Quelques remarques administratives pour commencer:

Quelques remarques administratives pour commencer:

- Les syllabus de cours et d'exercices sont disponibles sur l'UV ou sur la page web du cours de math F112:

http://homepages.ulb.ac.be/ bpremose/

Quelques remarques administratives pour commencer:

- Les syllabus de cours et d'exercices sont disponibles sur l'UV ou sur la page web du cours de math F112:

  http://homepages.ulb.ac.be/ bpremose/

- Le syllabus d'exercices est très proche de celui de l'année passée, mais quelques exercices ont été ajoutés.

Quelques remarques administratives pour commencer:

- Les syllabus de cours et d'exercices sont disponibles sur l'UV ou sur la page web du cours de math F112:

  http://homepages.ulb.ac.be/ bpremose/

- Le syllabus d'exercices est très proche de celui de l'année passée, mais quelques exercices ont été ajoutés.
- Le syllabus du cours est sensiblement différent: certains chapitres ont été réécrits. Il serait judicieux de se procurer le nouveau. (Ou, à défaut, de travailler avec le nouveau fichier .pdf).

Retour sur les quantificateurs

On considère $P(x)$ une proposition qui dépend d'une variable x.

Retour sur les quantificateurs

On considère $P(x)$ une proposition qui dépend d'une variable x. Autrement dit: à chaque fois qu'on choisit un x, $P(x)$ est une affirmation logique qui est vraie ou fausse.

Retour sur les quantificateurs

On considère $P(x)$ une proposition qui dépend d'une variable x. Autrement dit: à chaque fois qu'on choisit un x, $P(x)$ est une affirmation logique qui est vraie ou fausse.

Exemple

Si $x \in \mathbb{N}$, on définit $P(x)$: « x est divisible par 7 ». $P(14)$ est vraie, $P(5)$ ne l'est pas.

Retour sur les quantificateurs

On considère $P(x)$ une proposition qui dépend d'une variable x. Autrement dit: à chaque fois qu'on choisit un x, $P(x)$ est une affirmation logique qui est vraie ou fausse.

Exemple

Si $x \in \mathbb{N}$, on définit $P(x)$: « x est divisible par 7 ». $P(14)$ est vraie, $P(5)$ ne l'est pas.

La valeur (vrai ou faux) de $P(x)$ dépend donc de x.

Retour sur les quantificateurs

On considère $P(x)$ une proposition qui dépend d'une variable x. Autrement dit: à chaque fois qu'on choisit un x, $P(x)$ est une affirmation logique qui est vraie ou fausse.

Exemple

Si $x \in \mathbb{N}$, on définit $P(x)$: « x est divisible par 7 ». $P(14)$ est vraie, $P(5)$ ne l'est pas.

La valeur (vrai ou faux) de $P(x)$ dépend donc de x.

On définit maintenant une nouvelle proposition Q:

Q: « pour tout x, P(x) est vraie ».

Retour sur les quantificateurs

On considère $P(x)$ une proposition qui dépend d'une variable x. Autrement dit: à chaque fois qu'on choisit un x, $P(x)$ est une affirmation logique qui est vraie ou fausse.

Exemple

Si $x \in \mathbb{N}$, on définit $P(x)$: « x est divisible par 7 ». $P(14)$ est vraie, $P(5)$ ne l'est pas.

La valeur (vrai ou faux) de $P(x)$ dépend donc de x.

On définit maintenant une nouvelle proposition Q:

$$\text{Q: « pour tout x, P(x) est vraie ».}$$

Cette Q est une nouvelle affirmation logique: en particulier elle est ou vraie ou fausse.

Retour sur les quantificateurs

On considère $P(x)$ une proposition qui dépend d'une variable x. Autrement dit: à chaque fois qu'on choisit un x, $P(x)$ est une affirmation logique qui est vraie ou fausse.

Exemple

Si $x \in \mathbb{N}$, on définit $P(x)$: « x est divisible par 7 ». $P(14)$ est vraie, $P(5)$ ne l'est pas.

La valeur (vrai ou faux) de $P(x)$ dépend donc de x.

On définit maintenant une nouvelle proposition Q:

Q: « pour tout x, P(x) est vraie ».

Cette Q est une nouvelle affirmation logique: en particulier elle est ou vraie ou fausse. Mais attention: elle ne dépend plus d'un paramètre!

Retour sur les quantificateurs

On considère $P(x)$ une proposition qui dépend d'une variable x. Autrement dit: à chaque fois qu'on choisit un x, $P(x)$ est une affirmation logique qui est vraie ou fausse.

Exemple

Si $x \in \mathbb{N}$, on définit $P(x)$: « x est divisible par 7 ». $P(14)$ est vraie, $P(5)$ ne l'est pas.

La valeur (vrai ou faux) de $P(x)$ dépend donc de x.

On définit maintenant une nouvelle proposition Q:

Q: « pour tout x, P(x) est vraie ».

Cette Q est une nouvelle affirmation logique: en particulier elle est ou vraie ou fausse. Mais attention: elle ne dépend plus d'un paramètre!

Dire que Q est vraie revient exactement à dire que:

Retour sur les quantificateurs

On considère $P(x)$ une proposition qui dépend d'une variable x. Autrement dit: à chaque fois qu'on choisit un x, $P(x)$ est une affirmation logique qui est vraie ou fausse.

Exemple

Si $x \in \mathbb{N}$, on définit $P(x)$: « x est divisible par 7 ». $P(14)$ est vraie, $P(5)$ ne l'est pas.

La valeur (vrai ou faux) de $P(x)$ dépend donc de x.

On définit maintenant une nouvelle proposition Q:

$$\text{Q: « pour tout x, P(x) est vraie ».}$$

Cette Q est une nouvelle affirmation logique: en particulier elle est ou vraie ou fausse. Mais attention: elle ne dépend plus d'un paramètre!

Dire que Q est vraie revient exactement à dire que: pour toute valeur de x, $P(x)$ est vraie.

Retour sur les quantificateurs

On considère $P(x)$ une proposition qui dépend d'une variable x. Autrement dit: à chaque fois qu'on choisit un x, $P(x)$ est une affirmation logique qui est vraie ou fausse.

Exemple

Si $x \in \mathbb{N}$, on définit $P(x)$: « x est divisible par 7 ». $P(14)$ est vraie, $P(5)$ ne l'est pas.

La valeur (vrai ou faux) de $P(x)$ dépend donc de x.

On définit maintenant une nouvelle proposition Q:

Q: « pour tout x, P(x) est vraie ».

Cette Q est une nouvelle affirmation logique: en particulier elle est ou vraie ou fausse. Mais attention: elle ne dépend plus d'un paramètre!

Dire que Q est vraie revient exactement à dire que: pour toute valeur de x, $P(x)$ est vraie. Dans l'exemple ci-dessus, Q serait donc fausse.

Retour sur le raisonnement par récurrence

Soit, pour tout n entier naturel, $P(n)$ une affirmation logique. On cherche à montrer que:

Retour sur le raisonnement par récurrence

Soit, pour tout n entier naturel, $P(n)$ une affirmation logique. On cherche à montrer que:

$$\text{« } \forall n \in \mathbb{N}, P(n) \text{ » est vraie.}$$

Retour sur le raisonnement par récurrence

Soit, pour tout n entier naturel, $P(n)$ une affirmation logique. On cherche à montrer que:

$$\text{« } \forall n \in \mathbb{N}, P(n) \text{ » est vraie.}$$

Par définition, ceci revient donc à montrer que, quelle que soit la valeur de $n \in \mathbb{N}$, l'affirmation logique $P(n)$ est elle-même vraie.

Retour sur le raisonnement par récurrence

Soit, pour tout n entier naturel, $P(n)$ une affirmation logique. On cherche à montrer que:

$$\text{« } \forall n \in \mathbb{N}, P(n) \text{ » est vraie.}$$

Par définition, ceci revient donc à montrer que, quelle que soit la valeur de $n \in \mathbb{N}$, l'affirmation logique $P(n)$ est elle-même vraie.

Une manière de montrer ça est de raisonner par récurrence (ou par induction):

Retour sur le raisonnement par récurrence

Soit, pour tout n entier naturel, $P(n)$ une affirmation logique. On cherche à montrer que:

$$\text{« } \forall n \in \mathbb{N}, P(n) \text{ » est vraie.}$$

Par définition, ceci revient donc à montrer que, quelle que soit la valeur de $n \in \mathbb{N}$, l'affirmation logique $P(n)$ est elle-même vraie.

Une manière de montrer ça est de raisonner par récurrence (ou par induction):

- On commence par montrer que $P(0)$ est vraie.

Retour sur le raisonnement par récurrence

Soit, pour tout n entier naturel, $P(n)$ une affirmation logique. On cherche à montrer que:

$$\text{« } \forall n \in \mathbb{N}, P(n) \text{ » est vraie.}$$

Par définition, ceci revient donc à montrer que, quelle que soit la valeur de $n \in \mathbb{N}$, l'affirmation logique $P(n)$ est elle-même vraie.

Une manière de montrer ça est de raisonner par récurrence (ou par induction):

- On commence par montrer que $P(0)$ est vraie.
- On montre ensuite que, quelle que soit la valeur de n, si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ l'est aussi.

Un autre exemple de récurrence

Nous allons montrer par récurrence que l'affirmation suivante est vraie:

Q: « $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n \geq n + 1.$ »

On définit donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: « $2^n \geq n + 1$ ».

Un autre exemple de récurrence

Nous allons montrer par récurrence que l'affirmation suivante est vraie:

$$\text{Q: « } \forall n \in \mathbb{N},\ 2^n \geq n+1. \text{ »}$$

On définit donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: « $2^n \geq n+1$ ».

- On commence par s'en convaincre: $2^0 = 1 \geq 1$ donc $P(0)$ est vraie.

Un autre exemple de récurrence

Nous allons montrer par récurrence que l'affirmation suivante est vraie:

$$\text{Q: « } \forall n \in \mathbb{N},\ 2^n \geq n+1. \text{ »}$$

On définit donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: « $2^n \geq n+1$ ».

- On commence par s'en convaincre: $2^0 = 1 \geq 1$ donc $P(0)$ est vraie. Ensuite: $2^1 = 2 \geq 2$ donc $P(1)$ l'est aussi,

Un autre exemple de récurrence

Nous allons montrer par récurrence que l'affirmation suivante est vraie:

$$\text{Q: « } \forall n \in \mathbb{N},\ 2^n \geq n+1. \text{ »}$$

On définit donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: « $2^n \geq n+1$ ».

- On commence par s'en convaincre: $2^0 = 1 \geq 1$ donc $P(0)$ est vraie. Ensuite: $2^1 = 2 \geq 2$ donc $P(1)$ l'est aussi, et $2^2 = 4 \geq 3$.

Un autre exemple de récurrence

Nous allons montrer par récurrence que l'affirmation suivante est vraie:

$$\text{Q: « } \forall n \in \mathbb{N},\ 2^n \geq n+1. \text{ »}$$

On définit donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: « $2^n \geq n+1$ ».

- On commence par s'en convaincre: $2^0 = 1 \geq 1$ donc $P(0)$ est vraie. Ensuite: $2^1 = 2 \geq 2$ donc $P(1)$ l'est aussi, et $2^2 = 4 \geq 3$.
- **Initialisation:** on montre que $P(0)$ est vraie: $2^0 = 1 \geq 1$.

Un autre exemple de récurrence

Nous allons montrer par récurrence que l'affirmation suivante est vraie:

$$\text{Q: « } \forall n \in \mathbb{N},\ 2^n \geq n+1. \text{ »}$$

On définit donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: « $2^n \geq n+1$ ».

- On commence par s'en convaincre: $2^0 = 1 \geq 1$ donc $P(0)$ est vraie. Ensuite: $2^1 = 2 \geq 2$ donc $P(1)$ l'est aussi, et $2^2 = 4 \geq 3$.
- **Initialisation:** on montre que $P(0)$ est vraie: $2^0 = 1 \geq 1$.
- **Étape de récurrence:** soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $P(n)$ est vraie. Ceci signifie que $2^n \geq n+1$.

Un autre exemple de récurrence

Nous allons montrer par récurrence que l'affirmation suivante est vraie:

$$\text{Q: « } \forall n \in \mathbb{N}, 2^n \geq n+1. \text{ »}$$

On définit donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: « $2^n \geq n+1$ ».

- On commence par s'en convaincre: $2^0 = 1 \geq 1$ donc $P(0)$ est vraie. Ensuite: $2^1 = 2 \geq 2$ donc $P(1)$ l'est aussi, et $2^2 = 4 \geq 3$.
- **Initialisation:** on montre que $P(0)$ est vraie: $2^0 = 1 \geq 1$.
- **Étape de récurrence:** soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $P(n)$ est vraie. Ceci signifie que $2^n \geq n+1$. On calcule alors 2^{n+1}:
$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2 \cdot 2^n \\ &\geq 2n+2 \text{ (par l'hypothèse de récurrence)} \\ &\geq n+2 \end{aligned}$$
car $n \geq 0$.

Un autre exemple de récurrence

Nous allons montrer par récurrence que l'affirmation suivante est vraie:

$$\text{Q: « } \forall n \in \mathbb{N},\ 2^n \geq n+1. \text{ »}$$

On définit donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: « $2^n \geq n+1$ ».

- On commence par s'en convaincre: $2^0 = 1 \geq 1$ donc $P(0)$ est vraie. Ensuite: $2^1 = 2 \geq 2$ donc $P(1)$ l'est aussi, et $2^2 = 4 \geq 3$.
- **Initialisation:** on montre que $P(0)$ est vraie: $2^0 = 1 \geq 1$.
- **Étape de récurrence:** soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $P(n)$ est vraie. Ceci signifie que $2^n \geq n+1$. On calcule alors 2^{n+1}:

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2 \cdot 2^n \\ &\geq 2n+2 \text{ (par l'hypothèse de récurrence)} \\ &\geq n+2 \end{aligned}$$

  car $n \geq 0$. Ceci montre donc que $P(n+1)$ est vraie.

Contenu de la section

Hier nous avons vu:

- Des éléments de logique: « et », « ou », « si… alors »

Hier nous avons vu:

- Des éléments de logique: « et », « ou », « si… alors »
- Le raisonnement par l'absurde (ou par contradiction)

Hier nous avons vu:

- Des éléments de logique: « et », « ou », « si… alors »
- Le raisonnement par l'absurde (ou par contradiction)
- Le raisonnement par récurrence

Hier nous avons vu:

- Des éléments de logique: « et », « ou », « si... alors »
- Le raisonnement par l'absurde (ou par contradiction)
- Le raisonnement par récurrence
- Les ensembles de nombres réels et les relations entre nombre

Hier nous avons vu:

- Des éléments de logique: « et », « ou », « si... alors »
- Le raisonnement par l'absurde (ou par contradiction)
- Le raisonnement par récurrence
- Les ensembles de nombres réels et les relations entre nombre

Aujourd'hui: nous allons continuer à étudier les relations entre nombres avec les intervalles.

Hier nous avons vu:

- Des éléments de logique: « et », « ou », « si... alors »
- Le raisonnement par l'absurde (ou par contradiction)
- Le raisonnement par récurrence
- Les ensembles de nombres réels et les relations entre nombre

Aujourd'hui: nous allons continuer à étudier les relations entre nombres avec les intervalles. Puis nous apprendrons comment écrire et calculer des sommes et des produits en toute géneralité.

Hier nous avons vu:

- Des éléments de logique: « et », « ou », « si... alors »
- Le raisonnement par l'absurde (ou par contradiction)
- Le raisonnement par récurrence
- Les ensembles de nombres réels et les relations entre nombre

Aujourd'hui: nous allons continuer à étudier les relations entre nombres avec les intervalles. Puis nous apprendrons comment écrire et calculer des sommes et des produits en toute géneralité. Et nous allons apprendre à compter des éléments en faisant de la combinatoire!

Contenu de la section

Résultat

Soient a,b,c,d *des réels vérifiant* $a \leq b$ *et* $c \leq d$*.*

Résultat

Soient a,b,c,d *des réels vérifiant* $a \leq b$ *et* $c \leq d$. *Alors*

$$a + c \leq b + d.$$

Résultat

Soient a,b,c,d des réels vérifiant $a \le b$ *et* $c \le d$. *Alors*

$$a + c \le b + d.$$

De plus, si $0 \le a$ *et* $0 \le c$, *alors*

Résultat

Soient a,b,c,d des réels vérifiant $a \leq b$ et $c \leq d$. Alors

$$a + c \leq b + d.$$

De plus, si $0 \leq a$ et $0 \leq c$, alors

$$ac \leq bd.$$

Démonstration.

Comme $a \leq b$, alors $a + c \leq b + c$ (résultat précédent).

Résultat

Soient a,b,c,d *des réels vérifiant* $a \leq b$ *et* $c \leq d$. *Alors*

$$a + c \leq b + d.$$

De plus, si $0 \leq a$ *et* $0 \leq c$, *alors*

$$ac \leq bd.$$

Démonstration.

Comme $a \leq b$, alors $a + c \leq b + c$ (résultat précédent). De même, comme $c \leq d$, nous avons $b + c \leq b + d$.

Résultat

Soient a,b,c,d des réels vérifiant $a \leq b$ et $c \leq d$. Alors

$$a + c \leq b + d.$$

De plus, si $0 \leq a$ et $0 \leq c$, alors

$$ac \leq bd.$$

Démonstration.

Comme $a \leq b$, alors $a + c \leq b + c$ (résultat précédent). De même, comme $c \leq d$, nous avons $b + c \leq b + d$. Par transitivité, nous obtenons $a + c \leq b + d$ comme annoncé.

Résultat

Soient a,b,c,d des réels vérifiant $a \leq b$ *et* $c \leq d$*. Alors*
$$a + c \leq b + d.$$
De plus, si $0 \leq a$ *et* $0 \leq c$*, alors*
$$ac \leq bd.$$

Démonstration.

Comme $a \leq b$, alors $a + c \leq b + c$ (résultat précédent). De même, comme $c \leq d$, nous avons $b + c \leq b + d$. Par transitivité, nous obtenons $a + c \leq b + d$ comme annoncé.
La preuve pour le produit (avec la condition supplémentaire) est laissée en exercice. $\square$

Exercice

Faire la preuve de la seconde partie du résultat précédent.

Exercice

Trouver des réels a,b,c,d tels que $a \leq b$, $c \leq d$ et $ac > bd$.

Contenu de la section

Définition

Un *intervalle* s'entend comme un ensemble de nombres réels « continu », ou « sans trou »

Définition

Un *intervalle* s'entend comme un ensemble de nombres réels « continu », ou « sans trou » (on parle aussi d'ensemble *connexe*).

Définition

Un *intervalle* s'entend comme un ensemble de nombres réels « continu », ou « sans trou » (on parle aussi d'ensemble *connexe*).

Exemple

- On définit $[-2,\pi]$ comme l'ensemble des réels compris entre -2 et π, c'est un intervalle : il n'y a aucun trou entre ces deux nombres.

Définition

Un *intervalle* s'entend comme un ensemble de nombres réels « continu », ou « sans trou » (on parle aussi d'ensemble *connexe*).

Exemple

- On définit $[-2,\pi]$ comme l'ensemble des réels compris entre -2 et π, c'est un intervalle : il n'y a aucun trou entre ces deux nombres.
- L'ensemble des réels positifs (ou nuls),

Définition

Un *intervalle* s'entend comme un ensemble de nombres réels « continu », ou « sans trou » (on parle aussi d'ensemble *connexe*).

Exemple

- On définit $[-2,\pi]$ comme l'ensemble des réels compris entre -2 et π, c'est un intervalle : il n'y a aucun trou entre ces deux nombres.
- L'ensemble des réels positifs (ou nuls), noté $\mathbb{R}^+$,

Définition

Un *intervalle* s'entend comme un ensemble de nombres réels « continu », ou « sans trou » (on parle aussi d'ensemble *connexe*).

Exemple

- On définit $[-2,\pi]$ comme l'ensemble des réels compris entre -2 et π, c'est un intervalle : il n'y a aucun trou entre ces deux nombres.
- L'ensemble des réels positifs (ou nuls), noté $\mathbb{R}^+$, est également un intervalle.

Définition

Un *intervalle* s'entend comme un ensemble de nombres réels « continu », ou « sans trou » (on parle aussi d'ensemble *connexe*).

Exemple

- On définit $[-2,\pi]$ comme l'ensemble des réels compris entre -2 et π, c'est un intervalle : il n'y a aucun trou entre ces deux nombres.
- L'ensemble des réels positifs (ou nuls), noté $\mathbb{R}^+$, est également un intervalle.
- L'ensemble des réels sauf 0,

Définition

Un *intervalle* s'entend comme un ensemble de nombres réels « continu », ou « sans trou » (on parle aussi d'ensemble *connexe*).

Exemple

- On définit $[-2,\pi]$ comme l'ensemble des réels compris entre -2 et π, c'est un intervalle : il n'y a aucun trou entre ces deux nombres.
- L'ensemble des réels positifs (ou nuls), noté $\mathbb{R}^+$, est également un intervalle.
- L'ensemble des réels sauf 0, noté $\mathbb{R}_0$,

Définition

Un *intervalle* s'entend comme un ensemble de nombres réels « continu », ou « sans trou » (on parle aussi d'ensemble *connexe*).

Exemple

- On définit $[-2,\pi]$ comme l'ensemble des réels compris entre -2 et π, c'est un intervalle : il n'y a aucun trou entre ces deux nombres.
- L'ensemble des réels positifs (ou nuls), noté $\mathbb{R}^+$, est également un intervalle.
- L'ensemble des réels sauf 0, noté $\mathbb{R}_0$, n'est pas un intervalle car 0 manque : il y a un trou.

Définition

Un *intervalle* s'entend comme un ensemble de nombres réels « continu », ou « sans trou » (on parle aussi d'ensemble *connexe*).

Exemple

- On définit $[-2,\pi]$ comme l'ensemble des réels compris entre -2 et π, c'est un intervalle : il n'y a aucun trou entre ces deux nombres.
- L'ensemble des réels positifs (ou nuls), noté $\mathbb{R}^+$, est également un intervalle.
- L'ensemble des réels sauf 0, noté $\mathbb{R}_0$, n'est pas un intervalle car 0 manque : il y a un trou. C'est en revanche l'union disjointe de deux intervalles: les réels strictement à gauche de 0 et ceux strictement à droite.

Définition

Un *intervalle* s'entend comme un ensemble de nombres réels « continu », ou « sans trou » (on parle aussi d'ensemble *connexe*).

Exemple

- On définit $[-2,\pi]$ comme l'ensemble des réels compris entre -2 et π, c'est un intervalle : il n'y a aucun trou entre ces deux nombres.
- L'ensemble des réels positifs (ou nuls), noté $\mathbb{R}^+$, est également un intervalle.
- L'ensemble des réels sauf 0, noté $\mathbb{R}_0$, n'est pas un intervalle car 0 manque : il y a un trou. C'est en revanche l'union disjointe de deux intervalles: les réels strictement à gauche de 0 et ceux strictement à droite.

On peut classer les intervalles comme suit.

Résultat

Si a et b sont des nombres réels avec $a < b$, on définit ces notations :

On peut classer les intervalles comme suit.

Résultat

Si a et b sont des nombres réels avec $a < b$, on définit ces notations :

- $[a,b]$

On peut classer les intervalles comme suit.

Résultat

Si a et b sont des nombres réels avec $a < b$, on définit ces notations :

- $[a{,}b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (compris) ;*

On peut classer les intervalles comme suit.

Résultat

Si a et b sont des nombres réels avec $a < b$, on définit ces notations :

- $[a,b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (compris) ;*
- $]a,b]$

On peut classer les intervalles comme suit.

Résultat

Si a et b sont des nombres réels avec $a < b$, on définit ces notations :

- $[a,b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (compris) ;*
- $]a,b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (non-compris) à b (compris) ;*

On peut classer les intervalles comme suit.

Résultat

Si a et b sont des nombres réels avec $a < b$, on définit ces notations :

- $[a,b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (compris) ;*
- $]a,b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (non-compris) à b (compris) ;*
- $[a,b[$

On peut classer les intervalles comme suit.

Résultat

Si a et b sont des nombres réels avec $a < b$, on définit ces notations :

- $[a,b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (compris) ;*
- $]a,b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (non-compris) à b (compris) ;*
- $[a,b[$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (non-compris) ;*

On peut classer les intervalles comme suit.

Résultat

Si a et b sont des nombres réels avec $a < b$, on définit ces notations :

- $[a,b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (compris) ;*
- $]a,b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (non-compris) à b (compris) ;*
- $[a,b[$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (non-compris) ;*
- $]a,b[$

On peut classer les intervalles comme suit.

Résultat

Si a et b sont des nombres réels avec $a < b$, on définit ces notations :

- $[a,b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (compris) ;*
- $]a,b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (non-compris) à b (compris) ;*
- $[a,b[$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (non-compris) ;*
- $]a,b[$ *désigne l'ensemble des réels de a (non-compris) à b (non-compris) ;*

On peut classer les intervalles comme suit.

Résultat

Si a et b sont des nombres réels avec $a < b$, on définit ces notations :

- $[a,b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (compris) ;*
- $]a,b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (non-compris) à b (compris) ;*
- $[a,b[$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (non-compris) ;*
- $]a,b[$ *désigne l'ensemble des réels de a (non-compris) à b (non-compris) ;*
- $]-\infty,b[$

On peut classer les intervalles comme suit.

Résultat

Si a et b sont des nombres réels avec $a < b$, on définit ces notations :

- $[a,b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (compris) ;*
- $]a,b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (non-compris) à b (compris) ;*
- $[a,b[$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (non-compris) ;*
- $]a,b[$ *désigne l'ensemble des réels de a (non-compris) à b (non-compris) ;*
- $]-\infty,b[$ *désigne l'ensemble des réels strictement inférieurs à b ;*

On peut classer les intervalles comme suit.

Résultat

Si a et b sont des nombres réels avec $a < b$, on définit ces notations :

- $[a,b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (compris) ;*
- $]a,b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (non-compris) à b (compris) ;*
- $[a,b[$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (non-compris) ;*
- $]a,b[$ *désigne l'ensemble des réels de a (non-compris) à b (non-compris) ;*
- $]-\infty,b[$ *désigne l'ensemble des réels strictement inférieurs à b ;*
- $]-\infty,b]$

On peut classer les intervalles comme suit.

Résultat

Si a et b sont des nombres réels avec $a < b$, on définit ces notations :

- $[a,b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (compris) ;*
- $]a,b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (non-compris) à b (compris) ;*
- $[a,b[$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (non-compris) ;*
- $]a,b[$ *désigne l'ensemble des réels de a (non-compris) à b (non-compris) ;*
- $]-\infty,b[$ *désigne l'ensemble des réels strictement inférieurs à b ;*
- $]-\infty,b]$ *désigne l'ensemble des réels inférieurs ou égaux à b ;*

On peut classer les intervalles comme suit.

Résultat

Si a et b sont des nombres réels avec $a < b$, on définit ces notations :

- $[a,b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (compris) ;*
- $]a,b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (non-compris) à b (compris) ;*
- $[a,b[$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (non-compris) ;*
- $]a,b[$ *désigne l'ensemble des réels de a (non-compris) à b (non-compris) ;*
- $]-\infty,b[$ *désigne l'ensemble des réels strictement inférieurs à b ;*
- $]-\infty,b]$ *désigne l'ensemble des réels inférieurs ou égaux à b ;*
- $]a,\infty[$

On peut classer les intervalles comme suit.

Résultat

Si a et b sont des nombres réels avec $a < b$, on définit ces notations :

- $[a,b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (compris) ;*
- $]a,b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (non-compris) à b (compris) ;*
- $[a,b[$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (non-compris) ;*
- $]a,b[$ *désigne l'ensemble des réels de a (non-compris) à b (non-compris) ;*
- $]-\infty,b[$ *désigne l'ensemble des réels strictement inférieurs à b ;*
- $]-\infty,b]$ *désigne l'ensemble des réels inférieurs ou égaux à b ;*
- $]a,\infty[$ *désigne l'ensemble des réels strictement supérieurs à a ;*

On peut classer les intervalles comme suit.

Résultat

Si a et b sont des nombres réels avec $a < b$, on définit ces notations :

- $[a,b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (compris) ;*
- $]a,b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (non-compris) à b (compris) ;*
- $[a,b[$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (non-compris) ;*
- $]a,b[$ *désigne l'ensemble des réels de a (non-compris) à b (non-compris) ;*
- $]-\infty,b[$ *désigne l'ensemble des réels strictement inférieurs à b ;*
- $]-\infty,b]$ *désigne l'ensemble des réels inférieurs ou égaux à b ;*
- $]a,\infty[$ *désigne l'ensemble des réels strictement supérieurs à a ;*
- $[a,\infty[$

On peut classer les intervalles comme suit.

Résultat

Si a et b sont des nombres réels avec $a < b$, on définit ces notations :

- $[a,b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (compris) ;*
- $]a,b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (non-compris) à b (compris) ;*
- $[a,b[$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (non-compris) ;*
- $]a,b[$ *désigne l'ensemble des réels de a (non-compris) à b (non-compris) ;*
- $]-\infty,b[$ *désigne l'ensemble des réels strictement inférieurs à b ;*
- $]-\infty,b]$ *désigne l'ensemble des réels inférieurs ou égaux à b ;*
- $]a,\infty[$ *désigne l'ensemble des réels strictement supérieurs à a ;*
- $[a,\infty[$ *désigne l'ensemble des réels supérieurs ou égaux à a ;*

On peut classer les intervalles comme suit.

Résultat

Si a et b sont des nombres réels avec $a < b$, on définit ces notations :

- $[a,b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (compris) ;*
- $]a,b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (non-compris) à b (compris) ;*
- $[a,b[$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (non-compris) ;*
- $]a,b[$ *désigne l'ensemble des réels de a (non-compris) à b (non-compris) ;*
- $]-\infty,b[$ *désigne l'ensemble des réels strictement inférieurs à b ;*
- $]-\infty,b]$ *désigne l'ensemble des réels inférieurs ou égaux à b ;*
- $]a,\infty[$ *désigne l'ensemble des réels strictement supérieurs à a ;*
- $[a,\infty[$ *désigne l'ensemble des réels supérieurs ou égaux à a ;*
- $]-\infty,\infty[$

On peut classer les intervalles comme suit.

Résultat

Si a et b sont des nombres réels avec $a < b$, on définit ces notations :

- $[a,b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (compris) ;*
- $]a,b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (non-compris) à b (compris) ;*
- $[a,b[$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (non-compris) ;*
- $]a,b[$ *désigne l'ensemble des réels de a (non-compris) à b (non-compris) ;*
- $]-\infty,b[$ *désigne l'ensemble des réels strictement inférieurs à b ;*
- $]-\infty,b]$ *désigne l'ensemble des réels inférieurs ou égaux à b ;*
- $]a,\infty[$ *désigne l'ensemble des réels strictement supérieurs à a ;*
- $[a,\infty[$ *désigne l'ensemble des réels supérieurs ou égaux à a ;*
- $]-\infty,\infty[$ *désigne l'ensemble des réels, également noté $\mathbb{R}$.*

On peut classer les intervalles comme suit.

Résultat

Si a et b sont des nombres réels avec $a < b$, on définit ces notations :

- $[a,b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (compris) ;*
- $]a,b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (non-compris) à b (compris) ;*
- $[a,b[$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (non-compris) ;*
- $]a,b[$ *désigne l'ensemble des réels de a (non-compris) à b (non-compris) ;*
- $]-\infty,b[$ *désigne l'ensemble des réels strictement inférieurs à b ;*
- $]-\infty,b]$ *désigne l'ensemble des réels inférieurs ou égaux à b ;*
- $]a,\infty[$ *désigne l'ensemble des réels strictement supérieurs à a ;*
- $[a,\infty[$ *désigne l'ensemble des réels supérieurs ou égaux à a ;*
- $]-\infty,\infty[$ *désigne l'ensemble des réels, également noté $\mathbb{R}$.*

Exemple

L'ensemble des réels positifs (ou nuls) $\mathbb{R}^+$ est également noté $[0, +\infty[$.

Exemple

L'ensemble des réels positifs (ou nuls) $\mathbb{R}^+$ est également noté $[0, +\infty[$.
L'ensemble des réels *strictement positifs* est $]0, +\infty[$.

Exemple

L'ensemble des réels positifs (ou nuls) $\mathbb{R}^+$ est également noté $[0, +\infty[$.
L'ensemble des réels *strictement positifs* est $]0, +\infty[$.

Un intervalle est généralement « infini » car il contient une infinité de nombre,

Exemple

L'ensemble des réels positifs (ou nuls) $\mathbb{R}^+$ est également noté $[0,+\infty[$.
L'ensemble des réels *strictement positifs* est $]0,+\infty[$.

Un intervalle est généralement « infini » car il contient une infinité de nombre, mais parfois il est néanmoins « borné »

Exemple

- L'intervalle $[0,1]$ contient une infinité de nombres,

Exemple

L'ensemble des réels positifs (ou nuls) $\mathbb{R}^+$ est également noté $[0, +\infty[$.
L'ensemble des réels *strictement positifs* est $]0, +\infty[$.

Un intervalle est généralement « infini » car il contient une infinité de nombre, mais parfois il est néanmoins « borné »

Exemple

- L'intervalle [0,1] contient une infinité de nombres, puisqu'il contient notamment 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, etc.

Exemple

L'ensemble des réels positifs (ou nuls) $\mathbb{R}^+$ est également noté $[0,+\infty[$.
L'ensemble des réels *strictement positifs* est $]0,+\infty[$.

Un intervalle est généralement « infini » car il contient une infinité de nombre, mais parfois il est néanmoins « borné »

Exemple

- L'intervalle [0,1] contient une infinité de nombres, puisqu'il contient notamment 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, etc. Mais il est borné, car aucun des nombres n'est inférieur à 0 ou supérieur à 1

Exemple

L'ensemble des réels positifs (ou nuls) $\mathbb{R}^+$ est également noté $[0,+\infty[$.
L'ensemble des réels *strictement positifs* est $]0,+\infty[$.

Un intervalle est généralement « infini » car il contient une infinité de nombre, mais parfois il est néanmoins « borné »

Exemple

- L'intervalle [0,1] contient une infinité de nombres, puisqu'il contient notamment 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, etc. Mais il est borné, car aucun des nombres n'est inférieur à 0 ou supérieur à 1 (c'est la définition de cet intervalle !).

Exemple

L'ensemble des réels positifs (ou nuls) $\mathbb{R}^+$ est également noté $[0,+\infty[$.
L'ensemble des réels *strictement positifs* est $]0,+\infty[$.

Un intervalle est généralement « infini » car il contient une infinité de nombre, mais parfois il est néanmoins « borné »

Exemple

- L'intervalle [0,1] contient une infinité de nombres, puisqu'il contient notamment 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, etc. Mais il est borné, car aucun des nombres n'est inférieur à 0 ou supérieur à 1 (c'est la définition de cet intervalle !).
- L'intervalle [4,4] contient un seul nombre

Exemple

L'ensemble des réels positifs (ou nuls) $\mathbb{R}^+$ est également noté $[0,+\infty[$.
L'ensemble des réels *strictement positifs* est $]0,+\infty[$.

Un intervalle est généralement « infini » car il contient une infinité de nombre, mais parfois il est néanmoins « borné »

Exemple

- L'intervalle [0,1] contient une infinité de nombres, puisqu'il contient notamment 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, etc. Mais il est borné, car aucun des nombres n'est inférieur à 0 ou supérieur à 1 (c'est la définition de cet intervalle !).
- L'intervalle [4,4] contient un seul nombre : le nombre 4.

Exemple

L'ensemble des réels positifs (ou nuls) $\mathbb{R}^+$ est également noté $[0,+\infty[$.
L'ensemble des réels *strictement positifs* est $]0,+\infty[$.

Un intervalle est généralement « infini » car il contient une infinité de nombre, mais parfois il est néanmoins « borné »

Exemple

- L'intervalle [0,1] contient une infinité de nombres, puisqu'il contient notamment 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, etc. Mais il est borné, car aucun des nombres n'est inférieur à 0 ou supérieur à 1 (c'est la définition de cet intervalle !).
- L'intervalle [4,4] contient un seul nombre : le nombre 4.
- L'intervalle]4,4[ne contient aucun nombre!

Exemple

L'ensemble des réels positifs (ou nuls) $\mathbb{R}^+$ est également noté $[0,+\infty[$.
L'ensemble des réels *strictement positifs* est $]0,+\infty[$.

Un intervalle est généralement « infini » car il contient une infinité de nombre, mais parfois il est néanmoins « borné »

Exemple

- L'intervalle $[0,1]$ contient une infinité de nombres, puisqu'il contient notamment 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, etc. Mais il est borné, car aucun des nombres n'est inférieur à 0 ou supérieur à 1 (c'est la définition de cet intervalle !).
- L'intervalle $[4,4]$ contient un seul nombre : le nombre 4.
- L'intervalle $]4,4[$ ne contient aucun nombre! Car aucun nombre n'est à la fois strictement supérieur et strictement inférieur à 4.

Exemple

L'ensemble des réels positifs (ou nuls) $\mathbb{R}^+$ est également noté $[0,+\infty[$.
L'ensemble des réels *strictement positifs* est $]0,+\infty[$.

Un intervalle est généralement « infini » car il contient une infinité de nombre, mais parfois il est néanmoins « borné »

Exemple

- L'intervalle $[0,1]$ contient une infinité de nombres, puisqu'il contient notamment 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, etc. Mais il est borné, car aucun des nombres n'est inférieur à 0 ou supérieur à 1 (c'est la définition de cet intervalle !).
- L'intervalle $[4,4]$ contient un seul nombre : le nombre 4.
- L'intervalle $]4,4[$ ne contient aucun nombre! Car aucun nombre n'est à la fois strictement supérieur et strictement inférieur à 4.

Contenu de la section

Contenu de la section

Considérons les calculs suivants :

$$1+2=3,$$

Considérons les calculs suivants :

$$1+2=3, \quad 1+2+3=6,$$

Considérons les calculs suivants :

$$1+2=3, \quad 1+2+3=6, \quad 1+2+3+4=10,$$

Considérons les calculs suivants :

$$1+2=3, \quad 1+2+3=6, \quad 1+2+3+4=10, \quad \dots$$

Considérons les calculs suivants :

$$1+2=3, \quad 1+2+3=6, \quad 1+2+3+4=10, \quad \ldots$$

Comment exprimer un calcul pour sommer les cent nombres de 1 jusqu'à 100 ?

Considérons les calculs suivants :

$$1+2=3, \quad 1+2+3=6, \quad 1+2+3+4=10, \quad \ldots$$

Comment exprimer un calcul pour sommer les cent nombres de 1 jusqu'à 100 ? Où jusqu'à une valeur n quelconque ?

Considérons les calculs suivants :

$$1+2=3, \quad 1+2+3=6, \quad 1+2+3+4=10, \quad \ldots$$

Comment exprimer un calcul pour sommer les cent nombres de 1 jusqu'à 100 ? Où jusqu'à une valeur n quelconque ? Une solution classique est d'inventer une notation !

Considérons les calculs suivants :

$$1+2=3, \quad 1+2+3=6, \quad 1+2+3+4=10, \quad \ldots$$

Comment exprimer un calcul pour sommer les cent nombres de 1 jusqu'à 100 ? Où jusqu'à une valeur n quelconque ? Une solution classique est d'inventer une notation !

Nous définissons un *symbole de sommation* comme suit :

Considérons les calculs suivants :

$$1+2=3, \quad 1+2+3=6, \quad 1+2+3+4=10, \quad \ldots$$

Comment exprimer un calcul pour sommer les cent nombres de 1 jusqu'à 100 ? Où jusqu'à une valeur n quelconque ? Une solution classique est d'inventer une notation !

Nous définissons un *symbole de sommation* comme suit :

Définition

Si m et n sont des entiers

Considérons les calculs suivants :

$$1+2=3, \quad 1+2+3=6, \quad 1+2+3+4=10, \quad \dots$$

Comment exprimer un calcul pour sommer les cent nombres de 1 jusqu'à 100 ? Où jusqu'à une valeur n quelconque ? Une solution classique est d'inventer une notation !

Nous définissons un *symbole de sommation* comme suit :

Définition

Si m et n sont des entiers, $m \leq n$,

Considérons les calculs suivants :

$$1+2=3, \quad 1+2+3=6, \quad 1+2+3+4=10, \quad \ldots$$

Comment exprimer un calcul pour sommer les cent nombres de 1 jusqu'à 100 ? Où jusqu'à une valeur n quelconque ? Une solution classique est d'inventer une notation !

Nous définissons un *symbole de sommation* comme suit :

Définition

Si m et n sont des entiers, $m \leq n$, et si $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ sont des nombres

Considérons les calculs suivants :

$$1+2=3, \quad 1+2+3=6, \quad 1+2+3+4=10, \quad \ldots$$

Comment exprimer un calcul pour sommer les cent nombres de 1 jusqu'à 100 ? Où jusqu'à une valeur n quelconque ? Une solution classique est d'inventer une notation !

Nous définissons un *symbole de sommation* comme suit :

Définition

Si m et n sont des entiers, $m \leq n$, et si $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ sont des nombres, on définit :

Considérons les calculs suivants :

$$1 + 2 = 3, \quad 1 + 2 + 3 = 6, \quad 1 + 2 + 3 + 4 = 10, \quad \ldots$$

Comment exprimer un calcul pour sommer les cent nombres de 1 jusqu'à 100 ? Où jusqu'à une valeur n quelconque ? Une solution classique est d'inventer une notation !

Nous définissons un *symbole de sommation* comme suit :

Définition

Si m et n sont des entiers, $m \leq n$, et si $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ sont des nombres, on définit :

$$\sum_{k=m}^{n} a_k :=$$

Considérons les calculs suivants :

$$1+2=3, \quad 1+2+3=6, \quad 1+2+3+4=10, \quad \ldots$$

Comment exprimer un calcul pour sommer les cent nombres de 1 jusqu'à 100 ? Où jusqu'à une valeur n quelconque ? Une solution classique est d'inventer une notation !

Nous définissons un *symbole de sommation* comme suit :

Définition

Si m et n sont des entiers, $m \leq n$, et si $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ sont des nombres, on définit :

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

Exemple

Il s'agit juste de donner une autre manière d'écrire les sommes :

Exemple

Il s'agit juste de donner une autre manière d'écrire les sommes :

$$\sum_{k=1}^{100} k =$$

Exemple

Il s'agit juste de donner une autre manière d'écrire les sommes :

$$\sum_{k=1}^{100} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + 100$$

Exemple

Il s'agit juste de donner une autre manière d'écrire les sommes :

$$\sum_{k=1}^{100} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + 100$$

$$\sum_{k=1}^{100} k^2 =$$

Exemple

Il s'agit juste de donner une autre manière d'écrire les sommes :

$$\sum_{k=1}^{100} k = 1+2+3+\ldots+100$$

$$\sum_{k=1}^{100} k^2 = 1+4+9+\ldots+10000$$

Exemple

Il s'agit juste de donner une autre manière d'écrire les sommes :

$$\sum_{k=1}^{100} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + 100$$

$$\sum_{k=1}^{100} k^2 = 1 + 4 + 9 + \ldots + 10000$$

$$\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k} =$$

Exemple

Il s'agit juste de donner une autre manière d'écrire les sommes :

$$\sum_{k=1}^{100} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + 100$$

$$\sum_{k=1}^{100} k^2 = 1 + 4 + 9 + \ldots + 10000$$

$$\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{100}$$

Exemple

Il s'agit juste de donner une autre manière d'écrire les sommes :

$$\sum_{k=1}^{100} k = 1+2+3+\ldots+100$$

$$\sum_{k=1}^{100} k^2 = 1+4+9+\ldots+10000$$

$$\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k} = \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{100}$$

$$\sum_{k=1}^{100} 3 =$$

Exemple

Il s'agit juste de donner une autre manière d'écrire les sommes :

$$\sum_{k=1}^{100} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + 100$$

$$\sum_{k=1}^{100} k^2 = 1 + 4 + 9 + \ldots + 10000$$

$$\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{100}$$

$$\sum_{k=1}^{100} 3 = 3 + 3 + 3 + \cdots + 3 (= 3 \times 100 = 300)$$

Exemple

Il s'agit juste de donner une autre manière d'écrire les sommes :

$$\sum_{k=1}^{100} k = 1+2+3+\ldots+100$$

$$\sum_{k=1}^{100} k^2 = 1+4+9+\ldots+10000$$

$$\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k} = \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{100}$$

$$\sum_{k=1}^{100} 3 = 3+3+3+\cdots+3(=3\times 100=300)$$

$$\sum_{k=5}^{10} (k-1) =$$

Exemple

Il s'agit juste de donner une autre manière d'écrire les sommes :

$$\sum_{k=1}^{100} k = 1+2+3+\ldots+100$$

$$\sum_{k=1}^{100} k^2 = 1+4+9+\ldots+10000$$

$$\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k} = \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{100}$$

$$\sum_{k=1}^{100} 3 = 3+3+3+\cdots+3(=3\times 100=300)$$

$$\sum_{k=5}^{10} (k-1) = 4+5+6+7+8+9$$

Exemple

$$\sum_{k=5}^{5}(k-1)$$

Exemple

$$\sum_{k=5}^{5}(k-1)=4$$

Exemple

$$\sum_{k=5}^{5}(k-1) = 4$$

$$\frac{1}{100}\sum_{k=1}^{100} k$$

Exemple

$$\sum_{k=5}^{5}(k-1) = 4$$

$$\frac{1}{100}\sum_{k=1}^{100} k = \frac{1+2+3+\ldots+100}{100}$$

Exemple

$$\sum_{k=5}^{5}(k-1)=4$$

$$\frac{1}{100}\sum_{k=1}^{100}k=\frac{1+2+3+\ldots+100}{100}$$

$$\sum_{k=1}^{100}\frac{k}{100}$$

Exemple

$$\sum_{k=5}^{5}(k-1) = 4$$

$$\frac{1}{100}\sum_{k=1}^{100} k = \frac{1+2+3+\ldots+100}{100}$$

$$\sum_{k=1}^{100}\frac{k}{100} = \frac{1}{100}+\frac{2}{100}+\frac{3}{100}+\ldots+\frac{100}{100}$$

Exemple

$$\sum_{k=5}^{5}(k-1) = 4$$

$$\frac{1}{100}\sum_{k=1}^{100} k = \frac{1+2+3+\ldots+100}{100}$$

$$\sum_{k=1}^{100}\frac{k}{100} = \frac{1}{100}+\frac{2}{100}+\frac{3}{100}+\ldots+\frac{100}{100}$$

$$(n+1)+\sum_{k=1}^{n} k$$

Exemple

$$\sum_{k=5}^{5}(k-1) = 4$$

$$\frac{1}{100}\sum_{k=1}^{100} k = \frac{1+2+3+\ldots+100}{100}$$

$$\sum_{k=1}^{100}\frac{k}{100} = \frac{1}{100}+\frac{2}{100}+\frac{3}{100}+\ldots+\frac{100}{100}$$

$$(n+1)+\sum_{k=1}^{n} k = (n+1)+(1+2+3+\cdots+n)$$

Exemple

$$\sum_{k=5}^{5}(k-1) = 4$$

$$\frac{1}{100}\sum_{k=1}^{100} k = \frac{1+2+3+\ldots+100}{100}$$

$$\sum_{k=1}^{100}\frac{k}{100} = \frac{1}{100}+\frac{2}{100}+\frac{3}{100}+\ldots+\frac{100}{100}$$

$$\begin{aligned}(n+1)+\sum_{k=1}^{n} k &= (n+1)+(1+2+3+\cdots+n)\\ &= 1+2+3+\cdots+n+(n+1)\end{aligned}$$

Exemple

$$\sum_{k=5}^{5}(k-1) = 4$$

$$\frac{1}{100}\sum_{k=1}^{100} k = \frac{1+2+3+\ldots+100}{100}$$

$$\sum_{k=1}^{100}\frac{k}{100} = \frac{1}{100}+\frac{2}{100}+\frac{3}{100}+\ldots+\frac{100}{100}$$

$$\begin{aligned}(n+1)+\sum_{k=1}^{n} k &= (n+1)+(1+2+3+\cdots+n)\\ &= 1+2+3+\cdots+n+(n+1)\\ &= \sum_{k=1}^{n+1} k.\end{aligned}$$

Résultat

Le symbole somme vérifie les relations suivantes :

Résultat

Le symbole somme vérifie les relations suivantes :

$$\sum_{k=m}^{n}(a_k + b_k)$$

Résultat

Le symbole somme vérifie les relations suivantes :

$$\sum_{k=m}^{n}(a_k + b_k) = \left(\sum_{k=m}^{n} a_k\right) + \left(\sum_{k=m}^{n} b_k\right)$$

Résultat

Le symbole somme vérifie les relations suivantes :

$$\sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k) = \left(\sum_{k=m}^{n} a_k \right) + \left(\sum_{k=m}^{n} b_k \right)$$

$$\sum_{k=m}^{n} \lambda a_k$$

Résultat

Le symbole somme vérifie les relations suivantes :

$$\sum_{k=m}^{n}(a_k + b_k) = \left(\sum_{k=m}^{n} a_k\right) + \left(\sum_{k=m}^{n} b_k\right)$$

$$\sum_{k=m}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=m}^{n} a_k$$

Résultat

Le symbole somme vérifie les relations suivantes :

$$\sum_{k=m}^{n}(a_k + b_k) = \left(\sum_{k=m}^{n} a_k\right) + \left(\sum_{k=m}^{n} b_k\right)$$

$$\sum_{k=m}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=m}^{n} a_k$$

$$\sum_{k=m}^{n} a_k$$

Résultat

Le symbole somme vérifie les relations suivantes :

$$\sum_{k=m}^{n}(a_k+b_k)=\left(\sum_{k=m}^{n}a_k\right)+\left(\sum_{k=m}^{n}b_k\right)$$

$$\sum_{k=m}^{n}\lambda a_k=\lambda\sum_{k=m}^{n}a_k$$

$$\sum_{k=m}^{n}a_k=\sum_{k=m}^{n}a_{n+m-k}$$

Résultat

Le symbole somme vérifie les relations suivantes :

$$\sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k) = \left(\sum_{k=m}^{n} a_k \right) + \left(\sum_{k=m}^{n} b_k \right)$$

$$\sum_{k=m}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=m}^{n} a_k$$

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n} a_{n+m-k}$$

Résultat

Le symbole somme vérifie les relations suivantes :

$$\sum_{k=m}^{n}(a_k + b_k) = \left(\sum_{k=m}^{n} a_k\right) + \left(\sum_{k=m}^{n} b_k\right)$$

$$\sum_{k=m}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=m}^{n} a_k$$

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n} a_{n+m-k}$$

Le dernier résultat dit juste que si on somme des éléments dans un sens ou dans l'autre, le résultat ne change pas:

Résultat

Le symbole somme vérifie les relations suivantes :

$$\sum_{k=m}^{n}(a_k+b_k)=\left(\sum_{k=m}^{n}a_k\right)+\left(\sum_{k=m}^{n}b_k\right)$$

$$\sum_{k=m}^{n}\lambda a_k=\lambda\sum_{k=m}^{n}a_k$$

$$\sum_{k=m}^{n}a_k=\sum_{k=m}^{n}a_{n+m-k}$$

Le dernier résultat dit juste que si on somme des éléments dans un sens ou dans l'autre, le résultat ne change pas:

$$a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n=a_n+a_{n-1}+\cdots++a_2+a_1.$$

Démonstration.

Preuve de $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n} a_{n+m-k}$ (la dernière égalité)

Démonstration.

Preuve de $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n} a_{n+m-k}$ (la dernière égalité)
Le membre de gauche est :

Démonstration.

Preuve de $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n} a_{n+m-k}$ (la dernière égalité)
Le membre de gauche est :

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$$

Démonstration.

Preuve de $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n} a_{n+m-k}$ (la dernière égalité)

Le membre de gauche est :

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$$

et le membre de droite est

$$\sum_{k=m}^{n} a_{n+m-k} = a_{n+m-(m)} + a_{n+m-(m+1)} + a_{n+m-(m+2)} + \ldots$$
$$\ldots + a_{n+m-(n-1)} + a_{n+m-(n)}$$

Démonstration.

Preuve de $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n} a_{n+m-k}$ (la dernière égalité)

Le membre de gauche est :

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$$

et le membre de droite est

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n} a_{n+m-k} &= a_{n+m-(m)} + a_{n+m-(m+1)} + a_{n+m-(m+2)} + \ldots \\ &\qquad \ldots + a_{n+m-(n-1)} + a_{n+m-(n)} \\ &= a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_{m+1} + a_m\end{aligned}$$

Démonstration.

Preuve de $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n} a_{n+m-k}$ (la dernière égalité)

Le membre de gauche est :

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$$

et le membre de droite est

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n} a_{n+m-k} &= a_{n+m-(m)} + a_{n+m-(m+1)} + a_{n+m-(m+2)} + \dots \\ &\qquad \dots + a_{n+m-(n-1)} + a_{n+m-(n)} \\ &= a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_{m+1} + a_m\end{aligned}$$

Démonstration.

Preuve de $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n} a_{n+m-k}$ (la dernière égalité)
Le membre de gauche est :

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$$

et le membre de droite est

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n} a_{n+m-k} &= a_{n+m-(m)} + a_{n+m-(m+1)} + a_{n+m-(m+2)} + \dots \\ &\qquad \dots + a_{n+m-(n-1)} + a_{n+m-(n)} \\ &= a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_{m+1} + a_m\end{aligned}$$

Les deux sont donc égaux (l'un est simplement sommé dans un sens, l'autre l'est dans l'autre sens). $\square$

Rappel

Nous avons défini le signe somme :

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

Rappel

Nous avons défini le signe somme :

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

Exemple

Nous avions déjà prouvé par récurrence

Rappel

Nous avons défini le signe somme :

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

Exemple

Nous avions déjà prouvé par récurrence, mais avec d'autres notations :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Rappel

Nous avons défini le signe somme :

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

Exemple

Nous avions déjà prouvé par récurrence, mais avec d'autres notations :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

On va maintenant en voir une preuve simple en réécrivant la somme à l'envers.

Calcul de la somme des entiers de 1 à n.

On veut calculer $S = \sum_{k=1}^{n} k$.

Calcul de la somme des entiers de 1 à n.

On veut calculer $S = \sum_{k=1}^{n} k$. On écrit la somme dans les deux sens:

$$S = 1 + 2 + \cdots + n$$

$$S = n + \cdots + 2 + 1.$$

(Ces deux sommes sont les mêmes.)

Calcul de la somme des entiers de 1 à n.

On veut calculer $S = \sum_{k=1}^{n} k$. On écrit la somme dans les deux sens:

$$S = 1 + 2 + \cdots + n$$

$$S = n + \cdots + 2 + 1.$$

(Ces deux sommes sont les mêmes.) On somme alors ligne à ligne: la somme des termes qui sont l'un en face de l'autre vaut toujours $n+1$, et elle est répétée n fois:

Calcul de la somme des entiers de 1 à n.

On veut calculer $S = \sum_{k=1}^{n} k$. On écrit la somme dans les deux sens:

$$S = 1 + 2 + \cdots + n$$

$$S = n + \cdots + 2 + 1.$$

(Ces deux sommes sont les mêmes.) On somme alors ligne à ligne: la somme des termes qui sont l'un en face de l'autre vaut toujours $n+1$, et elle est répétée n fois:

$$2S = n(n+1).$$

Calcul de la somme des entiers de 1 à n.

On veut calculer $S = \sum_{k=1}^{n} k$. On écrit la somme dans les deux sens:

$$S = 1 + 2 + \cdots + n$$

$$S = n + \cdots + 2 + 1.$$

(Ces deux sommes sont les mêmes.) On somme alors ligne à ligne: la somme des termes qui sont l'un en face de l'autre vaut toujours $n+1$, et elle est répétée n fois:

$$2S = n(n+1).$$

Ce qui donne donc:

$$S = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Calcul de la somme des entiers de 1 à n.

On veut calculer $S = \sum_{k=1}^{n} k$. On écrit la somme dans les deux sens:

$$S = 1 + 2 + \cdots + n$$

$$S = n + \cdots + 2 + 1.$$

(Ces deux sommes sont les mêmes.) On somme alors ligne à ligne: la somme des termes qui sont l'un en face de l'autre vaut toujours $n+1$, et elle est répétée n fois:

$$2S = n(n+1).$$

Ce qui donne donc:

$$S = \frac{n(n+1)}{2}.$$

C'est (selon la légende) la preuve que Gauss donna... à 7 ans!

Contenu de la section

Moyenne

Définition

La moyenne arithmétique de n nombres $x_1, \ldots, x_n$

Moyenne

Définition

La moyenne arithmétique de n nombres $x_1, \ldots, x_n$ est la quantité

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n}$$

Moyenne

Définition

La moyenne arithmétique de n nombres $x_1, \dots, x_n$ est la quantité

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n}$$

La moyenne arithmétique donne une idée de la valeur « moyenne » des valeurs d'une mesure.

Moyenne

Définition

La moyenne arithmétique de n nombres $x_1, \ldots, x_n$ est la quantité

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n}$$

La moyenne arithmétique donne une idée de la valeur « moyenne » des valeurs d'une mesure.

Exemple

Si cinq étudiant-e-s ont suivi le cours de mathématiques,

Moyenne

Définition

La moyenne arithmétique de n nombres $x_1, \ldots, x_n$ est la quantité

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n}$$

La moyenne arithmétique donne une idée de la valeur « moyenne » des valeurs d'une mesure.

Exemple

Si cinq étudiant-e-s ont suivi le cours de mathématiques, et ont eut des notes e_1, e_2, e_3, e_4, e_5,

Moyenne

Définition

La moyenne arithmétique de n nombres $x_1, \ldots, x_n$ est la quantité

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n}$$

La moyenne arithmétique donne une idée de la valeur « moyenne » des valeurs d'une mesure.

Exemple

Si cinq étudiant-e-s ont suivi le cours de mathématiques, et ont eut des notes e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, alors on dira que la moyenne des notes pour ce cours est

Moyenne

Définition

La moyenne arithmétique de n nombres $x_1, \ldots, x_n$ est la quantité

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n}$$

La moyenne arithmétique donne une idée de la valeur « moyenne » des valeurs d'une mesure.

Exemple

Si cinq étudiant-e-s ont suivi le cours de mathématiques, et ont eut des notes e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, alors on dira que la moyenne des notes pour ce cours est

$$\frac{e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5}{5}.$$

Résultat

La moyenne arithmétique d'une séquence de nombres est toujours:

Résultat

La moyenne arithmétique d'une séquence de nombres est toujours:

- *plus petite que le plus grand de ces nombres*

Résultat

La moyenne arithmétique d'une séquence de nombres est toujours:

- *plus petite que le plus grand de ces nombres*
- *et plus grande que le plus petit de ces nombres.*

Résultat

La moyenne arithmétique d'une séquence de nombres est toujours:

- *plus petite que le plus grand de ces nombres*
- *et plus grande que le plus petit de ces nombres.*

Démonstration.

Considérons la moyenne $\bar{x}$ de n nombres $x_1, \ldots, x_n$.

Résultat

La moyenne arithmétique d'une séquence de nombres est toujours:

- *plus petite que le plus grand de ces nombres*
- *et plus grande que le plus petit de ces nombres.*

Démonstration.

Considérons la moyenne $\bar{x}$ de n nombres $x_1, \ldots, x_n$. Le plus petit des ces nombres a un certain indice, disons j.

Résultat

La moyenne arithmétique d'une séquence de nombres est toujours:

- *plus petite que le plus grand de ces nombres*
- *et plus grande que le plus petit de ces nombres.*

Démonstration.

Considérons la moyenne $\bar{x}$ de n nombres $x_1, \ldots, x_n$. Le plus petit des ces nombres a un certain indice, disons j. De même, le plus grand a un certain indice disons J.

Résultat

La moyenne arithmétique d'une séquence de nombres est toujours:

- *plus petite que le plus grand de ces nombres*
- *et plus grande que le plus petit de ces nombres.*

Démonstration.

Considérons la moyenne $\bar{x}$ de n nombres $x_1, \ldots, x_n$. Le plus petit des ces nombres a un certain indice, disons j. De même, le plus grand a un certain indice disons J. C'est-à-dire qu'on a

$$x_j \leq x_k \leq x_J \text{ pour tout } k \text{ entre } 1 \text{ et } n.$$

Résultat

La moyenne arithmétique d'une séquence de nombres est toujours:

- *plus petite que le plus grand de ces nombres*
- *et plus grande que le plus petit de ces nombres.*

Démonstration.

Considérons la moyenne $\bar{x}$ de n nombres $x_1,\ldots,x_n$. Le plus petit des ces nombres a un certain indice, disons j. De même, le plus grand a un certain indice disons J. C'est-à-dire qu'on a

$$x_j \leq x_k \leq x_J \text{ pour tout } k \text{ entre } 1 \text{ et } n.$$

Dès lors :

Résultat

La moyenne arithmétique d'une séquence de nombres est toujours:

- *plus petite que le plus grand de ces nombres*
- *et plus grande que le plus petit de ces nombres.*

Démonstration.

Considérons la moyenne $\bar{x}$ de n nombres $x_1,\ldots,x_n$. Le plus petit des ces nombres a un certain indice, disons j. De même, le plus grand a un certain indice disons J. C'est-à-dire qu'on a

$$x_j \leq x_k \leq x_J \text{ pour tout } k \text{ entre } 1 \text{ et } n.$$

Dès lors :

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq$$

Résultat

La moyenne arithmétique d'une séquence de nombres est toujours:

- *plus petite que le plus grand de ces nombres*
- *et plus grande que le plus petit de ces nombres.*

Démonstration.

Considérons la moyenne $\bar{x}$ de n nombres $x_1, \ldots, x_n$. Le plus petit des ces nombres a un certain indice, disons j. De même, le plus grand a un certain indice disons J. C'est-à-dire qu'on a

$$x_j \leq x_k \leq x_J \text{ pour tout } k \text{ entre } 1 \text{ et } n.$$

Dès lors :

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq x_J + x_J + \cdots + x_J$$

Résultat

La moyenne arithmétique d'une séquence de nombres est toujours:

- *plus petite que le plus grand de ces nombres*
- *et plus grande que le plus petit de ces nombres.*

Démonstration.

Considérons la moyenne $\bar{x}$ de n nombres $x_1, \ldots, x_n$. Le plus petit des ces nombres a un certain indice, disons j. De même, le plus grand a un certain indice disons J. C'est-à-dire qu'on a

$$x_j \leq x_k \leq x_J \text{ pour tout } k \text{ entre } 1 \text{ et } n.$$

Dès lors :

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq x_J + x_J + \cdots + x_J = nx_J$$

Résultat

La moyenne arithmétique d'une séquence de nombres est toujours:

- *plus petite que le plus grand de ces nombres*
- *et plus grande que le plus petit de ces nombres.*

Démonstration.

Considérons la moyenne $\bar{x}$ de n nombres $x_1, \ldots, x_n$. Le plus petit des ces nombres a un certain indice, disons j. De même, le plus grand a un certain indice disons J. C'est-à-dire qu'on a

$$x_j \leq x_k \leq x_J \text{ pour tout } k \text{ entre } 1 \text{ et } n.$$

Dès lors :

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq x_J + x_J + \cdots + x_J = nx_J$$

dont on tire

Résultat

La moyenne arithmétique d'une séquence de nombres est toujours:

- *plus petite que le plus grand de ces nombres*
- *et plus grande que le plus petit de ces nombres.*

Démonstration.

Considérons la moyenne $\bar{x}$ de n nombres $x_1,\ldots,x_n$. Le plus petit des ces nombres a un certain indice, disons j. De même, le plus grand a un certain indice disons J. C'est-à-dire qu'on a

$$x_j \leq x_k \leq x_J \text{ pour tout } k \text{ entre } 1 \text{ et } n.$$

Dès lors :

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq x_J + x_J + \cdots + x_J = nx_J$$

dont on tire

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n} \leq x_J.$$

Résultat

La moyenne arithmétique d'une séquence de nombres est toujours:

- *plus petite que le plus grand de ces nombres*
- *et plus grande que le plus petit de ces nombres.*

Démonstration.

Considérons la moyenne $\bar{x}$ de n nombres $x_1, \ldots, x_n$. Le plus petit des ces nombres a un certain indice, disons j. De même, le plus grand a un certain indice disons J. C'est-à-dire qu'on a

$$x_j \leq x_k \leq x_J \text{ pour tout } k \text{ entre } 1 \text{ et } n.$$

Dès lors :

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq x_J + x_J + \cdots + x_J = nx_J$$

dont on tire

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n} \leq x_J.$$

Pour cette dernière étape, on a juste sommé des inégalités.

Résultat

La moyenne arithmétique d'une séquence de nombres est toujours:

- *plus petite que le plus grand de ces nombres*
- *et plus grande que le plus petit de ces nombres.*

Démonstration.

Considérons la moyenne $\bar{x}$ de n nombres $x_1, \ldots, x_n$. Le plus petit des ces nombres a un certain indice, disons j. De même, le plus grand a un certain indice disons J. C'est-à-dire qu'on a

$$x_j \leq x_k \leq x_J \text{ pour tout } k \text{ entre } 1 \text{ et } n.$$

Dès lors :

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq x_J + x_J + \cdots + x_J = nx_J$$

dont on tire

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n} \leq x_J.$$

Pour cette dernière étape, on a juste sommé des inégalités.
La preuve est la même pour le plus petit nombre x_j. □

Contenu de la section

Un pourcentage est une façon commode de quantifier le rapport entre deux quantités.

Exemple

Si on affirme « 50% des humains sont des femmes. »,

Un pourcentage est une façon commode de quantifier le rapport entre deux quantités.

Exemple

Si on affirme « 50% des humains sont des femmes. », ceci signifie que dans la population, la moitié sont des femmes : $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$.

Un pourcentage est une façon commode de quantifier le rapport entre deux quantités.

Exemple

Si on affirme « 50% des humains sont des femmes. », ceci signifie que dans la population, la moitié sont des femmes : $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$.

Le « pourcent » décrit une proportion « pour cent unités ».

Un pourcentage est une façon commode de quantifier le rapport entre deux quantités.

Exemple

Si on affirme « 50% des humains sont des femmes. », ceci signifie que dans la population, la moitié sont des femmes : $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$.

Le « pourcent » décrit une proportion « pour cent unités ». En d'autres termes, on décrit un nombre qui doit être divisé par cent.

Un pourcentage est une façon commode de quantifier le rapport entre deux quantités.

Exemple

Si on affirme « 50% des humains sont des femmes. », ceci signifie que dans la population, la moitié sont des femmes : $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$.

Le « pourcent » décrit une proportion « pour cent unités ». En d'autres termes, on décrit un nombre qui doit être divisé par cent.

Exemple

« Le taux de réussite des étudiant-e-s de bachelier de l'année passée était d'un tiers. »

Un pourcentage est une façon commode de quantifier le rapport entre deux quantités.

Exemple

Si on affirme « 50% des humains sont des femmes. », ceci signifie que dans la population, la moitié sont des femmes : $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$.

Le « pourcent » décrit une proportion « pour cent unités ». En d'autres termes, on décrit un nombre qui doit être divisé par cent.

Exemple

« Le taux de réussite des étudiant-e-s de bachelier de l'année passée était d'un tiers. » En d'autres termes, un-e étudiant-e sur trois avait réussi.

Un pourcentage est une façon commode de quantifier le rapport entre deux quantités.

Exemple

Si on affirme « 50% des humains sont des femmes. », ceci signifie que dans la population, la moitié sont des femmes : $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$.

Le « pourcent » décrit une proportion « pour cent unités ». En d'autres termes, on décrit un nombre qui doit être divisé par cent.

Exemple

« Le taux de réussite des étudiant-e-s de bachelier de l'année passée était d'un tiers. » En d'autres termes, un-e étudiant-e sur trois avait réussi. Ceci est approximativement 33% car

$$\frac{1}{3}$$

Un pourcentage est une façon commode de quantifier le rapport entre deux quantités.

Exemple

Si on affirme « 50% des humains sont des femmes. », ceci signifie que dans la population, la moitié sont des femmes : $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$.

Le « pourcent » décrit une proportion « pour cent unités ». En d'autres termes, on décrit un nombre qui doit être divisé par cent.

Exemple

« Le taux de réussite des étudiant-e-s de bachelier de l'année passée était d'un tiers. » En d'autres termes, un-e étudiant-e sur trois avait réussi. Ceci est approximativement 33% car

$$\frac{1}{3} = \frac{\frac{1}{3}100}{100}$$

Un pourcentage est une façon commode de quantifier le rapport entre deux quantités.

Exemple

Si on affirme « 50% des humains sont des femmes. », ceci signifie que dans la population, la moitié sont des femmes : $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$.

Le « pourcent » décrit une proportion « pour cent unités ». En d'autres termes, on décrit un nombre qui doit être divisé par cent.

Exemple

« Le taux de réussite des étudiant-e-s de bachelier de l'année passée était d'un tiers. » En d'autres termes, un-e étudiant-e sur trois avait réussi. Ceci est approximativement 33% car

$$\frac{1}{3} = \frac{\frac{1}{3}100}{100} = \frac{33.3\ldots3\ldots}{100} =$$

Un pourcentage est une façon commode de quantifier le rapport entre deux quantités.

Exemple

Si on affirme « 50% des humains sont des femmes. », ceci signifie que dans la population, la moitié sont des femmes : $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$.

Le « pourcent » décrit une proportion « pour cent unités ». En d'autres termes, on décrit un nombre qui doit être divisé par cent.

Exemple

« Le taux de réussite des étudiant-e-s de bachelier de l'année passée était d'un tiers. » En d'autres termes, un-e étudiant-e sur trois avait réussi. Ceci est approximativement 33% car

$$\frac{1}{3} = \frac{\frac{1}{3}100}{100} = \frac{33.3\ldots3\ldots}{100} = 33.3\ldots3\ldots\%$$

- Le pourcentage est une information globale, et non individuelle.

- Le pourcentage est une information globale, et non individuelle.

Exemple

Un taux de 33% ne veut pas dire qu'en prenant trois étudiant-e-s au hasard, un-e seul-e réussira.

- Le pourcentage est une information globale, et non individuelle.

Exemple

Un taux de 33% ne veut pas dire qu'en prenant trois étudiant-e-s au hasard, un-e seul-e réussira.

- Le pourcentage n'est pas de la voyance.

- Le pourcentage est une information globale, et non individuelle.

Exemple

Un taux de 33% ne veut pas dire qu'en prenant trois étudiant-e-s au hasard, un-e seul-e réussira.

- Le pourcentage n'est pas de la voyance.

Exemple

Le taux de réussite peut très bien être différent cette année !

- Le pourcentage est une information globale, et non individuelle.

Exemple

Un taux de 33% ne veut pas dire qu'en prenant trois étudiant-e-s au hasard, un-e seul-e réussira.

- Le pourcentage n'est pas de la voyance.

Exemple

Le taux de réussite peut très bien être différent cette année ! Il dépend de vous !

Contenu de la section

Sur la notation des produits

Généralement le produit entre deux quantités se note en juxtaposant ces quantités.

Sur la notation des produits

Généralement le produit entre deux quantités se note en juxtaposant ces quantités.

Exemple

Par exemple ab veut dire « a fois b »,

Sur la notation des produits

Généralement le produit entre deux quantités se note en juxtaposant ces quantités.

Exemple

Par exemple ab veut dire « a fois b », et $3x$ veut dire « 3 fois x ».

Sur la notation des produits

Généralement le produit entre deux quantités se note en juxtaposant ces quantités.

Exemple

Par exemple ab veut dire « a fois b », et $3x$ veut dire « 3 fois x ».

Exemple

Si $a = 3$ et $b = 5$,

Sur la notation des produits

Généralement le produit entre deux quantités se note en juxtaposant ces quantités.

Exemple

Par exemple ab veut dire « a fois b », et $3x$ veut dire « 3 fois x ».

Exemple

Si $a = 3$ et $b = 5$, écrire $ab = 35$ est source de confusion !

Sur la notation des produits

Généralement le produit entre deux quantités se note en juxtaposant ces quantités.

Exemple

Par exemple ab veut dire « a fois b », et $3x$ veut dire « 3 fois x ».

Exemple

Si $a = 3$ et $b = 5$, écrire $ab = 35$ est source de confusion !

Autre notation

Sur la notation des produits

Généralement le produit entre deux quantités se note en juxtaposant ces quantités.

Exemple

Par exemple ab veut dire « a fois b », et $3x$ veut dire « 3 fois x ».

Exemple

Si $a = 3$ et $b = 5$, écrire $ab = 35$ est source de confusion !
Autre notation : $3 \cdot 5$ pour désigner le produit de 3 et de 5.

Sur la notation des produits

Généralement le produit entre deux quantités se note en juxtaposant ces quantités.

Exemple

Par exemple ab veut dire « a fois b », et $3x$ veut dire « 3 fois x ».

Exemple

Si $a = 3$ et $b = 5$, écrire $ab = 35$ est source de confusion !
Autre notation : $3 \cdot 5$ pour désigner le produit de 3 et de 5.
Nous n'utilisons *pas* la notation 3×5,

Sur la notation des produits

Généralement le produit entre deux quantités se note en juxtaposant ces quantités.

Exemple

Par exemple ab veut dire « a fois b », et $3x$ veut dire « 3 fois x ».

Exemple

Si $a = 3$ et $b = 5$, écrire $ab = 35$ est source de confusion !
Autre notation : $3 \cdot 5$ pour désigner le produit de 3 et de 5.
Nous n'utilisons *pas* la notation 3×5, pour éviter de confondre le symbole $\times$ avec la variable x.

Puissances
Remarques générales

Nous avons déjà défini :

$$x^b = \underbrace{x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}_{b \text{ fois}}.$$

Puissances

Remarques générales

Nous avons déjà défini :

$$x^b = \underbrace{x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}_{b \text{ fois}}.$$

Cas particulier:$x^0 = 1$ (C'est une définition!).

Puissances

Remarques générales

Nous avons déjà défini :

$$x^b = \underbrace{x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}_{b \text{ fois}}.$$

Cas particulier:$x^0 = 1$ (C'est une définition!).

Résultat

Pour tous réels x,y et pour tous naturels a,b, nous avons

$$x^a y^a = (xy)^a \tag{2.2}$$

Puissances
Remarques générales

Nous avons déjà défini :

$$x^b = \underbrace{x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}_{b \text{ fois}}.$$

Cas particulier:$x^0 = 1$ (C'est une définition!).

Résultat

Pour tous réels x,y et pour tous naturels a,b, nous avons

$$x^a y^a = (xy)^a \qquad x^a x^b = x^{a+b} \tag{2.1}$$

$$\tag{2.2}$$

Puissances
Remarques générales

Nous avons déjà défini :

$$x^b = \underbrace{x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}_{b \text{ fois}}.$$

Cas particulier: $x^0 = 1$ (C′est une définition!).

Résultat

Pour tous réels x,y et pour tous naturels a,b, nous avons

$$x^a y^a = (xy)^a \qquad x^a x^b = x^{a+b} \tag{2.1}$$

$$(x^a)^b = x^{ab} \tag{2.2}$$

Puissances
Remarques générales

Nous avons déjà défini :

$$x^b = \underbrace{x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}_{b \text{ fois}}.$$

Cas particulier:$x^0 = 1$ (C'est une définition!).

Résultat

Pour tous réels x,y et pour tous naturels a,b, nous avons

$$x^a y^a = (xy)^a \qquad x^a x^b = x^{a+b} \tag{2.1}$$

$$(x^a)^b = x^{ab} \qquad \frac{x^a}{x^b} = x^{a-b} \tag{2.2}$$

Puissances

Remarques générales

Nous avons déjà défini :

$$x^b = \underbrace{x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}_{b \text{ fois}}.$$

Cas particulier: $x^0 = 1$ (C'est une définition!).

Résultat

Pour tous réels x,y et pour tous naturels a,b, nous avons

$$x^a y^a = (xy)^a \qquad x^a x^b = x^{a+b} \tag{2.1}$$

$$(x^a)^b = x^{ab} \qquad \frac{x^a}{x^b} = x^{a-b} \tag{2.2}$$

Puissances
Remarques générales

Nous avons déjà défini :

$$x^b = \underbrace{x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}_{b \text{ fois}}.$$

Cas particulier:$x^0 = 1$ (C'est une définition!).

Résultat

Pour tous réels x,y et pour tous naturels a,b, nous avons

$$x^a y^a = (xy)^a \qquad x^a x^b = x^{a+b} \tag{2.1}$$

$$(x^a)^b = x^{ab} \qquad \frac{x^a}{x^b} = x^{a-b} \tag{2.2}$$

Comme nous allons le voir dans un instant, les puissances servent en particulier à résoudre des problèmes de comptage.

Contenu de la section

Combinatoire

Questions de comptage

Question

Combien de séquences de 5 lettres peut-on réaliser avec les lettre A, C, G et T ?

Réponse

Combinatoire

Questions de comptage

Question

Combien de séquences de 5 lettres peut-on réaliser avec les lettre A, C, G et T ?

Réponse

$$4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$$

Combinatoire

Questions de comptage

Question

Combien de séquences de 5 lettres peut-on réaliser avec les lettre A, C, G et T ?

Réponse

$$4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^5 = 1024$$

Combinatoire
Questions de comptage

Question
Combien de séquences de 5 lettres peut-on réaliser avec les lettre A, C, G et T ?

Réponse
$$4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^5 = 1024$$

Question
Combien de séquences de 8 chiffres peut-on réaliser avec les chiffres 0 et 1 ?

Réponse

Combinatoire

Questions de comptage

Question

Combien de séquences de 5 lettres peut-on réaliser avec les lettre A, C, G et T ?

Réponse

$$4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^5 = 1024$$

Question

Combien de séquences de 8 chiffres peut-on réaliser avec les chiffres 0 et 1 ?

Réponse

$$2^8 = 256$$

Factorielle

Question

Combien de séquences de 4 lettres peut-on réaliser avec les lettres A, C, G et T en utilisant une seule fois chaque lettre ?

Réponse

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Factorielle

Question

Combien de séquences de 4 lettres peut-on réaliser avec les lettres A, C, G et T en utilisant une seule fois chaque lettre ?

Réponse

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Définition

La factorielle d'un entier naturel $n \geq 1$ est définie par :

Factorielle

Question

Combien de séquences de 4 lettres peut-on réaliser avec les lettres A, C, G et T en utilisant une seule fois chaque lettre ?

Réponse

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Définition

La factorielle d'un entier naturel $n \geq 1$ est définie par :

$$n! := n(n-1)(n-2)\cdots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Factorielle

Question

Combien de séquences de 4 lettres peut-on réaliser avec les lettres A, C, G et T en utilisant une seule fois chaque lettre ?

Réponse

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Définition

La factorielle d'un entier naturel $n \geq 1$ est définie par :

$$n! := n(n-1)(n-2) \cdots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Pour $n = 0$, on définit $0! = 1$.

Factorielle

Question

Combien de séquences de 4 lettres peut-on réaliser avec les lettres A, C, G et T en utilisant une seule fois chaque lettre ?

Réponse

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Définition

La factorielle d'un entier naturel $n \geq 1$ est définie par :

$$n! := n(n-1)(n-2)\cdots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Pour $n = 0$, on définit $0! = 1$.

Exemple

$0! = 1$

Factorielle

Question

Combien de séquences de 4 lettres peut-on réaliser avec les lettres A, C, G et T en utilisant une seule fois chaque lettre ?

Réponse

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Définition

La factorielle d'un entier naturel $n \geq 1$ est définie par :

$$n! := n(n-1)(n-2)\cdots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Pour $n = 0$, on définit $0! = 1$.

Exemple

$0! = 1 \quad 1! = 1$

Factorielle

Question

Combien de séquences de 4 lettres peut-on réaliser avec les lettres A, C, G et T en utilisant une seule fois chaque lettre ?

Réponse

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Définition

La factorielle d'un entier naturel $n \geq 1$ est définie par :

$$n! := n(n-1)(n-2)\cdots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Pour $n = 0$, on définit $0! = 1$.

Exemple

$0! = 1 \quad 1! = 1 \quad 2! = 1 \times 2 = 2$

Factorielle

Question

Combien de séquences de 4 lettres peut-on réaliser avec les lettres A, C, G et T en utilisant une seule fois chaque lettre ?

Réponse

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Définition

La factorielle d'un entier naturel $n \geq 1$ est définie par :

$$n! := n(n-1)(n-2) \cdots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Pour $n = 0$, on définit $0! = 1$.

Exemple

$0! = 1 \quad 1! = 1 \quad 2! = 1 \times 2 = 2 \quad 3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$

Factorielle

Question

Combien de séquences de 4 lettres peut-on réaliser avec les lettres A, C, G et T en utilisant une seule fois chaque lettre ?

Réponse

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Définition

La factorielle d'un entier naturel $n \geq 1$ est définie par :

$$n! := n(n-1)(n-2)\cdots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Pour $n = 0$, on définit $0! = 1$.

Exemple

$0! = 1 \quad 1! = 1 \quad 2! = 1 \times 2 = 2 \quad 3! = 1 \times 2 \times 3 = 6 \quad 4! = 24$

Factorielle

Question

Combien de séquences de 4 lettres peut-on réaliser avec les lettres A, C, G et T en utilisant une seule fois chaque lettre ?

Réponse

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Définition

La factorielle d'un entier naturel $n \geq 1$ est définie par :

$$n! := n(n-1)(n-2)\cdots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Pour $n = 0$, on définit $0! = 1$.

Exemple

$0! = 1 \quad 1! = 1 \quad 2! = 1 \times 2 = 2 \quad 3! = 1 \times 2 \times 3 = 6 \quad 4! = 24 \quad 5! = 120$

Factorielle

Question

Combien de séquences de 4 lettres peut-on réaliser avec les lettres A, C, G et T en utilisant une seule fois chaque lettre ?

Réponse

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Définition

La factorielle d'un entier naturel $n \geq 1$ est définie par :

$$n! := n(n-1)(n-2) \cdots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Pour $n = 0$, on définit $0! = 1$.

Exemple

$0! = 1 \quad 1! = 1 \quad 2! = 1 \times 2 = 2 \quad 3! = 1 \times 2 \times 3 = 6 \quad 4! = 24 \quad 5! = 120 \quad \cdots$

Résultat

Pour tout $n > 0$,

$$n! = n(n-1)!$$

Démonstration.

Résultat

Pour tout $n > 0$,

$$n! = n(n-1)!$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} n! &= n(n-1)(n-2)\cdots 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 \\ &= n[(n-1)(n-2)\cdots 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1] \\ &= n(n-1)! \end{aligned}$$

$\square$

Résultat

Pour tout $n > 0$,

$$n! = n(n-1)!$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} n! &= n(n-1)(n-2)\cdots 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 \\ &= n[(n-1)(n-2)\cdots 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1] \\ &= n(n-1)! \end{aligned}$$

□

C'est ce qu'on appelle une formule de récurrence: il suffit de connaître la valeur de $(n-1)!$ pour calculer $n!$.

Résultat

Pour tout $n > 0$,

$$n! = n(n-1)!$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} n! &= n(n-1)(n-2)\cdots 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 \\ &= n[(n-1)(n-2)\cdots 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1] \\ &= n(n-1)! \end{aligned}$$

$\square$

C'est ce qu'on appelle une formule de récurrence: il suffit de connaître la valeur de $(n-1)!$ pour calculer $n!$.

Nous allons maintenant apprendre des méthodes de comptage un peu plus élaborées.

Question

Combien de séquences de 2 lettres différentes peut-on former avec A, C, T, G ?

Réponse

$4 \times 3 = 12$.

Question

Combien de séquences de k lettres différentes peut-on former avec n lettres (différentes) données ?

Réponse

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1))$$

Question

Combien de séquences de 2 lettres différentes peut-on former avec A, C, T, G ?

Réponse

$4 \times 3 = 12.$

Question

Combien de séquences de k lettres différentes peut-on former avec n lettres (différentes) données ?

Réponse

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Supposons maintenant qu'on veuille seulement compter le nombre de « tas » de lettres distinctes, en se fichant de l'ordre.

Supposons maintenant qu'on veuille seulement compter le nombre de « tas » de lettres distinctes, en se fichant de l'ordre. (Par exemple GAT et TAG représentent le même « tas » de lettres).

Supposons maintenant qu'on veuille seulement compter le nombre de « tas » de lettres distinctes, en se fichant de l'ordre. (Par exemple GAT et TAG représentent le même « tas » de lettres).

Question

Combien de « tas » de k lettres différentes peut-on former avec n lettres (différentes) données ?

Supposons maintenant qu'on veuille seulement compter le nombre de « tas » de lettres distinctes, en se fichant de l'ordre. (Par exemple GAT et TAG représentent le même « tas » de lettres).

Question

Combien de « tas » de k lettres différentes peut-on former avec n lettres (différentes) données ?

Il faut pour cela diviser par le nombre de séquences de k lettres possibles, qui vaut $k!$:

Supposons maintenant qu'on veuille seulement compter le nombre de « tas » de lettres distinctes, en se fichant de l'ordre. (Par exemple GAT et TAG représentent le même « tas » de lettres).

Question

Combien de « tas » de k lettres différentes peut-on former avec n lettres (différentes) données ?

Il faut pour cela diviser par le nombre de séquences de k lettres possibles, qui vaut $k!$:

Réponse

$$\frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Les coefficients binomiaux

Définition

Pour $0 \leq k \leq n$, on définit le coefficient binomial :

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Les coefficients binomiaux

Définition

Pour $0 \leq k \leq n$, on définit le coefficient binomial :

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Calculer $\binom{n}{k}$, pour tous les k et n, permet donc de compter le nombre de « tas » (sans tenir compte de l'ordre) de k objects distincts – par exemple, des lettres – choisis parmi n objets distincts.

Les coefficients binomiaux

Définition

Pour $0 \leq k \leq n$, on définit le coefficient binomial :

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Calculer $\binom{n}{k}$, pour tous les k et n, permet donc de compter le nombre de « tas » (sans tenir compte de l'ordre) de k objects distincts – par exemple, des lettres – choisis parmi n objets distincts.

On va maintenant voir comment les calculer.

Propriétés des coefficients binomiaux

Résultat

Pour tout naturel n, pour tout naturel $k \geq 1$:

Propriétés des coefficients binomiaux

Résultat

Pour tout naturel n, pour tout naturel $k \geq 1$ *:*

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

Propriétés des coefficients binomiaux

Résultat

Pour tout naturel n, pour tout naturel $k \geq 1$:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

C'est donc encore une formule de récurrence.

Démonstration.

$$\frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-(k-1))!(k-1)!}$$

$\square$

Propriétés des coefficients binomiaux

Résultat

Pour tout naturel n, pour tout naturel $k \geq 1$:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

C'est donc encore une formule de récurrence.

Démonstration.

$$\begin{aligned}\frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-(k-1))!(k-1)!} \\ = \frac{n!(n-k+1)}{(n-k)!k!(n-k+1)} + \frac{n!k}{(n-k+1)!k(k-1)!}\end{aligned}$$

$\square$

Propriétés des coefficients binomiaux

Résultat

Pour tout naturel n, pour tout naturel $k \geq 1$:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

C'est donc encore une formule de récurrence.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-(k-1))!(k-1)!} &= \frac{n!(n-k+1)}{(n-k)!k!(n-k+1)} + \frac{n!k}{(n-k+1)!k(k-1)!} \\
&= \frac{n!(n-k+1)+n!k}{k!(n-k+1)!}
\end{aligned}$$

$\square$

Propriétés des coefficients binomiaux

Résultat

Pour tout naturel n, pour tout naturel $k \geq 1$:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

C'est donc encore une formule de récurrence.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-(k-1))!(k-1)!} &= \frac{n!(n-k+1)}{(n-k)!k!(n-k+1)} + \frac{n!k}{(n-k+1)!k(k-1)!} \\
&= \frac{n!(n-k+1)+n!k}{k!(n-k+1)!} \\
&= \frac{n!(n-k+1+k)}{(n+1-k)!k!} = \binom{n+1}{k}
\end{aligned}$$

$\square$

Triangle de Pascal

Triangle de Pascal

Ce calcul se représente graphiquement par le Triangle de Pascal:

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

Triangle de Pascal

Ce calcul se représente graphiquement par le Triangle de Pascal:

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}
$$

Symétrie des coefficients binomiaux

Remarquons qu'on peut poser deux questions similaires :

Symétrie des coefficients binomiaux

Remarquons qu'on peut poser deux questions similaires :

Question

De combien de façons peut-on choisir k objets distincts parmi n objets distincts, sans prendre en compte leur ordre?

Symétrie des coefficients binomiaux

Remarquons qu'on peut poser deux questions similaires :

Question

De combien de façons peut-on choisir k objets distincts parmi n objets distincts, sans prendre en compte leur ordre?

Question

De combien de façons peut-on choisir $n-k$ objets distincts parmi n objets distincts, sans prendre en compte leur ordre?

Symétrie des coefficients binomiaux

Remarquons qu'on peut poser deux questions similaires :

Question

De combien de façons peut-on choisir k objets distincts parmi n objets distincts, sans prendre en compte leur ordre?

Question

De combien de façons peut-on choisir $n-k$ objets distincts parmi n objets distincts, sans prendre en compte leur ordre?

Réponse

$$\binom{n}{k}$$

Symétrie des coefficients binomiaux

Remarquons qu'on peut poser deux questions similaires :

Question

De combien de façons peut-on choisir k objets distincts parmi n objets distincts, sans prendre en compte leur ordre?

Question

De combien de façons peut-on choisir $n-k$ objets distincts parmi n objets distincts, sans prendre en compte leur ordre?

Réponse

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

La preuve algébrique de ce résultat est très simple:

La preuve algébrique de ce résultat est très simple:

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{\big(n-(n-k)\big)!(n-k)!}$$

La preuve algébrique de ce résultat est très simple:

$$\begin{aligned}\binom{n}{n-k} &= \frac{n!}{\big(n-(n-k)\big)!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\end{aligned}$$

La preuve algébrique de ce résultat est très simple:

$$\begin{aligned}\binom{n}{n-k} &= \frac{n!}{\big(n-(n-k)\big)!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \binom{n}{k}.\end{aligned}$$