Plan du cours

1. Introduction
2. Statistique descriptive – séries univariées
3. Calcul des probabilités
4. Arbres de décision
5. Variables aléatoires et lois de probabilité
6. Statistique descriptive – séries bivariées
7. Méthodes de prévision

Probabilités

- Introduction
- Expérience aléatoire, résultats, événements
- Notion de probabilité
- Calcul des probabilités
- Variables aléatoires
- Lois de probabilité discrètes

Introduction

- Jeux de hasard
  - Gagner au lotto, au tiercé ?
- Elections
  - Probabilité d’être élu ?
- Assurance-vie
  - Probabilité de survie après x années ?
- Economie
  - Probabilité de faillite d’une entreprise ?

Expérience aléatoire

- Expérience aléatoire :

- Résultats :
  - Pile ou face,
  - 1, 2, 3, 4, 5 ou 6,
  - Une des 52 cartes.

Expérience aléatoire

- Action ou processus qui engendre une observation, et dont on ne peut prédire avec certitude le résultat.
- Espace échantillon Ω : ensemble de tous les résultats possibles.
- Exemple : lancer d'un dé

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

Evénements

- Exemples :
  - Evénement *A* : Obtenir le « 1 »

$$A = \{1\}$$

  - Evénement *B* : Obtenir un multiple de 3

$$B = \{3,6\}$$

  - Evénement *C* : Obtenir un nombre pair

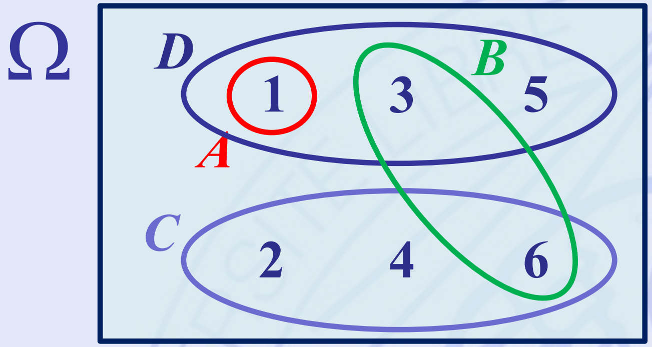
$$C = \{2,4,6\}$$

  - Evénement *D* : Obtenir un nombre impair

$$D = \{1,3,5\}$$

Evénements

- Définition : sous-ensemble de Ω



- Evénements particuliers :
  - Événement simple : ne contient qu'un seul résultat,
  - Événement impossible : ensemble vide,
  - Événement certain : Ω

Famille des événements

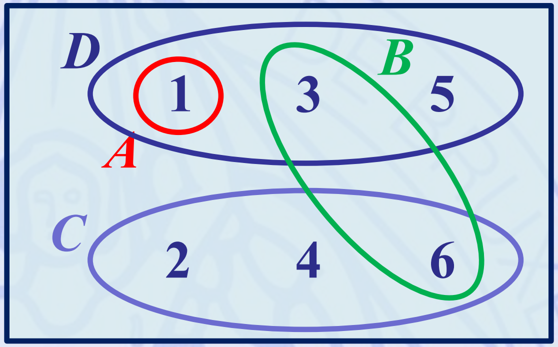
- Si Ω est fini : tout sous-ensemble de Ω correspond à un événement.

- Si Ω est infini : classe de sous-ensembles de Ω, contenant les événements élémentaires, impossible et certains, et tous ceux obtenus à partir des opérations définies ci-après.

Opérations sur les événements

- Similaires aux opérations sur les ensembles.
- Implication (inclusion) :

$$E_1 \subset E_2 \quad \leftrightarrow \quad E_1 \Rightarrow E_2$$



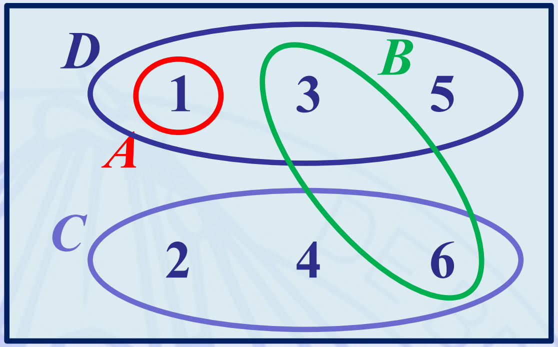
- Conjonction (intersection) :

$$E_1 \cap E_2 \quad \leftrightarrow \quad E_1 \text{ et } E_2$$

- Evénements mutuellement exclusifs :

$$E_1 \cap E_2 = \varnothing$$

Opérations sur les événements



- Disjonction (réunion) :

$$E_1 \cup E_2 \quad \leftrightarrow \quad E_1 \text{ ou } E_2$$

- Différence :

$$E_1 \setminus E_2 \quad \leftrightarrow \quad E_1 \text{ mais pas } E_2$$

- Evénement complémentaire (négation) :

$$\bar{E} = \Omega \setminus E$$

$$E \cap \bar{E} = \varnothing$$

$$E \cup \bar{E} = \Omega$$

E et $\bar{E}$ forment une partition de Ω

Opérations sur les événements

- Partition de E :

$$\{E_1, E_2, \ldots, E_m\}$$

tels que :

$$E_1, E_2, \ldots, E_m \subset E$$

$$E_i \cap E_j = \emptyset \text{ pour } i \neq j$$

$$E = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_m$$

- Système complet d'événements :
  - Partition de Ω.

Exemple 1 – Fraude fiscale

- On estime à 10% le pourcentage de fraudeurs parmi un groupe de contribuables.
- On observe que 24% des fraudeurs font appel à un type de déduction fiscale particulier.
- Seulement 3% des non fraudeurs font appel à ce type de déduction fiscale.
- Si le contrôleur observe cette déduction dans la déclaration de revenus d’un contribuable, quelle est la probabilité que ce contribuable soit un fraudeur ?

Définition classique des probabilités

- N résultats possibles ayant tous la même chance de se réaliser.
- Succès S correspondant à N_S résultats.

→Probabilité de succès :

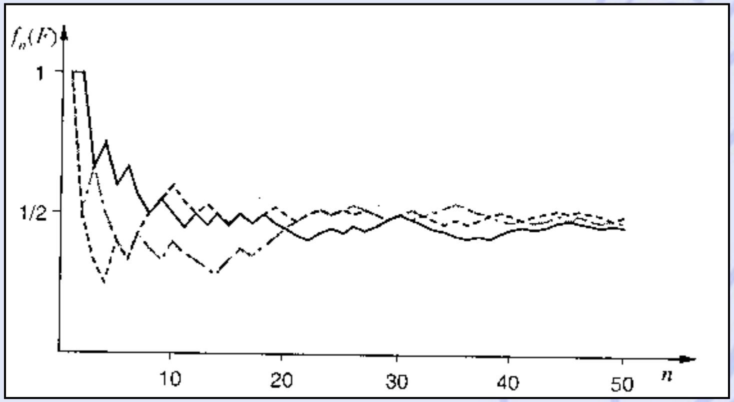
$$P(S) = {N_s}/{N}$$

- Exemple :
  - Lancer d'un dé

$$N = 6 \quad P(\text{nombre pair}) = {3}/{6}$$

Définition fréquentielle des probabilités

- n répétitions de l'expérience aléatoire.
- Nombre de succès : $n(S)$
- Fréquence :



$$f_n(S) = n(S)/n$$

- Probabilité (« fréquence théorique ») :

$$P(S) = \lim_{n\to\infty} f_n(S)$$

Fonction d'ensemble

- Fonction qui associe à chaque événement un nombre réel.
- Exemples : $f_n(E) = n(E)/n$
- Propriétés :

$$f(E) \geq 0 \text{ pour tout } E \subset \Omega$$

$$f(\Omega) = 1$$

$$\text{Pour } E_1, E_2, \ldots \text{ mutuellement exclusifs :}$$

$$f(E_1 \cup E_2 \cup \ldots) = f(E_1) + f(E_2) + \ldots$$

Définition axiomatique des probabilités

- Pour Ω fini :
  - $P()$ est une fonction d'ensemble à valeurs réelles, définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$, avec les axiomes :
    - A1: $$P(E) \geq 0, \text{ pour tout } E$$
    - A2: $$P(\Omega) = 1$$
    - A3: Si $E_1, E_2, E_3, \ldots$ mutuellement exclusifs :
$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots)$$
$$= P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + \ldots$$

Définition axiomatique des probabilités

- Pour Ω infini :
  - L'ensemble des événements est une famille $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ possédant les propriétés suivantes :
    - A1:

$$\Omega \in \mathcal{F}$$

    - A2:

$$E \in \mathcal{F} \quad \Rightarrow \quad \bar{E} \in \mathcal{F}$$

    - A3:

$$E_1, E_2, E_3, \ldots \in \mathcal{F} \quad \Rightarrow \quad \bigcup_i E_i \in \mathcal{F}$$

Propriétés des probabilités

- Si un événement E est partitionné en 2 événements E_1 et E_2 :

$$P(E) = P(E_1) + P(E_2)$$

- Extension à plus de 2 événements.
- Inclusion :

$$E_1 \subset E_2 \quad \Rightarrow \quad P(E_1) \leq P(E_2)$$

Propriétés des probabilités

- Pour tout événement E :

$$P(E) \leq 1$$

- Complémentaire :

$$P(\bar{E}) = 1 - P(E)$$

- Complémentaire de Ω :

$$P(\varnothing) = 0$$

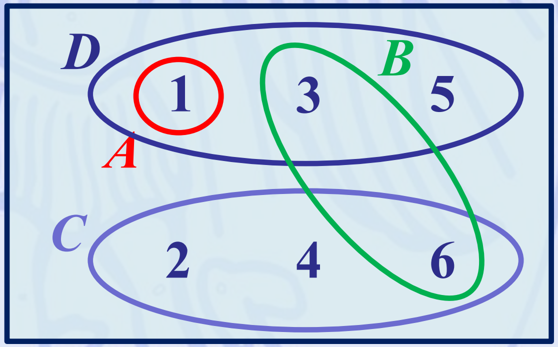
Loi d'addition

- Pour 2 événements :

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

- Exemple :

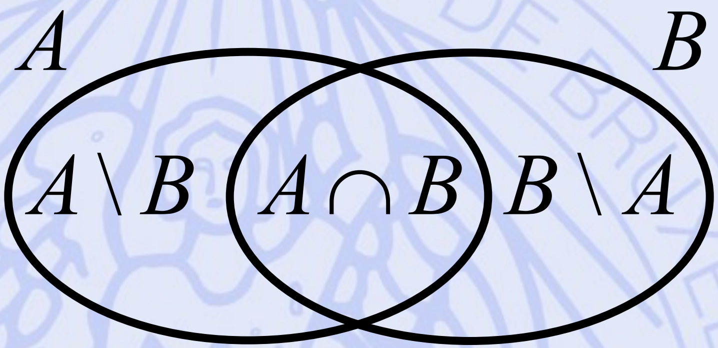
$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$$
$$= \frac{2}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$$



Loi d'addition

- Démonstration :

$$
\begin{aligned}
A\cup B &= (A\setminus B)\cup(A\cap B)\cup(B\setminus A)\\
P(A\cup B) &= P(A\setminus B)+P(A\cap B)+P(B\setminus A)\\
&= P(A)-P(A\cap B)\\
&\quad +P(A\cap B)\\
&\quad +P(B)-P(A\cap B)
\end{aligned}
$$

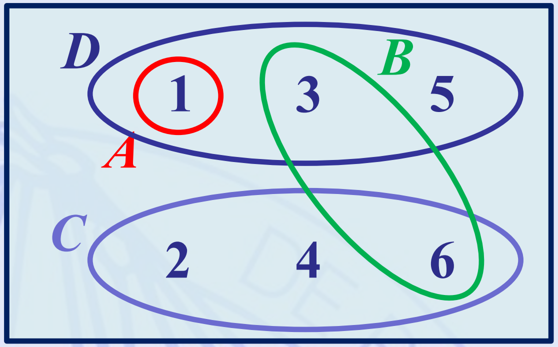


- Si A et B sont mutuellement exclusifs :

$$A\cap B=\varnothing$$

$$\Rightarrow \quad P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

Probabilité conditionnelle



- Exemple :
  - Supposons que C se soit réalisé :

$$P(B \mid C) = \frac{1}{3} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{P(B \cap C)}{P(C)}$$

Condition

  - Supposons que B se soit réalisé :

$$P(C \mid B) = \frac{1}{2} = \frac{1/6}{2/6} = \frac{P(B \cap C)}{P(B)}$$

Probabilité conditionnelle

- Définition :
  Probabilité conditionnelle de A étant donné B :

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$\text{avec } P(B)\neq 0$$

Régle de multiplication

- Pour 2 événements :

$$P(A) \neq 0 \quad P(B) \neq 0$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B \mid A)$$

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A \mid B)$$

- Exemple : tirage de 2 cartes sans remise dans un jeu de 52 cartes

$$P(2 \text{ rois}) = P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \times P(R_2 \mid R_1)$$

$$= \frac{4}{52} \times \frac{3}{51} = \frac{1}{221}$$

Règle de multiplication

- Pour 3 événements :

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B \mid A) \times P(C \mid A \cap B)$$

- Exemple : tirage de 3 cartes sans remise dans un jeu de 52 cartes

$$P(3 \text{ rois}) = P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = P(R_1) \times P(R_2 \mid R_1) \times P(R_3 \mid R_1 \cap R_2)$$

$$= \frac{4}{52} \times \frac{3}{51} \times \frac{2}{50} = \frac{1}{5525}$$

- Généralisation à plus de 3 événements.

Indépendance stochastique

- Pour 2 événements :
  A et B sont (stochastiquement) indépendants ssi :

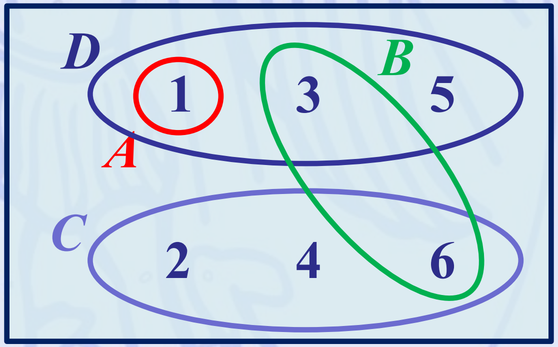
$$P(A|B)=P(A) \quad P(B|A)=P(B)$$

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$

- Exemple :

$$P(B\cap C)=\frac{1}{6}$$

$$P(B)\times P(C)=\frac{2}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{6}$$



Indépendance stochastique

- Pour 3 événements :
  A, B et C sont indépendants ssi :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$P(A \cap C) = P(A) \times P(C)$$

$$P(B \cap C) = P(B) \times P(C)$$

et

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$$

- Généralisation à plus de 3 événements.

Exemple 1 – Fraude fiscale

$$P(\text{fraudeur}) = 0,10$$

$$P(\text{déduction} \mid \text{fraudeur}) = 0,24$$

$$P(\text{déduction} \mid \text{pas fraudeur}) = 0,03$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} P(\text{déduction}) &= P(\text{déduction} \cap \text{fraudeur}) \\ &\quad + P(\text{déduction} \cap \text{pas fraudeur}) \\ &= 0,10 \times 0,24 + 0,90 \times 0,03 = 0,024 + 0,027 = 0,051 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\text{fraudeur} \mid \text{déduction}) &= \frac{P(\text{fraudeur} \cap \text{déduction})}{P(\text{déduction})} \\ &= \frac{0,024}{0,051} = 0,471 \rightarrow 47,1\% \end{aligned}$$

Probabilités totales

- Soit un système complet d'événements :
  - Partition de Ω $\{E_1, E_2, \ldots, E_m\}$

    telle que $P(E_i) > 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$

- Théorème des probabilités totales :

$$\forall A: \quad P(A) = \sum_{i=1}^{m} P(E_i) P(A \mid E_i)$$

Probabilités totales

- Exemple : Une société pétrolière envisage l'opportunité d'un forage sur un nouveau site. Trois cas sont possibles :
  - Pas de pétrole (rien),
  - Peu de pétrole (peu),
  - Beaucoup de pétrole (bcp).
- Probabilités a priori (expériences passées):

$$P(\text{rien}) = 0,7 \quad P(\text{peu}) = 0,2 \quad P(\text{bcp}) = 0,1$$

Probabilités totales

- Test séismique en vue d'obtenir plus d'information sur le terrain :
- 3 résultats possibles : Potentiel du terrain
  - Bas, Moyen, Elevé
  - Précision du test :

$$P(\text{élevé} \mid \text{rien}) = 0,04$$

$$P(\text{élevé} \mid \text{peu}) = 0,02$$

$$P(\text{élevé} \mid \text{bcp}) = 0,96$$

Probabilités totales

- Probabilité d'obtenir un potentiel élevé ?
- Système complet : rien, peu, bcp

$$
\begin{aligned}
&P(\text{élevé})\\
&= P(\text{rien}) \times P(\text{élevé} \mid \text{rien})\\
&+ P(\text{peu}) \times P(\text{élevé} \mid \text{peu})\\
&+ P(\text{bcp}) \times P(\text{élevé} \mid \text{bcp})\\
&= 0,7 \times 0,04 + 0,2 \times 0,02 + 0,1 \times 0,96 = 0,128
\end{aligned}
$$

Théorème de Bayes

- Soit un système complet d'événements :

$$\{E_1, E_2, \ldots, E_m\}$$

- Soit A un événement quelconque :
  - Probabilités a priori :

$$P(E_i)$$

  - Probabilités a posteriori :

$$P(E_i \mid A) = \frac{P(E_i) \times P(A \mid E_i)}{\sum_{j=1}^{m} P(E_j) \times P(A \mid E_j)}$$

Théorème de Bayes

- Exemple : site pétrolier

  probabilité a posteriori :

$$P(\text{rien} \mid \text{élevé}) = \frac{P(\text{rien})\,P(\text{élevé} \mid \text{rien})}{P(\text{élevé})}$$

$$= \frac{0,7 \times 0,04}{0,128} = 0,21875$$

Analyse combinatoire

- Détermination du nombre de possibilités logiques de l'existence d'un certain événement.
- Principe de comptage : Si un certain événement peut être réalisé de n_1 façons différentes et si, suivant cet événement, un second événement peut être réalisé de n_2 façons différentes, alors le nombre de façons différentes dont les deux événements peuvent se réaliser est $n_1 \times n_2$
- Exemple : Nombre de plaques minéralogiques (chiffre «1» puis 3 lettres suivies de 3 chiffres) :

$$26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 = 17{,}576{,}000$$

Permutations et factorielles

- Permutation : Tout arrangement d'un ensemble de n objets dans un ordre donné.
- Nombre de permutations de n objets :

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$$

- Exemples :

$$2! = 2 \quad 3! = 6 \quad 4! = 24 \quad 5! = 120 \quad 6! = 720$$

$$ABC \quad ACB \quad BAC \quad BCA \quad CAB \quad CBA$$

  - Comment affecter 4 employés à 4 tâches ?

$$4! = 24 \text{ possibilités}$$

Arrangements

- Sélection (ordonnée) de r objets parmi n
- Nombre d'arrangements :

$$ {}_nP_r = n\times(n-1)\times \ldots \times(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} $$

- Exemple : De combien de façons peut-on affecter 2 des 4 employés à 2 tâches ?

$$ {}_4P_2 = \frac{4!}{2} = \frac{4\times3\times2\times1}{2} = 12 $$

Combinaisons

- Sélection (non ordonnée) de r objets parmi n
- Nombre de combinaisons :

$$\binom{n}{r} = {}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n!}{r! \times (n-r)!}$$

- Exemple : Comment affecter 2 des 4 employés à 2 tâches (sans se préoccuper de l'ordre d'affectation) ?

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

Formule du binôme

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^r b^{n-r}$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

- Pour un événement E :

$$P(E) = p \quad \text{et} \quad P(\bar{E}) = 1 - p = q$$

$$(p+q)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} p^r q^{n-r} = 1$$

Formule du binôme

- Schéma de Bernoulli :
  - Expérience aléatoire $\mathcal{E}$ pouvant donner lieu à un événement E

$$P(E) = p \quad \text{et} \quad P(\bar{E}) = 1 - p = q$$

  - $\mathcal{E}$ est répétée n fois de façon indépendante et dans des conditions uniformes.
  - Exemple : on lance 4 fois un dé, E = { obtenir le 6 }

$$p = \frac{1}{6} \qquad q = \frac{5}{6}$$

Formule du binôme

- Quelques résultats :

1° $P(\text{observer } E \ n \text{ fois}) = p \times p \times \ldots \times p = p^n$

2° $P(\text{observer } E \ 0 \text{ fois}) = q \times q \times \ldots \times q = q^n$

3° $P(\text{observer } E \text{ au moins 1 fois}) = 1 - q^n$

4° $P(\text{observer } E \ r \text{ fois, dans un ordre donné}) = p^r q^{n-r}$

5° $P(\text{observer } E \ r \text{ fois}) = \binom{n}{r} p^r q^{n-r}$

Formule du binôme

- Exemple : 4 lancés d'un dé

$$P(1 \text{ fois le } 6) = \binom{4}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^3 = 4 \times \frac{1}{6} \times \frac{125}{216} = \frac{125}{324}$$

6XXX X6XX XX6X XXX6

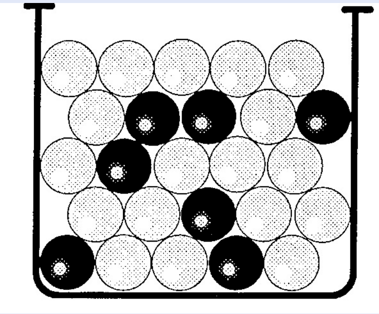
$$P(2 \text{ fois le } 6) = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2 = 6 \times \frac{1}{36} \times \frac{25}{36} = \frac{25}{216}$$

66XX 6X6X 6XX6

X66X X6X6 XX66

Prélèvements

- On prélève n éléments parmi N.
- Les N éléments sont répartis en deux catégories.
- Exemple : urne remplie de boules noires et blanches.



A	noire	N_1
$\bar{A}$	blanche	N_2
	Total	N

Prélèvement avec remise

- Formule du binôme

$$P(r \text{ fois } A) = \binom{n}{r} p^r q^{n-r}$$

$$\text{avec} \quad p = \frac{N_1}{N} \quad \text{et} \quad q = \frac{N_2}{N}$$

Prélèvement sans remise

- Formule hypergéométrique

$$P(r \text{ fois } A) = \frac{\binom{N_1}{r}\binom{N_2}{n-r}}{\binom{N}{n}}$$

$$\text{si} \quad r \leq N_1 \quad \text{et} \quad n - r \leq N_2$$

Prélèvements

- Sans remise → avec remise :

$$\frac{\binom{N_1}{r}\binom{N_2}{n-r}}{\binom{N}{n}} \xrightarrow[N_1, N_2 \to \infty]{\frac{N_1}{N}=p} \binom{n}{r} p^r q^{n-r}$$

- Extension à plus de 2 catégories d'éléments.

Plan du cours

1. Introduction
2. Statistique descriptive – séries univariées
3. Calcul des probabilités
4. Arbres de décision
5. Variables aléatoires et lois de probabilité
6. Statistique descriptive – séries bivariées
7. Méthodes de prévision

« Decision Analysis »

- Prise de décisions en avenir incertain.
- Modèle : arbre de décision.
- Méthode d’analyse générale.
- Besoin du calcul des probabilités.
- Notion d’espérance mathématique.

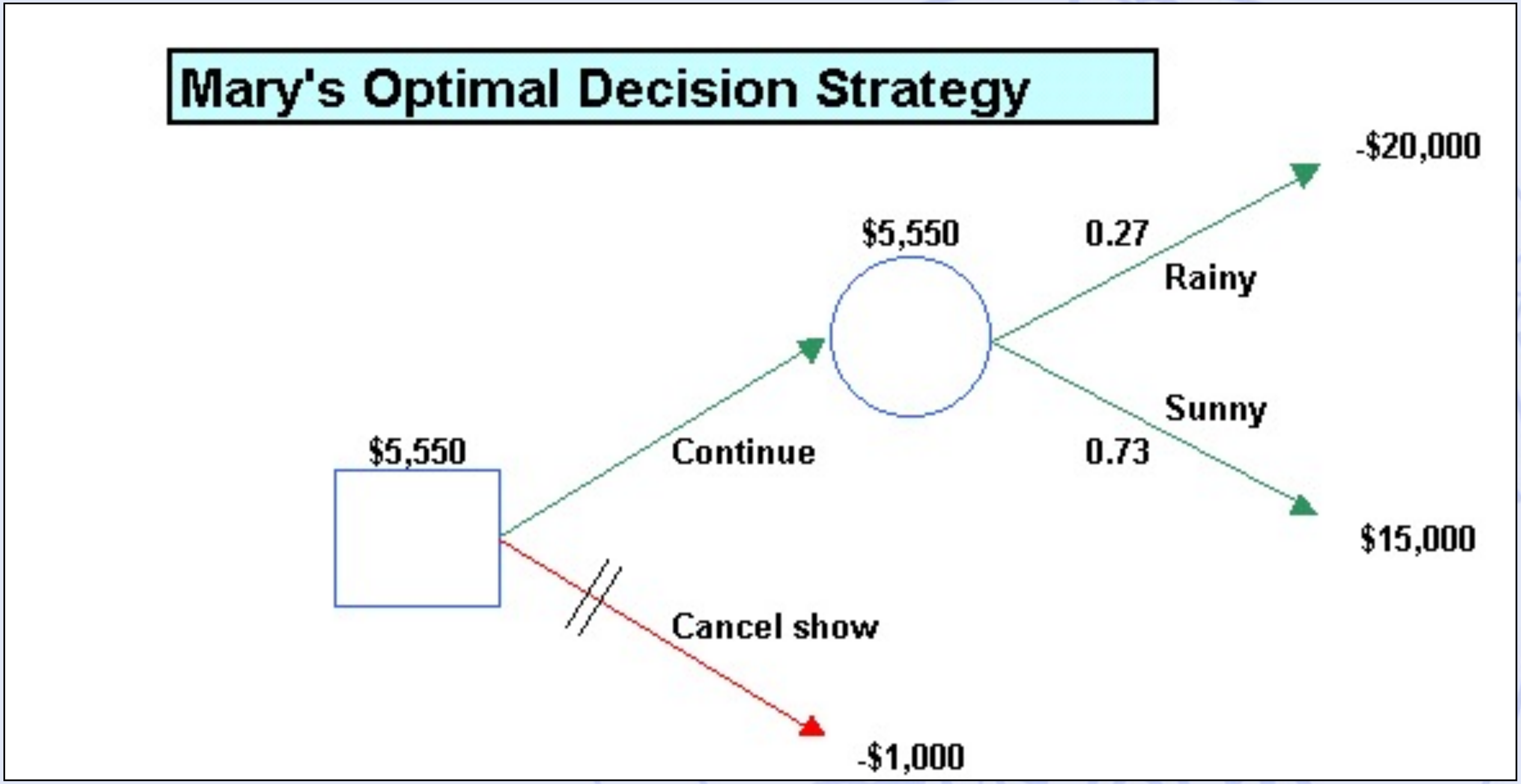
Un 1er exemple simple

EXERCISE 1.1 Mary is organizing a special outdoors show which will take place on August 15. The earnings from the show will depend heavily on the weather. If it rains on August 15, the show will lose \$20,000; if it is sunny on August 15, the show will earn \$15,000. Historically, the likelihood of it raining on any given day in mid-August is 27%. Suppose that today is July 31. Mary has the option of canceling the show by the end of the day on July 31, but if she does so, she will then lose her \$1,000 deposit on the facilities.

(a) What is Mary's optimal decision strategy?

(b) Suppose that Mary can also cancel the show on August 14, but if she waits until then to do so, she must pay a fee of \$10,000. The advantage of waiting until August 14 is that she can listen to the weather forecast for the next day on the local news station. According to station records, the weather was forecast to be sunny 90% of the days in mid-August in previous years. Also, when the weather was forecast to be sunny, it turned out to be sunny 80% of the time. When the weather was forecast to be rainy, it turned out to be rainy 90% of the time. What is Mary's optimal decision strategy in this case?

Un 1er exemple simple



Noeuds

- Nœuds de décision :
  - Représentés par des carrés
  - chaque branche correspond à une décision possible
- Nœuds de la nature (événements) :
  - représentés par des cercles
  - chaque branche correspond à un état possible de la nature (résultat, « outcome »), avec sa probabilité de réalisation

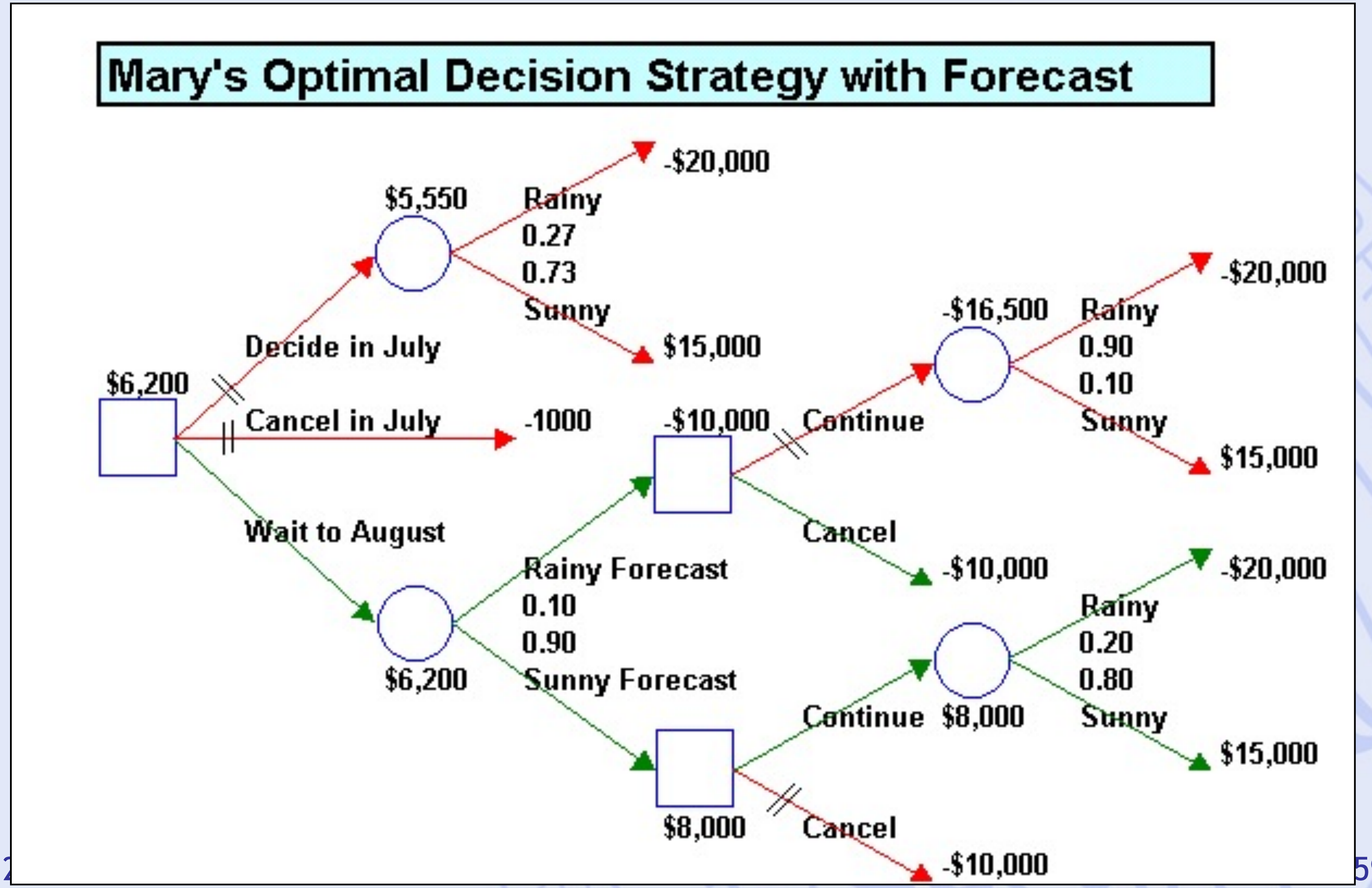
Un critère numérique : l'EMV

- « Expected Monetary Value » :
  - Espérance de « gain ».
  - Espérance mathématique.
  - L'EMV associée à un événement incertain est la somme de tous les résultats numériques possibles pondérés par leurs probabilités de réalisation respectives.
- Autres critères possibles :
  - Utilité, attitude face au risque.

Analyse de l’arbre de décision (« Backwards induction »)

- Commencer par les nœuds terminaux de l’arbre
  - Pour un nœud événement, l’EMV est la moyenne pondérée des EMV de chaque branche issue de ce nœud, pondérées par leurs probabilités.
  - Pour un nœud de décision, l’EMV correspond à la branche issue de ce nœud qui permet d’obtenir la meilleure EMV.
- L’EMV du nœud initial de l’arbre correspond à la stratégie optimale de décision.

Un exemple un peu moins simple



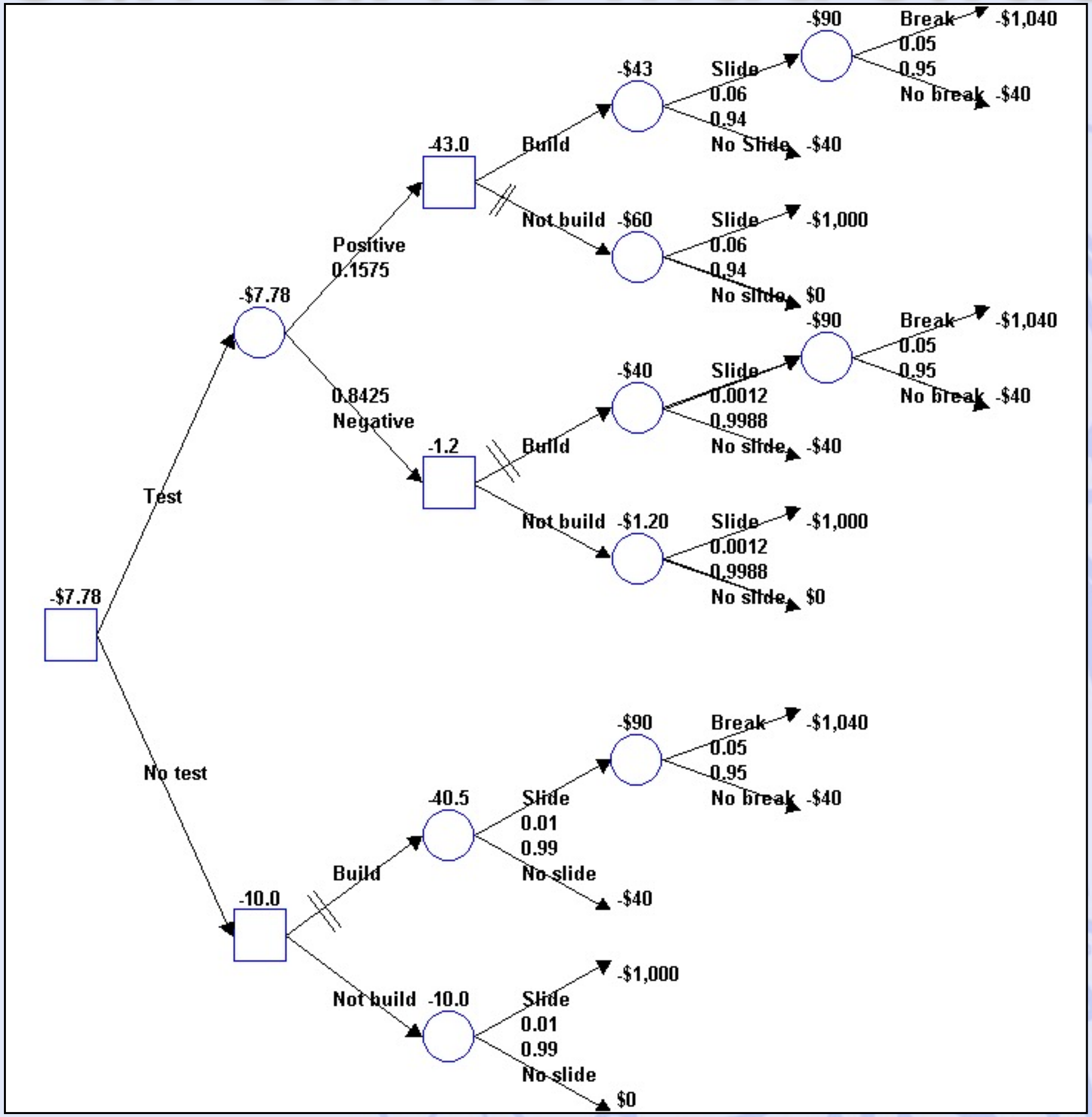
Exemple 2
San Carlos mud slides

Extensive logging has exposed a hillside in San Carlos to the possibility of a mudslide. Reforestation is underway, but it will be a year before the new vegetation will be mature enough to remove the danger. If a slide occurs in the interim, human injuries will be avoided because mud moves slowly. The damage from such a slide would be limited to the road that passes beneath the hill. Construction of a retaining wall on the uphill side of the road has been suggested as a possible step to prevent this damage.

The Mayor of San Carlos is puzzled by the uncertainty concerning the issue. He has consulted with an expert who states that there is only one chance in 100 that a slide will occur within the next year. The expert adds that roughly 5% of all such slides break through retaining walls like the one proposed. The retaining wall would cost $40,000 to build. The road would cost about $1,000,000 to repair if damaged by a mudslide.

The expert points out that she can better assess the likelihood of a slide occurring in the next year if she conducts a geological test of the igneous rock layer below the hillside. Like any test, this one is imperfect. A positive test outcome would indicate a higher chance of a slide than a negative test outcome. The test has been conducted at sites at which slides eventually occurred and at sites at which slides did not subsequently occur. The information from these previous tests can be summarized as follows. Positive test outcomes had been reported on 90% of the sites at which slides subsequently occurred. Negative test results had been reported at 85% of the sites at which slides did not subsequently occur.

Exemple 2
San Carlos mud slides



Plan du cours

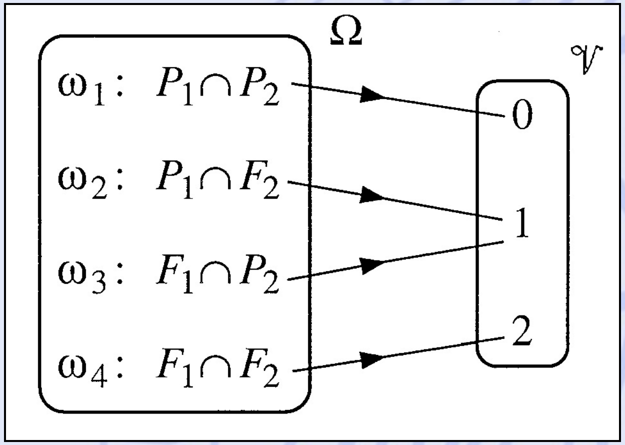
1. Introduction
2. Statistique descriptive – séries univariées
3. Calcul des probabilités
4. Arbres de décision
5. Variables aléatoires et lois de probabilité
6. Statistique descriptive – séries bivariées
7. Méthodes de prévision

Variable aléatoire

- Variable dont la valeur est déterminée par le résultat d'une expérience aléatoire.
- Exemples :
  - Nombre de fois où on obtient « face » en lançant deux pièces de 1€.
  - Somme des points obtenus en lançant 2 dés.
  - Temps mis pour traiter une transaction à un guichet d'agence bancaire.

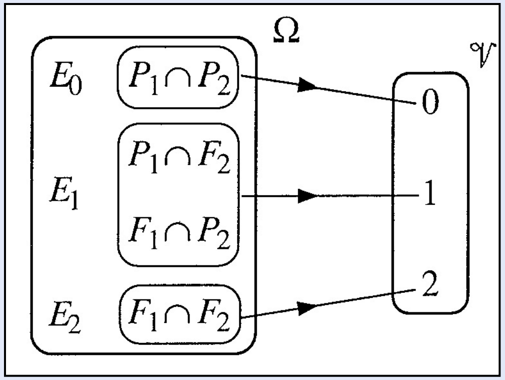
Variable aléatoire

- Exemple : lancer de 2 pièces de 1€
  $\rightarrow$ nombre X de « face » obtenus ?



- E_x : événement composé des résultats associés à la valeur x

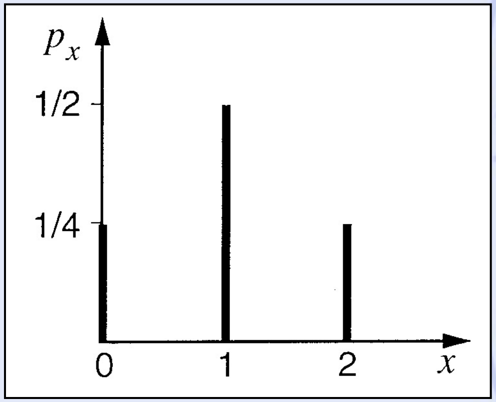
Variable aléatoire



$$P(E_0) = \frac{1}{4}$$

$$P(E_1) = \frac{1}{2}$$

$$P(E_2) = \frac{1}{4}$$



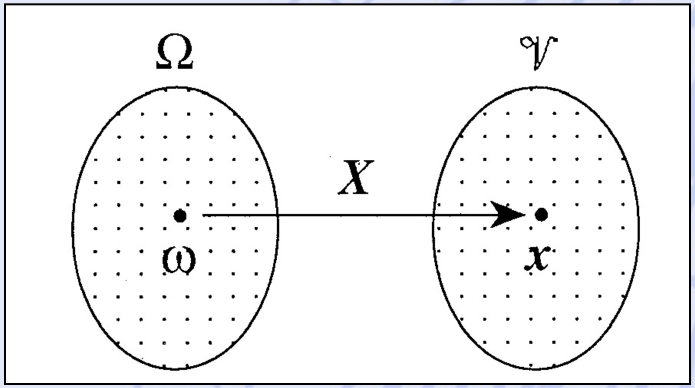
$$P(X = 0) = \frac{1}{4}$$

$$P(X = 1) = \frac{1}{2}$$

$$P(X = 2) = \frac{1}{4}$$

Variable aléatoire

- Définition : fonction définie sur Ω à valeurs dans un ensemble $\mathcal{V}$.



- A chaque ω de Ω, on associe une valeur x :

$$x = X(\omega)$$

Variable aléatoire

- Si $\mathcal{V}$ est un ensemble discret, la v.a. est dite discrète.

$$\{0,1,2,\ldots,n\} \quad Z$$

- Si $\mathcal{V}$ est un ensemble continu, la v.a. est dite continue.

$$[a,b] \quad R$$

Loi d'une v.a. discrète

$$E_x = \{\omega \mid \omega \in \Omega,\ X(\omega) = x\}$$

$$p_x = P_X(x) = P(X = x) = P(E_x)$$

- Loi de probabilité (DP) de X :

$$\{(x, p_x), x \in \mathcal{V}\}$$

- ssi :

$$\begin{cases} p_x \geq 0 & \forall x \in \mathcal{V} \\ \sum_x p_x = 1 \end{cases}$$

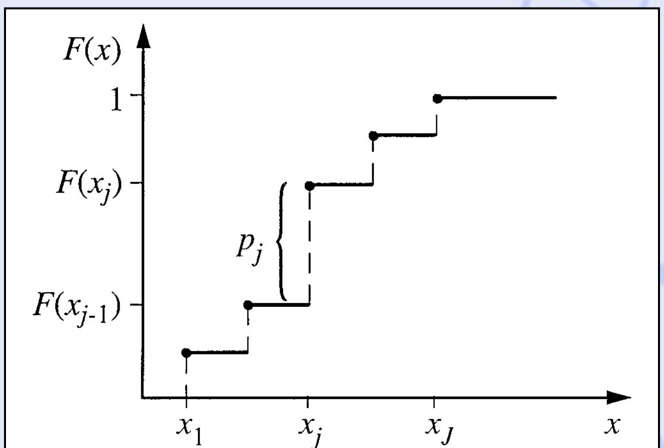
Fonction de répartition

- Définition :

$$F(x) = P(X \leq x) \quad x \in R$$

- Pour une DP discrète :

$$\{(x, p_x), x \in \mathcal{V}\} \qquad \{(x_j, p_j), j = 1, \ldots, J\}$$



$$F(x) = \sum_{x_j \leq x} p_j$$

Fonction de répartition

- Propriétés

$$0 \leq F(x) \leq 1$$

$$F(-\infty) = 0 \quad F(+\infty) = 1$$

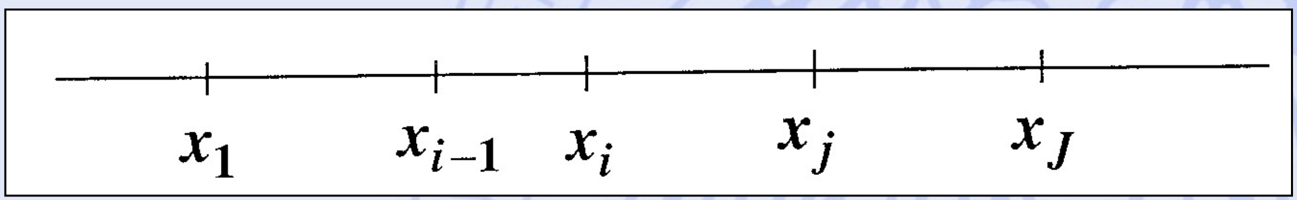
$$F(a) \leq F(b) \quad \forall a \leq b$$

$$\begin{aligned} P(a < X \leq b) &= P(X \leq b) - P(X \leq a) \\ &= F(b) - F(a) \qquad (a < b) \end{aligned}$$

Fonction de répartition

- Si x_i et x_j sont deux valeurs prises par X, avec $x_i \leq x_j$

$$P\left(x_i \leq X \leq x_j\right) = F\left(x_j\right) - F\left(x_{i-1}\right)$$



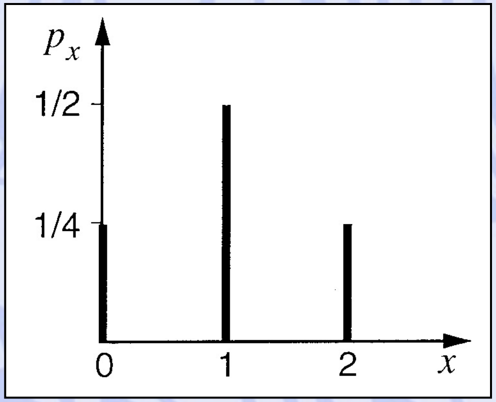
- Cas particulier :

$$P\left(X = x_j\right) = F\left(x_j\right) - F\left(x_{j-1}\right)$$

Paramètres d'une loi discrète

- Moyenne
  - DO : $$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_j n_j x_j = \sum_j f_j x_j$$
  - DP : $$\mu = \sum_j p_j x_j \qquad \mu = \sum_x p_x x$$
- Exemple : lancer des 2 pièces

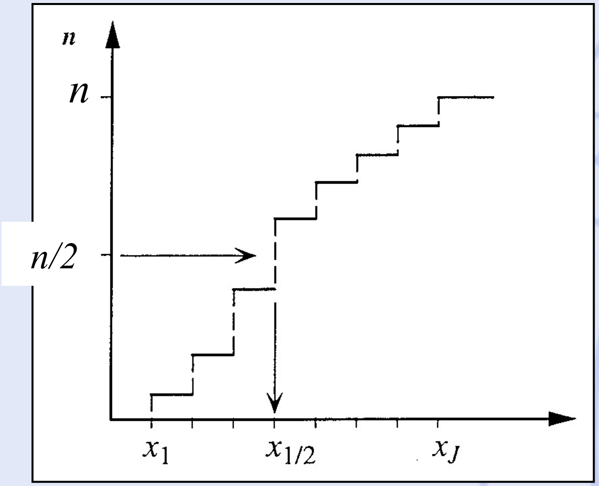
$$\mu = \frac{1}{4}\times 0 + \frac{1}{2}\times 1 + \frac{1}{4}\times 2 = 1$$



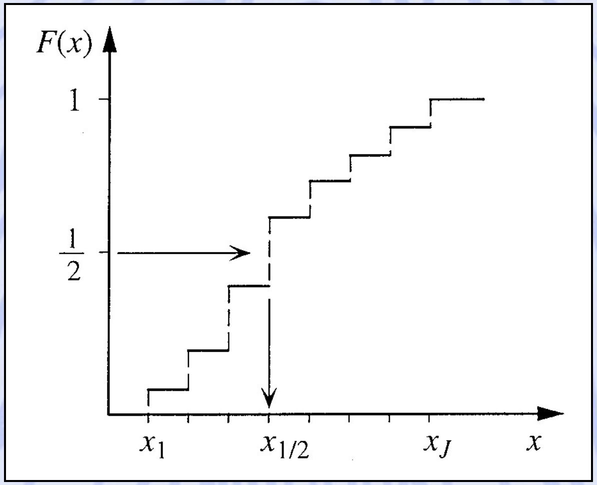
Paramètres d'une loi discrète

- Médiane : cf. distribution observée

DO



DP



Paramètres d'une loi discrète

- Variance :
  - DO : $$s^2 = \sum_j f_j \left(x_j - \bar{x}\right)^2 \quad \text{avec } f_j = \frac{n_j}{n}$$
  - DP : $$\sigma^2 = \sum_j p_j \left(x_j - \mu\right)^2$$ $$\sigma^2 = \sum_x p_x \left(x - \mu\right)^2$$
  - Exemple : lancer des 2 pièces de 1€

$$\sigma^2 = \frac{1}{4} \times (0-1)^2 + \frac{1}{2} \times (1-1)^2 + \frac{1}{4} \times (2-1)^2 = \frac{1}{2}$$

- Ecart-type :

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Espérance mathématique

- Exemple : On lance un dé.
  - « 6 » : gain de 12€
  - Point impair : gain de 2€
  - Point pair (autre que 6) : gain de 0€

  - Espérance de gain :

$$\frac{1}{6}\times 12€+\frac{3}{6}\times 2€+\frac{2}{6}\times 0€=3€$$

Espérance mathématique

- Définition :
  - Variable aléatoire X $\quad \{(x, p_x), x \in \mathcal{V}\}$
  - Fonction $\quad X \to g(X) \quad : \quad x \to g(x)$
  - Espérance mathématique :

$$E(g(X)) = \sum_x p_x g(x)$$

- Cf. Espérance de gain (jeux de hasard).

Espérance mathématique

- Cas particuliers :
  - Moyenne :

$$g(X)=X \quad \Rightarrow \quad g(x)=x$$

$$E(X)=\sum_x p_x x=\mu$$

  - Variance :

$$g(X)=(X-\mu)^2 \quad \Rightarrow \quad g(x)=(x-\mu)^2$$

$$E\left((X-\mu)^2\right)=\sum_x p_x (x-\mu)^2=\sigma^2$$

$$\rightarrow \quad \sigma^2=E\left((X-E(X))^2\right)$$

Espérance mathématique

- Propriété 1 :
  Si b est une constante :

$$E(b) = b$$

- Démonstration :

$$E(b) = \sum_x p_x b = b \underbrace{\sum_x p_x}_{1} = b$$

Espérance mathématique

- Propriété 2 :
  Si a est une constante :

$$E(aX) = aE(X)$$

- Démonstration :

$$E(aX) = \sum_x p_x(ax) = a\sum_x p_x x = aE(X)$$

Espérance mathématique

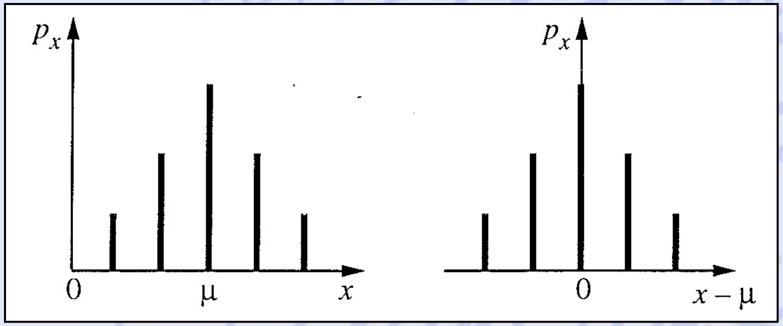
- Propriété 3 :
  Si a et b sont des constantes :
  $$E(aX+b)=aE(X)+b$$
- Démonstration :

$$E(aX+b)=\sum_x p_x(ax+b)$$
$$=a\sum_x p_x x+b\sum_x p_x$$
$$=aE(X)+b$$

Espérance mathématique

- Propriété 4 : Variable centrée
  Si X est une v.a. et $\mu = E(X)$:

$$\text{Variable centrée } Y = X - \mu \quad \rightarrow \quad E(Y) = 0$$



- Démonstration : application de la propriété 3 avec :

$$a = 1 \quad b = -\mu$$

Espérance mathématique

- Propriété 5 :
  Si a et b sont deux constantes, et $g(X)$ et $h(X)$ deux fonctions de X à valeurs réelles :

$$E\left(ag\left(X\right)+bh\left(X\right)\right)=aE\left(g\left(X\right)\right)+bE\left(h\left(X\right)\right)$$

- Démonstration : exercice !

Variance

- Notation : $V(X)=E\left(\left(X-E(X)\right)^2\right)=\sigma^2$
- Propriété 1 :
  Si b est une constante :

$$V(b)=0$$

- Démonstration :

$$V(b)=\sum_x p_x\left(b-\underbrace{E(b)}_{b}\right)^2=0$$

Variance

- Propriété 2 :
  Si a est une constante :

$$V(aX) = a^2 V(X)$$

- Démonstration :

$$\begin{aligned} V(aX) &= E\left(\left(aX - E(aX)\right)^2\right) \\ &= E\left(\left(aX - aE(X)\right)^2\right) \\ &= E\left(a^2\left(X - E(X)\right)^2\right) \\ &= a^2 E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) = a^2 V(X) \end{aligned}$$

Variance

- Propriété 3 : Variable centrée

$$Y = X - \mu \quad \rightarrow \quad V(Y) = V(X)$$

- Démonstration :

$$\begin{aligned} V(Y) &= E\left(\left(Y - E(Y)\right)^2\right) \\ &= E\left(\left(\left(X-\mu\right) - \underbrace{E\left(X-\mu\right)}_{0}\right)^2\right) \\ &= E\left(\left(X-\mu\right)^2\right) = V(X) \end{aligned}$$

Variance

- Propriété 4 :
  Si c est une constante : $V(X+c)=V(X)$
- Démonstration : exercice !
- Propriété 5 : Variable centrée réduite

$$\mu = E(X)$$

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \quad \rightarrow \quad V(Z)=1$$

- Démonstration :

$$V(Z)=\frac{1}{\sigma^2}V(X-\mu)=\frac{1}{\sigma^2}V(X)=1$$

Moments

- Définition : moment d'ordre r par rapport à c

$$\mu_r(c) = E\left((X-c)^r\right)$$

$$r \in N$$
$$c \in R$$

- Cas particuliers :
  - Moment par rapport à l'origine ($c = 0$)

$$\mu'_r = E(X^r) = \sum_x p_x x^r$$

  - Moment centré ($c = \mu$)

$$\mu_r = E\left((X-\mu)^r\right)$$

Moments

- Moments d'ordre 0 :

$$\mu_0' = \mu_0 = 1$$

- Moments d'ordre 1 :

$$\mu_1' = E(X) = \mu \qquad \mu_1 = 0$$

- Moments d'ordre 2 :

$$\mu_2 = E\left((X-\mu)^2\right) = \sigma^2 = V(X)$$

Moments

- Propriété :

$$\sigma^2 = E\left(X^2\right) - \mu^2 \qquad\qquad \mu_2 = \mu_2' - \mu_1'^2$$

- Dém. σ^2

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E\left(\left(X-\mu\right)^2\right) = E\left(X^2 - 2X\mu + \mu^2\right) \\ &= E\left(X^2\right) - 2\mu \underbrace{E\left(X\right)}_{\mu} + \mu^2 \\ &= E\left(X^2\right) - \mu^2 \end{aligned}$$

- Corrolaire :

$$E\left(X^2\right) = \sigma^2 + \mu^2$$

Fonction génératrice des moments

- Définition :

$$M_X(t) = E\left(e^{tX}\right) = \sum_x p_x e^{tx} \qquad t \in R$$

- Remarque : n'existe pas toujours.
- Propriété : si $M_X(t)$ existe et admet des dérivées d'ordre r :

$$\mu'_r = \left[\frac{d^r M_X(t)}{dt^r}\right]_{t=0}$$

Fonction génératrice des moments

- Démonstration :
  - Développement en série de Mac Laurin :

$$M_X(t) = M_X(0) + t\left[\frac{dM_X(t)}{dt}\right]_{t=0} + \frac{t^2}{2!}\left[\frac{d^2M_X(t)}{dt^2}\right]_{t=0} + \ldots + \frac{t^r}{r!}\left[\frac{d^rM_X(t)}{dt^r}\right]_{t=0} + \ldots$$

  - Développement en série de e^{tx} :

$$M_X(t) = \sum_x p_x\left(1 + tx + \frac{t^2x^2}{2!} + \ldots + \frac{t^rx^r}{r!} + \ldots\right)$$

$$= \underbrace{\sum_x p_x}_{1} + t\underbrace{\sum_x p_x x}_{\mu'_1} + \ldots + \frac{t^r}{r!}\underbrace{\sum_x p_x x^r}_{\mu'_r} + \ldots$$

  - Identification des termes deux à deux (développement unique).

Fonction génératrice des moments

- Exemple : lancer des deux pièces de 1€

$$M_X(t) = \sum_{x=0}^{2} p_x e^{tx} = \frac{1}{4} \times e^0 + \frac{1}{2} \times e^t + \frac{1}{4} \times e^{2t}$$

$$\left[\frac{dM_X(t)}{dt}\right]_{t=0} = \left[\frac{1}{2} \times e^t + \frac{1}{2} \times e^{2t}\right]_{t=0} = 1 = \mu$$

$$\left[\frac{d^2 M_X(t)}{dt^2}\right]_{t=0} = \left[\frac{1}{2} \times e^t + e^{2t}\right]_{t=0} = \frac{3}{2} = \mu_2'$$

$$\rightarrow \quad \sigma^2 = \mu_2' - \mu^2 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

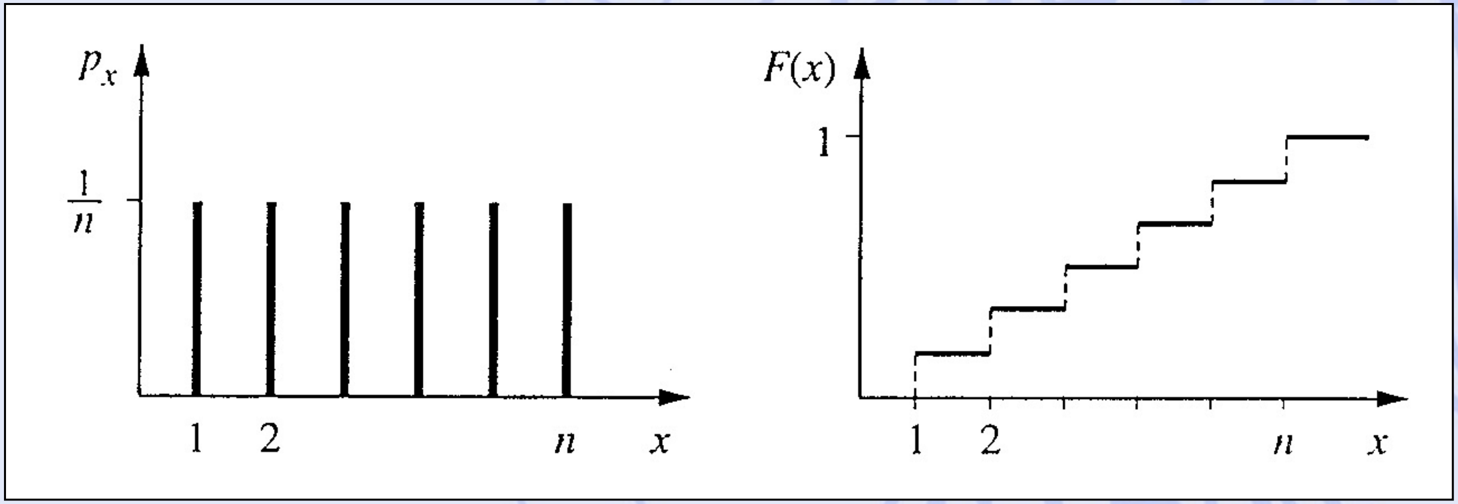
Principales lois discrètes

- Uniforme
- Binomiale
- Bernoulli
- Poisson
- Géométrique
- Binomiale négative
- Hypergéométrique

Distribution uniforme

- Définition : $x \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad p_x = \dfrac{1}{n}$

- Notation : $X \sim U(1, \ldots, n)$



Distribution uniforme

- Exemple : point obtenu en lançant un dé.
- Propriétés :

$$\mu = E(X) = \sum_{x=1}^{n} \frac{1}{n} x = \frac{1}{n} \sum_{x=1}^{n} x = \frac{1}{n} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

$$E(X^2) = \sum_{x=1}^{n} \frac{1}{n} x^2 = \frac{1}{n} \sum_{x=1}^{n} x^2 = \frac{1}{n} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\rightarrow \quad \sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4}$$

Distribution uniforme

- Propriétés :

$$\mu_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta_1 = \gamma_1 = 0 \quad \text{(symétrie)}$$

$$\mu_4 = \frac{(n^2-1)(3n^2-7)}{20}$$

$$\Rightarrow \quad \beta_2 = \frac{3(3n^2-7)}{5(n^2-1)} \qquad \gamma_2 = -\frac{6(n^2+1)}{5(n^2-1)}$$

Distribution binomiale

- Schéma de Bernoulli (rappel) :
  - Expérience aléatoire $\mathcal{E}$ pouvant donner lieu à un événement E (succès)

$$P(E) = p \quad \text{et} \quad P(\bar{E}) = 1 - p = q$$

  - $\mathcal{E}$ est répétée n fois de façon indépendante et dans des conditions uniformes.
  - Exemple : on lance 4 fois un dé,
    E = { obtenir le 6 }

$$p = \frac{1}{6} \quad q = \frac{5}{6}$$

Distribution binomiale

- Nombre de succès (réalisations de E): X
- Distribution de X : distribution binomiale

$$x \in \{0,1,2,\ldots,n\}$$

$$p_x = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

- Cf. formule du binôme.
- Notation : $X \sim B(n,p)$

Distribution binomiale

- Exemple : nombre de « 6 » sur 4 lancers d'un dé

$$X \sim B(4;1/6)$$

- Fonction génératrice des moments :

$$M(t) = E\left(e^{tX}\right) = \sum_{x=0}^{n} e^{tx} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} \left(pe^t\right)^x q^{n-x} = \left(pe^t + q\right)^n$$

Distribution binomiale

- Moyenne :

$$\mu = \mu_1' = \left[\frac{dM(t)}{dt}\right]_{t=0}$$

$$= \left[n\left(pe^t + q\right)^{n-1} pe^t\right]_{t=0}$$

$$= n\left(p+q\right)^{n-1} p = np$$

- Exemple :

$$\mu = 4 \times \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

Distribution binomiale

- Variance :

$$\mu_2' = \left[\frac{d^2M(t)}{dt^2}\right]_{t=0}$$

$$= np\left[(n-1)\left(pe^t+q\right)^{n-2} pe^{2t} + \left(pe^t+q\right)^{n-1} e^t\right]_{t=0}$$

$$= np\left[(n-1)\,p+1\right] = np\left(np+q\right)$$

$$\Rightarrow \quad \sigma^2 = \mu_2 = \mu_2' - \mu^2$$

$$= n^2p^2 + npq - n^2p^2 = npq$$

- Exemple :

$$\sigma^2 = 4\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6} = \frac{5}{9}$$

Distribution binomiale

- Autres paramètres :

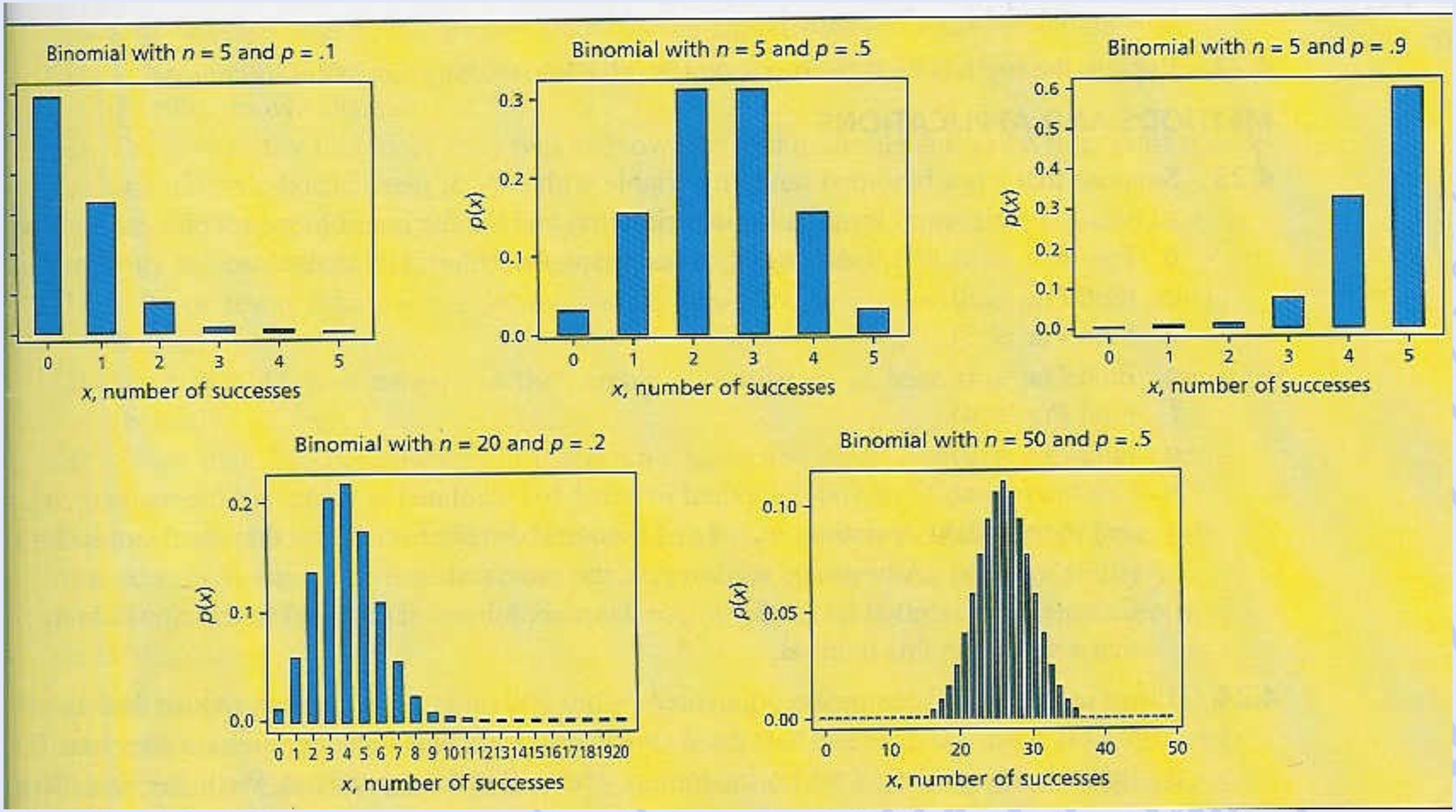
$$\mu_3 = npq\left(q - p\right)$$

$$\mu_4 = npq\left(1 - 6pq + 3npq\right)$$

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{q-p}{\sqrt{npq}} \qquad \begin{cases} \gamma_1 = 0 \text{ si } p = q = \dfrac{1}{2} \\ \gamma_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{cases}$$

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{1-6pq}{npq}$$

Distribution binomiale



Distribution de Bernoulli

- Cas particulier de la binomiale : variable indicatrice

$$I_E = \begin{cases} 1 & \text{si } E \text{ se réalise (succès)} \\ 0 & \text{sinon (échec)} \end{cases}$$

$$I_E \sim B(1; p)$$

- Schéma de Bernoulli (n répétitions) : nombre de succès

$$X \sim B(n, p) \quad X = \sum_{i=1}^{n} I_i$$

Distribution de Poisson

- Définition :

$$x \in N$$

$$p_x = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \qquad \lambda \in R_0^+$$

- Notation :

$$X \sim P(\lambda)$$

- Remarque :

$$\sum_{x=0}^{\infty} p_x = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1$$

Distribution de Poisson

- Fonction génératrice des moments

$$M(t) = E\left(e^{tX}\right) = \sum_{x=0}^{\infty} p_x e^{tx}$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} e^{tx} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda e^t\right)^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = e^{\lambda\left(e^t - 1\right)}$$

Distribution de Poisson

- Moyenne :

$$\mu = \mu_1' = \left[\frac{dM(t)}{dt} \right]_{t=0} = \left[\lambda e^t e^{\lambda(e^t - 1)} \right]_{t=0} = \lambda$$

- Variance :

$$\mu_2' = \left[\frac{d^2 M(t)}{dt^2} \right]_{t=0} = \lambda \left[e^t e^{\lambda(e^t - 1)} + e^t \lambda e^t e^{\lambda(e^t - 1)} \right]_{t=0} = \lambda + \lambda^2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \sigma^2 &= \mu_2 = \mu_2' - \mu^2 \\ &= \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda \end{aligned}$$

Distribution de Poisson

- Autres paramètres :

$$\mu_3 = \lambda \qquad \mu_4 = \lambda + 3\lambda^2$$

$$\rightarrow \quad \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \qquad \gamma_2 = \frac{1}{\lambda}$$

- Propriété :

$$X \sim B(n,p) \xrightarrow[\substack{n\to\infty \\ p\to 0 \\ np=\lambda}]{} X \sim P(\lambda)$$

Distribution de Poisson

- Démonstration :

$$P(X=x)=\frac{n!}{x!(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x}$$

$$=\frac{n^x}{n^x}\frac{n(n-1)\ldots(n-x+1)}{x!}p^x\frac{(1-p)^n}{(1-p)^x}$$

$$=\frac{(np)^x}{x!}\left[1\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)\right]\frac{1}{(1-p)^x}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n$$

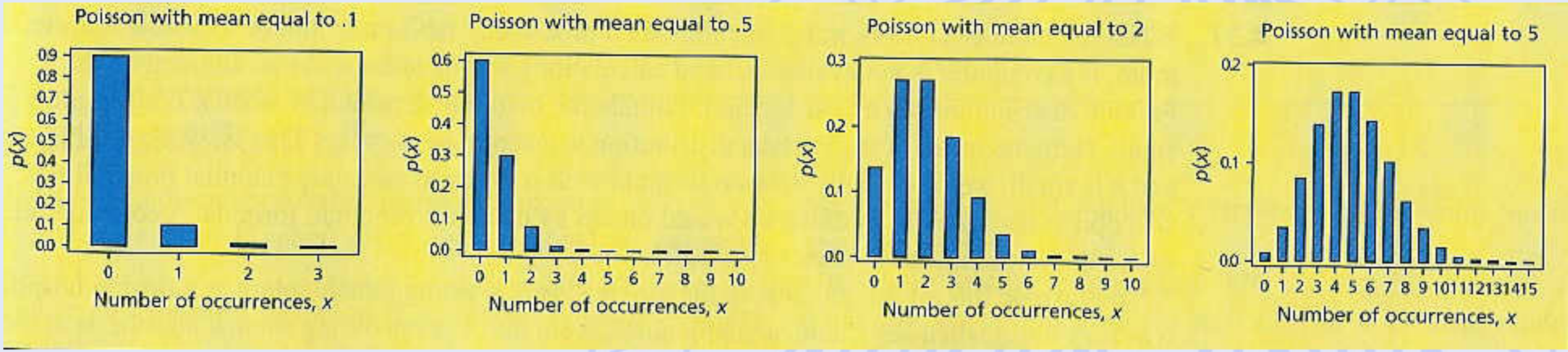
$$P(X=x)\xrightarrow[\substack{n\to\infty\\ p\to 0\\ np=\lambda}]{}\frac{\lambda^x}{x!}\times 1\times 1\times e^{-\lambda}$$

Distribution de Poisson

- Approximation de la binomiale

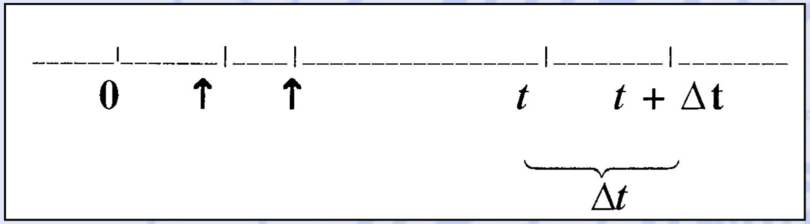
Valeurs de x	$P(X = x)$			$P(X \leq x)$		
	$\mathcal{B}(50; 0{,}10)$	$\mathcal{B}(100; 0{,}05)$	$\mathcal{P}(5)$	$\mathcal{B}(50; 0{,}10)$	$\mathcal{B}(100; 0{,}05)$	$\mathcal{P}(5)$
0	0,0052	0,0059	0,0067	0,0052	0,0059	0,0067
1	0,0286	0,0312	0,0337	0,0338	0,0370	0,0404
2	0,0779	0,0812	0,0842	0,1117	0,1183	0,1247
3	0,1386	0,1396	0,1404	0,2503	0,2578	0,2650
4	0,1809	0,1781	0,1755	0,4312	0,4360	0,4405
5	0,1849	0,1800	0,1755	0,6161	0,6160	0,6160
6	0,1541	0,1500	0,1462	0,7702	0,7660	0,7622
7	0,1076	0,1060	0,1044	0,8779	0,8720	0,8666
8	0,0643	0,0649	0,0653	0,9421	0,9369	0,9319
9	0,0333	0,0349	0,0363	0,9755	0,9718	0,9682
10	0,0152	0,0167	0,0181	0,9906	0,9885	0,9863
11	0,0061	0,0072	0,0082	0,9968	0,9957	0,9945
12	0,0022	0,0028	0,0034	0,9990	0,9985	0,9980
13	0,0007	0,0010	0,0013	0,9997	0,9995	0,9993
14	0,0002	0,0003	0,0005	0,9999	0,9999	0,9998
15	0,0001	0,0001	0,0002	1,0000	1,0000	0,9999
16	ε	ε	0,0001	1,0000	1,0000	1,0000
17	ε	ε	ε			
18	ε	ε	ε			

Distribution de Poisson



Distribution de Poisson

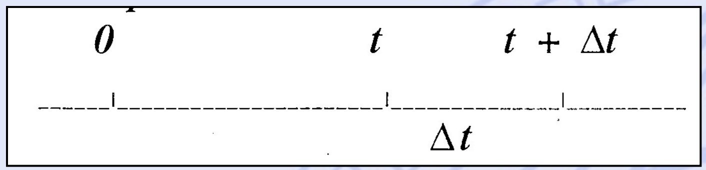
- Processus de Poisson
  - On s'intéresse à l'arrivée d'événements au cours du temps.
  - Ex: arrivée de clients dans une agence bancaire.



  - Soit $p_x(t)$ la probabilité d'avoir x arrivées dans $[0,t]$

Distribution de Poisson

- Hypothèses du processus de Poisson :



  - $P(1 \text{ arrivée dans } \Delta t) = \alpha \Delta t$
  - $P(\text{plus d'1 arrivée dans } \Delta t) \approx 0$
  - Des événements arrivant dans des intervalles disjoints sont indépendants.

Distribution de Poisson

$$p_x(t+\Delta t) = ?$$

$$p_x(t+\Delta t) = p_x(t)(1-\alpha\Delta t) + p_{x-1}(t)\alpha\Delta t$$

$$= p_x(t) - \alpha\Delta t p_x(t) + \alpha\Delta t p_{x-1}(t)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{p_x(t+\Delta t) - p_x(t)}{\Delta t} = \alpha\left(p_{x-1}(t) - p_x(t)\right)$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} : \quad \frac{dp_x(t)}{dt} = \alpha\left(p_{x-1}(t) - p_x(t)\right)$$

$$\begin{cases} p_0(0) = 1 \\ p_x(0) = 0 \quad (x > 0) \end{cases} \rightarrow \quad p_x(t) = \frac{e^{-\alpha t}(\alpha t)^x}{x!}$$

Distribution géométrique

- Définition 1 :
  - Schéma de Bernoulli (n non fixé)
  - Nombre d'essais X précédant le premier succès :

$$x \in N$$

$$p_x = P(X = x) = q^x p$$

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x=0}^{\infty} p q^x e^{tx}$$

$$= p \sum_{x=0}^{\infty} (qe^t)^x = \frac{p}{1 - qe^t}$$

$$\mu_X = \frac{q}{p}$$

$$\sigma_X^2 = \frac{q}{p^2}$$

Distribution géométrique

- Définition 2 :
  - Schéma de Bernoulli (n non fixé)
  - Nombre d'essais Y nécessaires pour obtenir le premier succès :

$$y \in N_0$$

$$Y = X + 1$$

$$p_y = P(Y = y) = q^{y-1} p$$

$$M_Y(t) = E\left(e^{tY}\right) = \sum_{y=1}^{\infty} pq^{y-1} e^{ty}$$

$$= \frac{pe^t}{1 - qe^t}$$

$$\mu_Y = \frac{1}{p}$$

$$\sigma_Y^2 = \frac{q}{p^2}$$

Distribution binomiale négative

- Définition 1 :
  - Schéma de Bernoulli (n non fixé)
  - X = nombre d'échecs obtenus avant d'arriver à obtenir r succès (r fixé)

$$x \in N$$

$$p_x = P(X = x) = \binom{x+r-1}{r-1} p^r q^x$$

$$\mu_X = r\frac{q}{p}$$

$$M_X(t) = \left(\frac{p}{1-qe^t}\right)^r$$

$$\sigma_X^2 = r\frac{q}{p^2}$$

Distribution binomiale négative

- Définition 2 :
  - Schéma de Bernoulli (n non fixé)
  - Y = nombre d'essais nécessaires avant d'arriver à obtenir r succès (r fixé)

$$y \in \{r, r+1, \ldots\}$$

$$Y = X + r$$

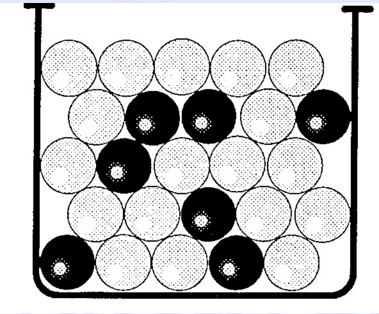
$$p_y = P(Y = y) = \binom{y-1}{r-1} p^r q^{y-r}$$

$$\mu_Y = \frac{r}{p}$$

$$M_Y(t) = \left(\frac{pe^t}{1 - qe^t} \right)^r$$

$$\sigma_Y^2 = r\frac{q}{p^2}$$

Distribution hypergéométrique



- Définition : N boules
  - M boules blanches,
  - N-M boules noires.
  - Tirage de n boules sans remise (n < N)
  - X = nombre de boules blanches tirées

$$x \in \{\max(0, n - N + M), \ldots, \min(n, M)\}$$

$$p_x = P(X = x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$