Math F 112 — Mathématiques pour les bacheliers en Bio-ingénieur, Biologie, Chimie, Géographie, Géologie, Informatique, Sciences (polyvalente)

Bruno Premoselli[1], Julie De Saedeleer, César Lecoutre

Année académique 2018 — 2019

1. bruno.premoselli@ulb.ac.be

Contenu de la section

Contenu de la section

But du cours

L'objectif du cours de MATH F-112 est de:

- Maîtriser les fondements du raisonnement mathématique
- Savoir manipuler des concepts mathématiques fondamentaux (fonctions, matrices, ...) dans des exemples concrets
- Exploiter ces concepts pour modéliser et des phénomènes physiques, biologiques, économiques ...

Un exemple

On veut décrire un modèle proie-prédateurs, où deux espèces intéragissent. Une option est le système d'équations suivant, dit de Lotka-Volterra:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = x(t)\Big(\alpha - \beta y(t)\Big) \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = y(t)\Big(\delta x(t) - \gamma\Big) \end{cases}$$

Ici $x(t)$ et $y(t)$ sont les effectifs des proies et des prédateurs au cours du temps et $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des paramètres. C'est un exemple d'équation différentielle.

À la fin du cours, nous serons en mesure de comprendre ce système et d'autres phénomènes.

Contenu de la section

Agencement du cours

- Le cours concerne sept sections!
- Il est agencé en trois modules: T, S et SI.

1. Au Q1 et une partie du Q2: tout le monde suit le module T (GEOL1, GEOG1, BIOL1, CHIM1, IRBI1, SCIE1, INFO1).
   Au Q2 (vers Février), le cours se sépare:
2. Les INFO1 suivent le module SI (titulaire: Julie de SAEDELEER)
3. Les autres (BIOL1, CHIM1, IRBI1, SCIE1, BA 2/3 GEOL/GEOG) suivent le module S (titulaire: César LECOUTRE)

Pour toutes ces informations, voir la page web du cours: http://homepages.ulb.ac.be/~bpremose.

Contenu de la section

Examens et Évaluation

Réussite Obtenir au moins 10/20.

Échec Obtenir strictement moins que 10/20.

- un test le 31 Octobre 2018,
- une interro en janvier (obligatoire !),
- un examen en juin :
  - Sur la partie du 2e quadri : obligatoire
  - Sur la partie du 1er quadri : non-obligatoire (report de la note de janvier possible)
- un examen en septembre (une seule partie sur la matière de toute l'année)

Durées et pondérations en janvier et juin

GEOL1, GEOG1 : 60h Janvier : 3h. Juin : 1h30 (si Q1 non-représenté) ou 4h (si Q1 représenté).

- 13 points pour le Q1
- 7 points pour le Q2

GEOL2 GEOG2 : 30h le cours est au Q2. Un seul examen de 3h en juin.

BIOL1, SCIE1, CHIM1, IRBI1, INFO1 Janvier: 3h. Juin: 2h (si Q1 non-représenté) ou 4h (si Q1 représenté)..

- 10 points pour le Q1
- 10 points pour le Q2

À prendre avec soi

Aux évaluations (= examens), vous vous munirez de :

- Carte d'étudiant et carte d'identité.
- Stylo et papier
- (éventuellement) à boire et un snack au cas où.

Le reste est **interdit**. En particulier (liste non-exhaustive):

- GSM, ordinateur, calculatrice : sont interdits !
- Notes de cours et syllabus : sont interdits !

Quel est l'intérêt du test d'Octobre?

Pour l'étudiant-e

- qui passe le test en octobre, *et*
- qui a réussi mieux en octobre qu'en janvier.

sa note finale pour le Q1 est la moyenne pondérée :

- pour un quart de celle d'octobre, et
- pour trois-quarts de celle de janvier (ou, si applicable, la « note Q1 » de juin).

Morale de l'histoire: passer le test d'Octobre aide à préparer l'examen et remonte la note!

Durées et pondérations en septembre

L'examen du mois de septembre (« seconde session ») est un examen unique couvrant toute la matière.
La durée est la même qu'en juin.
La pondération des quadrimestres est identique à celle de juin.

Contenu de la section

Syllabus et exercices

- Le syllabus pour le module T se trouve aux PUB
- Les énoncés pour les séances d'exercices de ces modules sont également aux PUB (un fascicule pour tout).

Pensez à apporter votre syllabus d'exercices pendant les TP!

- Site web du cours, où TOUT se trouve: http://homepages.ulb.ac.be/~bpremose

Tous les syllabi disponibles aux PUB, ainsi que les transparents du cours, sont disponibles sur la page web (et sur l'UV).

Matière de l'examen

La matière de l'examen est l'union :

- du cours oral,
- du contenu du syllabus et
- des exercices.

Contenu de la section

Remarque

Vous n'êtes *pas* répartis de la même manière que pour vos autres cours. Vous êtes répartis selon la première lettre de votre nom de famille.

Plus d'infos bientôt!

Math-F-112 MODULE T

Contenu de la section

Contenu de la section

Définitions et résultats

Définition

Une *définition* est une manière d'attribuer un mot ou une notation à un concept.

Exemple

La description du mot « définition » ci-dessus peut-être vue comme une définition.

Exemple

Un exemple plus classique et plus « mathématique » :

Définition

Si x est un réel, et si k est un entier, on définit la notation :

$$x^k := \underbrace{x \cdot \cdots \cdot x}_{k \text{ fois}}$$

Démonstration

Définition

On appelle démonstration la succession d'affirmations qui découlent les unes des autres par applications de règles logiques à des résultats déjà connus.

En pratique, une démonstration sert à *convaincre* de la véracité d'une affirmation, en montrant qu'elle découle d'informations déjà connues.

Pour démontrer un résultat, il faut connaître les définitions impliquées !

Exemple

Si x est un réel, et si k et l sont des entiers, démontrer que

$$x^k x^l = x^{k+l}.$$

Démonstration.

Soient k et l des entiers. On calcule:

$$\begin{aligned} x^k \cdot x^l &= \underbrace{x \cdot \dots \cdot x}_{k \text{ fois}} \cdot \underbrace{x \cdot \dots \cdot x}_{l \text{ fois}} \\ &= \underbrace{x \cdot \dots \cdot x}_{k+l \text{ fois}} \\ &= x^{k+l} \end{aligned}$$

où la dernière égalité est vraie par définition de x^{k+l}. □

Contenu de la section

Manipuler le vrai et le faux

Définition

On s'intéresse à la valeur de vérité d'une affirmation donnée : est-elle vraie ou fausse ? C'est soit l'un, soit l'autre.

Exemple

Considérons les affirmations suivantes

- « x est positif » ;
- « Si x est plus grand que 1 alors x est positif » ;

Il se fait que :

- la première est vraie ou fausse selon la valeur de x (car on n'a pas dit qui est x!),
- la seconde est vraie (car il est dit qui est x dans l'affirmation: c'est un nombre plus grand que 1!).

Un autre exemple:

Exemple

- « Pour tout x entier, x est positif » ;
- « Il existe x entier tel que x est positif » ;

Il se trouve que:

- la première est fausse (pensez à $x = -1$) et
- la deuxième est vraie (juste en choisissant $x = 1$).

Connecteurs logiques

Pour construire des affirmations, nous utilisons des connecteurs logiques : « et » (noté $\wedge$), « ou » (noté $\vee$), « négation de » (noté $\neg$) et « implique » (noté $\rightarrow$).

Le connecteur « implique » (noté $\rightarrow$) signifie « Si ... Alors »

Exemple

S'il pleut ou s'il grèle, je prends mon parapluie.

- Notons P l'affirmation « Il pleut »,
- Notons G l'affirmation « Il grèle »,
- Notons A l'affirmation « Je prends mon parapluie ».

Alors on peut ré-écrire l'affirmation initiale comme : (le faire !)

$$(P \vee G) \rightarrow A$$

Connecteurs logiques 2

Quand on connecte deux affirmations logiques à l'aide des symbôles $\wedge$) (« et »), $\vee$ (« ou »), $\neg$ (« négation de ») ou encore $\rightarrow$ (« si ... alors ») on construit une nouvelle affirmation. Qui est donc vraie ou fausse.

Exemple

Soit A l'affirmation « Il pleut » et B l'affirmation « il ne pleut pas ». Alors $B = \neg A$. Et l'affirmation composée $A \wedge \neg A$ est « il pleut OU il ne pleut pas ». Cette affirmation est evidemment toujours vraie.

Quantificateurs

Lorsqu'une proposition dépend d'une variable, sa valeur de vérité (c'est-à-dire si elle est vraie ou fausse) dépend de la variable.

Exemple

La proposition « x est positif » (nommons-la $P(x)$) est parfois vraie, parfois fausse.

Le quantificateur « pour tout », noté $\forall$ s'utilise comme suit :

$\forall x, P(x)$ se traduit par « pour tout x, P(x) est vraie ».

Le quantificateur « il existe », noté $\exists$, s'utilise comme suit :

$\exists x : P(x)$ se traduit par « Il existe une valeur de x telle que P(x) est vraie ».

Exemple

La proposition « $\forall x$ entier, x est positif » est fausse

Un exemple

Considérons la proposition suivante, où $x \in \mathbb{R}$ est donné:

$$P(x) : (x^2 = 1) \to (x = 1).$$

Qu'on peut aussi réecrire comme:

$$P(x) : \text{ si } x^2 = 1, \text{ alors } x = 1.$$

Cette affirmation est vraie ou fausse selon la valeur de x. Soit l'affirmation suivante, définie avec le quantificateur $\forall$:

$$Q : \forall x, \text{ si } x^2 = 1, \text{ alors } x = 1.$$

Cette affirmation est fausse.

Démonstration.

Pour le montrer, il suffit de montrer qu'il existe un nombre x pour lequel $P(x)$ n'est pas vraie. C'est-à-dire un nombre x qui vérifie $x^2 = 1$, mais qui est différent de 1. Ce nombre est par exemple $x = -1$. $\square$

Contenu de la section

Exemple

J'ai 3 paires de chaussettes différentes. Si je choisis au hasard sans regarder, combien dois-je prendre de chaussettes dans ma valise pour être totalement certain d'avoir au moins deux chaussettes d'une même paire ?
Réponse : 4.

On est amenes en maths à devoir mettre en place des types de raisonnements différents en fonction du contexte.

Raisonnement par l'absurde

Question

Existe-t-il un nombre qui, multiplié par 0, vaut 1 ?

Exemple

Supposons, par l'absurde, qu'un tel nombre a existe.
Alors il vérifie $0a = 1$.
Or $a0 = 0$.
Dès lors nous aurions $0 = 1$, qui est une contradiction.

Principe du raisonnement par l'absurde: Si on veut montrer qu'une affirmation P est vraie, on commence par supposer qu'elle ne l'est pas, c'est-à-dire que $\neg P$ est vraie. On essaye alors d'aboutir à une contradiction.

Raisonnement par Contraposée

Exemple

Les affirmations « S'il pleut je prends mon parapluie » et « Si je ne prends pas mon parapluie, c'est qu'il ne pleut pas » sont équivalentes: elles sont simultanément vraies ou fausses. On peut également passer de l'une à l'autre par un raisonnement par l'absurde.

Exemple

« Si x est divisible par 6, alors x est pair » est équivalente à « Si x n'est pas pair, alors x n'est pas divisible par 6 ».

Théorème (Principe général du raisonnement par contraposée)

Si P et Q sont des affirmations, alors l'affirmation $P \to Q$ est équivalente à $(\neg Q) \to (\neg P)$.

Démonstration par récurrence / induction

Principe

Supposons que nous voulions démontrer qu'une proposition $p(n)$, qui dépend d'un entier naturel n (c'est-à-dire $n = 0,1,2,\ldots$), est vraie pour toute valeur de n.

Si nous pouvons prouver :

- que $p(0)$ est vraie (« le pas initial »), et
- $\forall k \in \mathbb{N}, (p(k) \to p(k+1))$ (ou encore « si p(k), alors p(k+1) »),

alors le principe d'induction affirme que $\forall n \in \mathbb{N}, p(n)$.

La deuxième étape est appelée « l'étape d'induction ».

Démonstration par récurrence / induction

Exemple

Montrons par récurrence que la somme des entiers de 0 à n vaut $\frac{n(n+1)}{2}$. Notre affirmation $p(n)$ est donc:

$$p(n): \text{ la somme des entiers de } 0 \text{ à } n \text{ vaut } \frac{n(n+1)}{2}.$$

L'affirmation $p(0)$ est : « La somme des entiers de 0 à 0 vaut 0. » Elle est manifestement vraie! Le pas initial est donc prouvé.

Démonstration par récurrence / induction

Exemple

Il s'agit donc de montrer l'étape d'induction. Pour cela, fixons un nombre k quelconque, et supposons $p(k)$ vraie, c'est-à dire supposons que

$$0 + 1 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Nous voulons montrer $p(k+1)$, c'est-à-dire que :

$$0 + 1 + \cdots + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Or la somme du membre de gauche « passe » par k, c'est-à-dire qu'on peut l'écrire sous la forme

$$\underbrace{0 + 1 + \cdots + k}_{=\frac{k(k+1)}{2}} + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

Démonstration par récurrence / induction

Exemple

En mettant alors au même dénominateur, nous obtenons

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2}$$

et, en mettant $k+1$ en évidence, nous avons :

$$\frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+2)(k+1)}{2}$$

Mettant maintenant bout à bout nos dernières égalités, nous avons obtenu :

$$0 + 1 + \cdots + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

ce que nous voulions démontrer !

Par le principe d'induction, l'égalité $p(n)$ est donc vraie pour tout entier n.

Contenu de la section

Une classification des nombres

Les nombres sont les objets de base en mathématiques. Ce sont eux qu'on manipule constamment.

Si on note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres dits « réels », on a des inclusions :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

où

- $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\ldots\}$ est l'ensemble des (entiers) naturels.
- $\mathbb{Z} = \{0,1,-1,2,-2,3,-3,\ldots\}$ est l'ensemble des entiers (relatifs).
- $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des rationnels (nombres qui s'écrivent comme fractions d'entiers).

Les nombres réels qui ne sont pas dans $\mathbb{Q}$ sont dits « irrationnels » (p.ex. $\sqrt{3}$, π, etc.)

Développement décimal

Le développement décimal d'un nombre est son écriture « en chiffres ».

Dans le tableau, le développement décimal de x est y :

x	y
1	1
1/2	0.5
1/3	0.333...3...
1/11	0.090909...09...
π	3.14159...

Théorème

Un nombre est rationnel si et seulement si son développement décimal est périodique.

Précision, illusion de précision et arrondis

Exemple

En roulant à vélo à $20\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ pendant 10 minutes, la distance parcourue est de 3.333...3...km.

La présence des décimales laisse croire à une précision importante dans le calcul, alors qu'en réalité la vitesse utilisée (20 à l'heure) était probablement une approximation grossière.
$\Rightarrow$ Dans les problèmes physique, on arrondit généralement les réponses.

Contenu de la section

Relations entre les nombres

Contenu de la section

Les nombres peuvent être comparés entre eux.

Définition

On dit que

- « a est strictement inférieur à b », noté $a < b$, si a est plus petit et différent de b ;
- « a est strictement supérieur à b », noté $a > b$, si a est plus grand et différent de b ;
- « a est inférieur à b » (ou « inférieur ou égal »), noté $a \leq b$, si a est plus petit ou égal à b ;
- « a est supérieur à b » (ou « supérieur ou égal »), noté $a \geq b$, si a est plus grand ou égal à b.

Exemple

Les affirmations suivantes sont vraies :

- $2 \leq 3$
- $2 < 3$
- $-2 \leq 1$
- $-2 \leq -1$
- $2 \leq 2$
- $2 \geq 2$
- $5 > 3$

Exemple

Mais celles-ci sont fausses :

- $2 \geq 3$
- $-2 \geq 1$
- $-2 \geq -1$
- $2 < 2$
- $2 > 2$
- $5 < 3$

Règles de calcul (qu'on supposera connues):

Résultat

Pour tous réels a,b,c, nous avons :

- *Si $a \leq b$ et $b \leq a$, alors $a = b$*
- *Si $a \leq b$ et $b \leq c$, alors $a \leq c$ (propriété de transitivité).*

Résultat

Soient a,b des nombres réels tels que $a \leq b$. Alors pour tout réel c nous avons

$$a + c \leq b + c.$$

De plus, si $c \geq 0$, on a

$$ac \leq bc$$

Résultat

Soient a,b,c,d des réels vérifiant $a \leq b$ et $c \leq d$. Alors

$$a + c \leq b + d.$$

De plus, si $0 \leq a$ et $0 \leq c$, alors

$$ac \leq bd.$$

Démonstration.

Comme $a \leq b$, alors $a + c \leq b + c$ (résultat précédent). Et comme $c \leq d$, on a de même $b + c \leq b + d$. On obtient ainsi:

$$a + c \leq b + c \leq b + d$$

ce qui termine la preuve. Le deuxième point se prouve de la même manière (Exercice!)