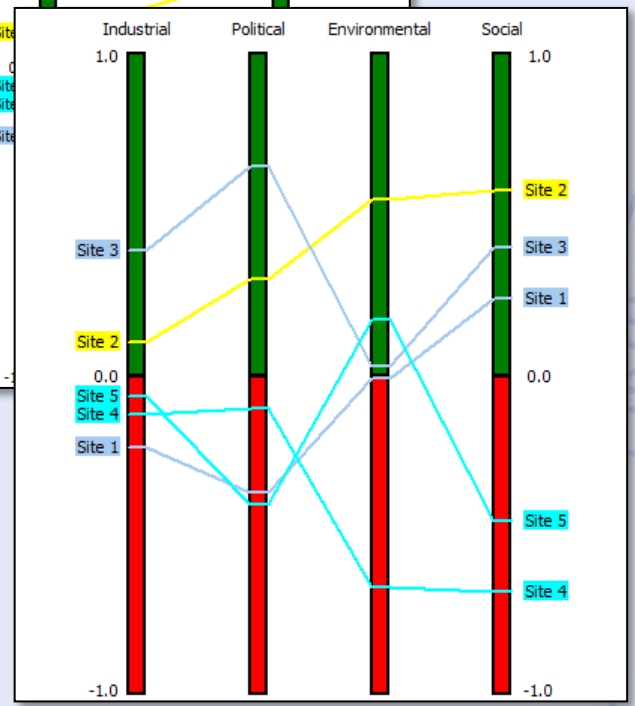
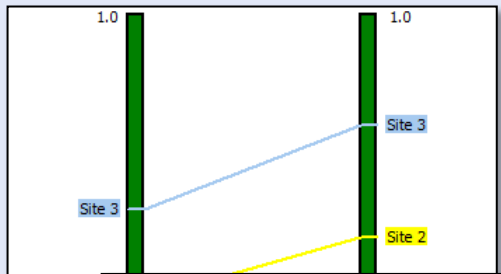
1	
Site 2	
$\phi+$	0.55
$\phi-$	0.18

2	
Site 3	
$\phi+$	0.58
$\phi-$	0.22

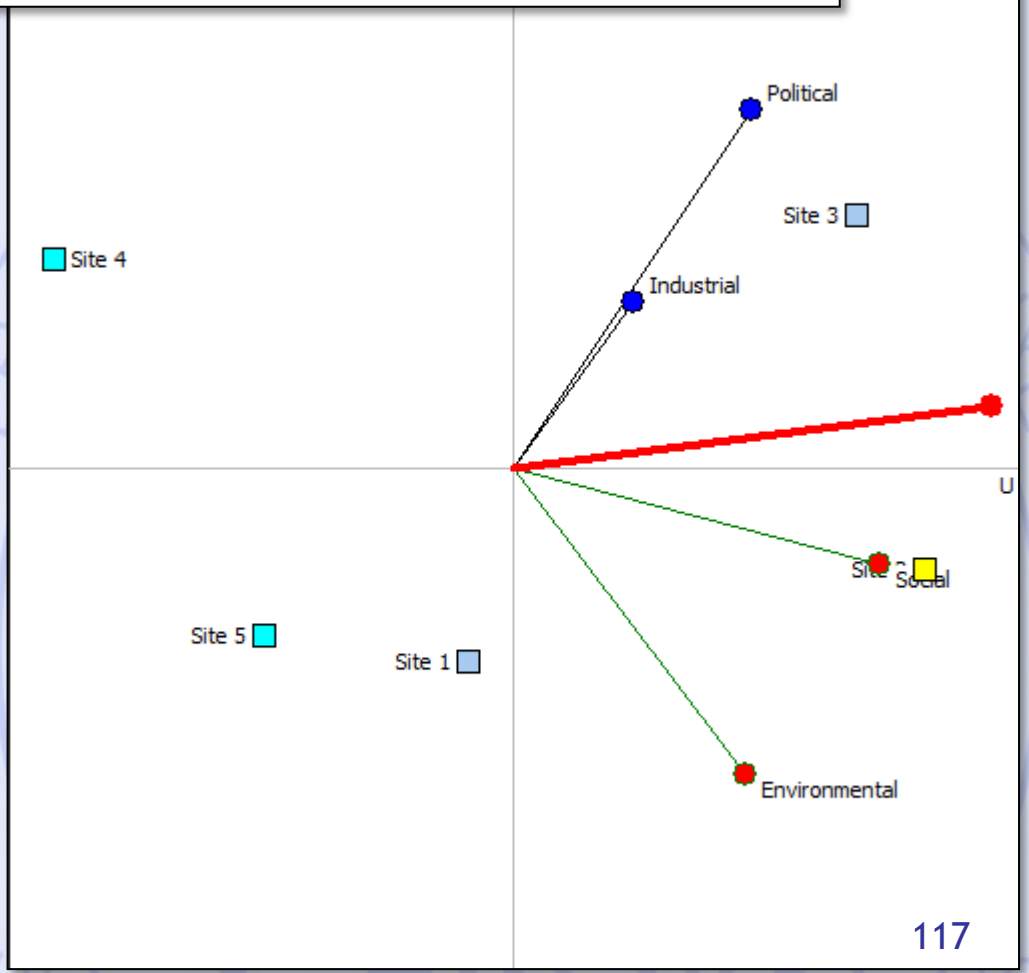
3	
Site 1	
$\phi+$	0.31
$\phi-$	0.42

4	
Site 5	
$\phi+$	0.26
$\phi-$	0.47

5	
Site 4	
$\phi+$	0.19
$\phi-$	0.61



Zoom: 100%



# Visual PROMETHEE

[WWW.PROMETHEE-GAIA.NET](http://WWW.PROMETHEE-GAIA.NET)

- Hiérarchie de critères à 3 niveaux (cluster, groupe, critère).
- Outils de visualisation :
  - Classements PROMETHEE et Diamant,
  - Intervalles de stabilité visuels,
  - « Cerveau » (PROMETHEE VI),
  - GAIA-3D,
  - GAIA-Webs et PROMap (intégration SIG - Google Maps), ...

# Travail d'aide à la décision

- Travail (groupes de 2-3 étudiant.e.s).
- Elaborer un problème de décision : min. 8 actions, 5 critères et 2 scénarios.
- Modéliser le problème avec PROMETHEE.
- Analyser le problème avec Visual PROMETHEE:
  - Classements PROMETHEE.
  - Analyse GAIA.
  - Analyse de sensibilité:
    - Poids des critères.
    - Différents scénarios.
  - Bonus: catégories, groupes, clusters, ...
- Rapport écrit à rentrer au plus tard le jour de l'examen.

# Etapes

1. Définir le problème :
  - Vérifier la faisabilité.
2. Définir les actions, critères et scénarios :
  - Echelles.
3. Modélisation des préférences :
  - Fonctions de préférences.
  - Pondération des critères.
4. Analyse critique :
  - Classements PROMETHEE.
  - GAIA.
  - Analyse de sensibilité (poids).
  - Analyse multi-scénarios.
  - Bonus (utilisation d'outils additionnels).
  - Conclusion.



# Bonus

- Définition de catégories d'actions, de groupes et de clusters de critères.
- Utilisation d'outils supplémentaires :
  - Arc-en-ciel PROMETHEE,
  - Profils, GAIA-Webs,
  - Intervalles de stabilité,
  - PROMETHEE V,
  - GIS,
  - ...

# Pour utiliser PROMETHEE

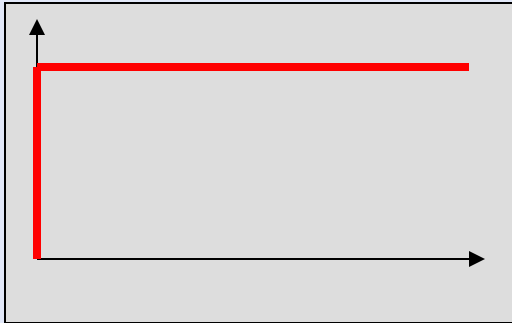
1. Définir les actions :
  - Liste.
2. Définir les critères :
  - Quantitatifs,
  - Qualitatifs (choix de l'échelle).
3. Evaluer (tableau).
4. Pour chaque critère :
  - Choisir un type de fonction de préférence.
  - Fixer les seuils correspondants.
5. Pondérer les critères.

# Critères qualitatifs & quantitatifs

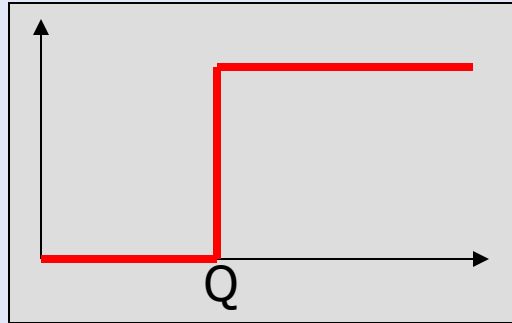
- Critères quantitatifs :
  - Echelle numérique naturelle.
- Critères qualitatifs :
  - Echelle qualitative ordinale (ex: échelles de Likert).
  - Maximum 9 niveaux ( $7 \pm 2$ ) pour assurer une évaluation cohérente.
  - Présence d'un niveau neutre ?
  - Exemples:
    - Très bon, Bon, Moyen, Mauvais, Très mauvais
    - Oui, Non
    - ++, +, 0, -, --
    - ++, +, -, --
  - Echelle numérique sous-jacente (codage).

# Fonctions de préférence

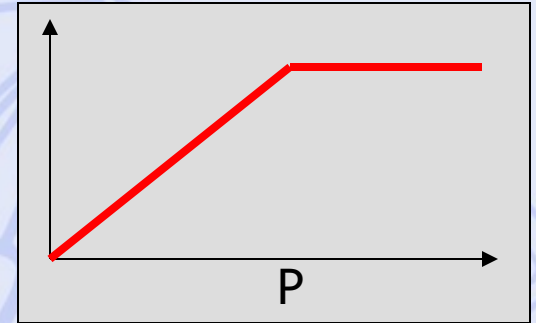
(disponibles dans **Visual PROMETHEE**)



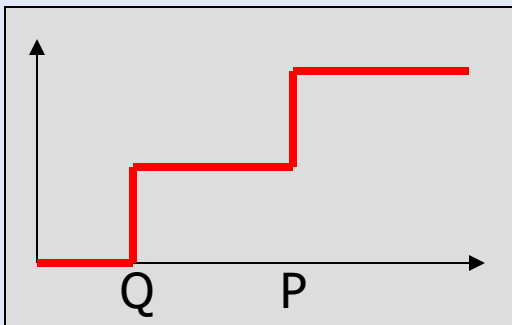
Usuelle



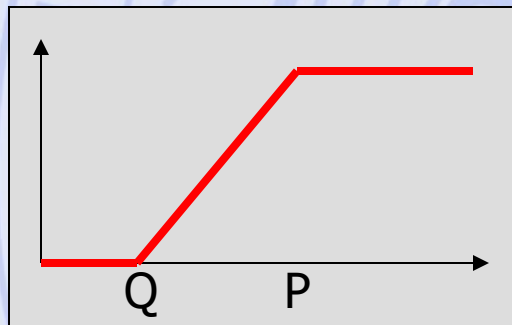
En « U »



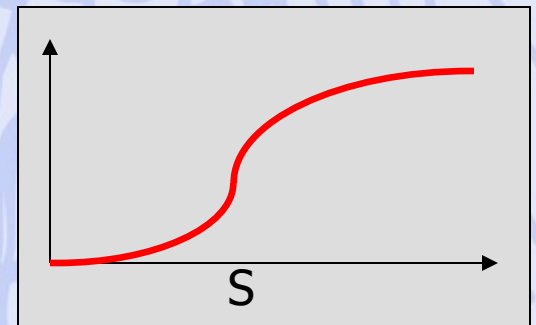
En « V »



A paliers



Linéaire

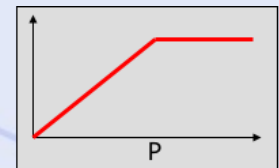


Gaussienne

# Fonctions de préférence

- Critères quantitatifs « continus » (ex. coût, prix, distance):

- En « V » (pas de seuil d'indifférence),
- Linéaire.



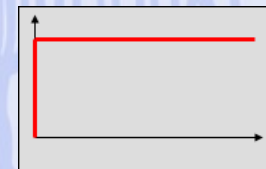
« V » shape



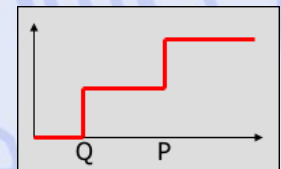
Linear

- Critères qualitatifs ou quantitatifs « discrets » (ex. « très bon à très mauvais », nombre d'hôpitaux):

- Usuelle (pas de seuils),
- A paliers.



Usual

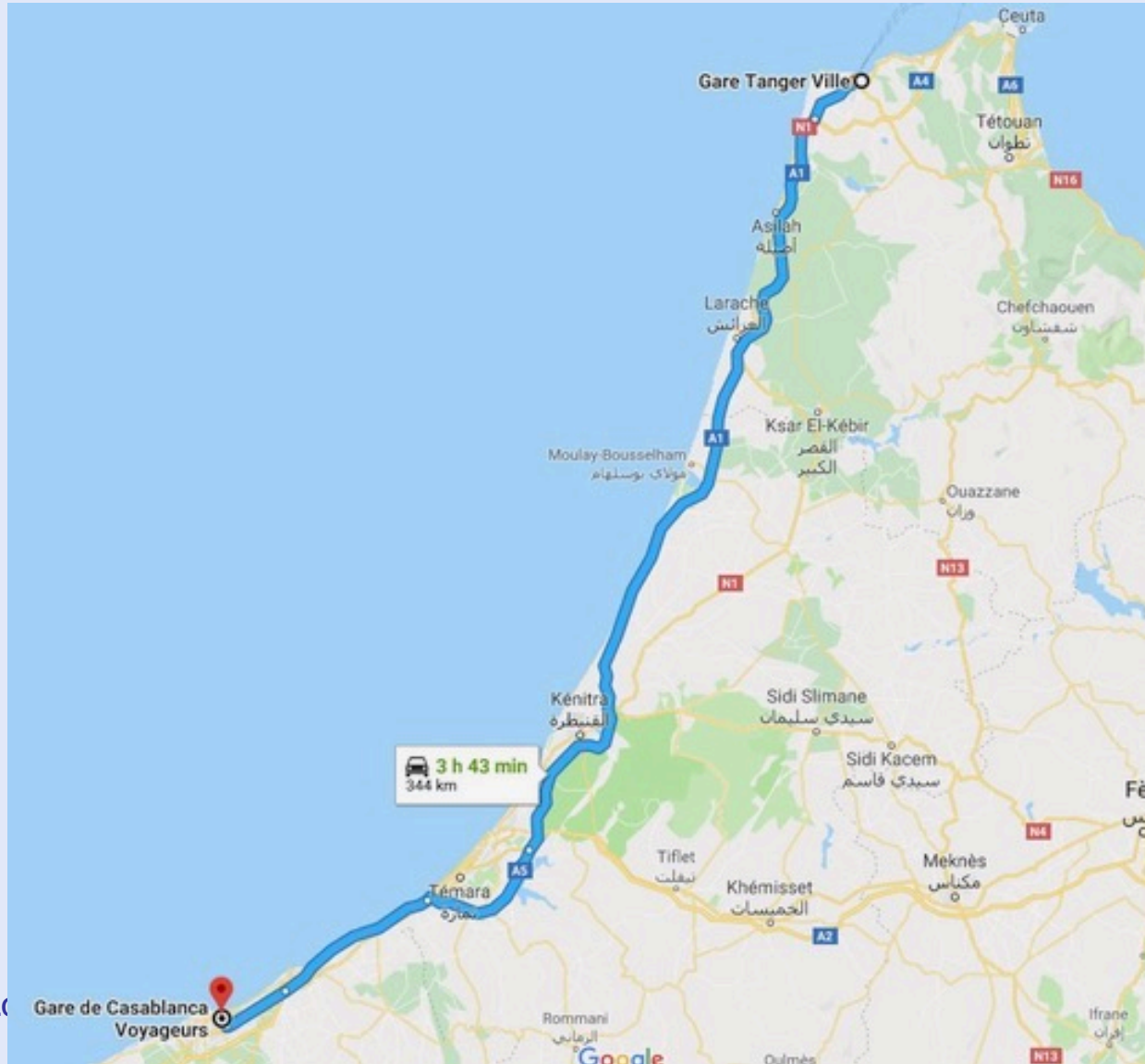


Level

# Un exemple... Pas à pas...

Construction  
de la  
LGV Tanger - Casablanca

# LGV Tanger - Casablanca



# LGV Tanger - Casa

<https://www.oncf.ma/fr/Developpement/Grands-projets/Ligne-a-grande-vitesse-tanger-casablanca>

- 22,9 milliards DH → **impacts économiques.**
- 344 km - 3h43 en auto → gain de temps.
- 12 viaducs, 2100 ha reboisés, réduction émissions GES  
→ **impacts environnementaux.**
- 1800 ha de terrain, 250 ménages expropriés, emplois créés, moins de victimes sur les routes  
→ **impacts sociaux.**
- **Choix du tracé ?**



# Les données

## (fictives - cas d'étude)

- Six tracés possibles : A, B, C, D, E et F
- Six critères :
  - Coût (en milliards de DH)
  - Vitesse commerciale (en km/h)
  - Nombre d'ouvrages d'art (viaducs, ...)
  - Nombre de ménages expropriés
  - Nombre d'emplois créés
  - Impact environnemental (qualitatif - 5 pts)
- Deux scénarios :
  - Gouvernement
  - ONCF (chemins de fer marocains)

# Les actions

- Six tracés possibles :
  - A, B, C, D, E, F
- Deux catégories en fonction de l'orientation du tracé :
  - Ouest :
  - Est :

# Les critères

- Coût
  - Quantitatif - monétaire (milliards de DH)
- Vitesse commerciale
  - Quantitatif (km/h)
- Ouvrages d'art
  - Quantitatif - discret (nombre - de 9 à 14)
- Expropriations
  - Quantitatif (nombre de ménages)
- Emplois créés
  - Quantitatif (nombre d'emplois)
- Impact environnemental
  - Qualitatif (5 pts - de très faible à très élevé)

# Plan du cours

## 1. Introduction

- Historique, modélisation

## 2. Aide multicritère à la décision

- Choix social
- Méthodes PROMETHEE et GAIA

## 3. Optimisation multiobjectif