Quelques remarques administratives pour commencer:

- Les syllabus de cours et d'exercices sont disponibles sur l'UV ou sur la page web du cours de math F112:

  http://homepages.ulb.ac.be/ bpremose/

- Le syllabus d'exercices est très proche de celui de l'année passée, mais quelques exercices ont été ajoutés.
- Le syllabus du cours est sensiblement différent: certains chapitres ont été réécrits. Il serait judicieux de se procurer le nouveau. (Ou, à défaut, de travailler avec le nouveau fichier .pdf).

Retour sur les quantificateurs

On considère $P(x)$ une proposition qui dépend d'une variable x. Autrement dit: à chaque fois qu'on choisit un x, $P(x)$ est une affirmation logique qui est vraie ou fausse.

Exemple

Si $x \in \mathbb{N}$, on définit $P(x)$: « x est divisible par 7 ». $P(14)$ est vraie, $P(5)$ ne l'est pas.

La valeur (vrai ou faux) de $P(x)$ dépend donc de x.

On définit maintenant une nouvelle proposition Q:

Q: « pour tout x, P(x) est vraie ».

Cette Q est une nouvelle affirmation logique: en particulier elle est ou vraie ou fausse. Mais attention: elle ne dépend plus d'un paramètre!

Dire que Q est vraie revient exactement à dire que: pour toute valeur de x, $P(x)$ est vraie. Dans l'exemple ci-dessus, Q serait donc fausse.

Retour sur le raisonnement par récurrence

Soit, pour tout n entier naturel, $P(n)$ une affirmation logique. On cherche à montrer que:

« $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ » est vraie.

Par définition, ceci revient donc à montrer que, quelle que soit la valeur de $n \in \mathbb{N}$, l'affirmation logique $P(n)$ est elle-même vraie.

Une manière de montrer ça est de raisonner par récurrence (ou par induction):

- On commence par montrer que $P(0)$ est vraie.
- On montre ensuite que, quelle que soit la valeur de n, si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ l'est aussi.

Un autre exemple de récurrence

Nous allons montrer par récurrence que l'affirmation suivante est vraie:

$$\text{Q: « } \forall n \in \mathbb{N},\ 2^n \geq n+1. \text{ »}$$

On définit donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: « $2^n \geq n+1$ ».

- On commence par s'en convaincre: $2^0 = 1 \geq 1$ donc $P(0)$ est vraie. Ensuite: $2^1 = 2 \geq 2$ donc $P(1)$ l'est aussi, et $2^2 = 4 \geq 3$.
- **Initialisation:** on montre que $P(0)$ est vraie: $2^0 = 1 \geq 1$.
- **Étape de récurrence:** soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $P(n)$ est vraie. Ceci signifie que $2^n \geq n+1$. On calcule alors 2^{n+1}:
$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2 \cdot 2^n \\ &\geq 2n+2 \text{ (par l'hypothèse de récurrence)} \\ &\geq n+2 \end{aligned}$$
car $n \geq 0$. Ceci montre donc que $P(n+1)$ est vraie.

Contenu de la section

Hier nous avons vu:

- Des éléments de logique: « et », « ou », « si... alors »
- Le raisonnement par l'absurde (ou par contradiction)
- Le raisonnement par récurrence
- Les ensembles de nombres réels et les relations entre nombre

Aujourd'hui: nous allons continuer à étudier les relations entre nombres avec les intervalles. Puis nous apprendrons comment écrire et calculer des sommes et des produits en toute géneralité. Et nous allons apprendre à compter des éléments en faisant de la combinatoire!

Contenu de la section

Résultat

Soient a,b,c,d *des réels vérifiant* $a \leq b$ *et* $c \leq d$*. Alors*

$$a + c \leq b + d.$$

De plus, si $0 \leq a$ *et* $0 \leq c$*, alors*

$$ac \leq bd.$$

Démonstration.

Comme $a \leq b$, alors $a + c \leq b + c$ (résultat précédent). De même, comme $c \leq d$, nous avons $b + c \leq b + d$. Par transitivité, nous obtenons $a + c \leq b + d$ comme annoncé.
La preuve pour le produit (avec la condition supplémentaire) est laissée en exercice. $\square$

Exercice

Faire la preuve de la seconde partie du résultat précédent.

Exercice

Trouver des réels a,b,c,d tels que $a \leq b$, $c \leq d$ et $ac > bd$.

Contenu de la section

Définition

Un *intervalle* s'entend comme un ensemble de nombres réels « continu », ou « sans trou » (on parle aussi d'ensemble *connexe*).

Exemple

- On définit $[-2,\pi]$ comme l'ensemble des réels compris entre -2 et π, c'est un intervalle : il n'y a aucun trou entre ces deux nombres.
- L'ensemble des réels positifs (ou nuls), noté $\mathbb{R}^+$, est également un intervalle.
- L'ensemble des réels sauf 0, noté $\mathbb{R}_0$, n'est pas un intervalle car 0 manque : il y a un trou. C'est en revanche l'union disjointe de deux intervalles: les réels strictement à gauche de 0 et ceux strictement à droite.

On peut classer les intervalles comme suit.

Résultat

Si a et b sont des nombres réels avec $a < b$, on définit ces notations :

- $[a,b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (compris) ;*
- $]a,b]$ *désigne l'ensemble des réels de a (non-compris) à b (compris) ;*
- $[a,b[$ *désigne l'ensemble des réels de a (compris) à b (non-compris) ;*
- $]a,b[$ *désigne l'ensemble des réels de a (non-compris) à b (non-compris) ;*
- $]-\infty,b[$ *désigne l'ensemble des réels strictement inférieurs à b ;*
- $]-\infty,b]$ *désigne l'ensemble des réels inférieurs ou égaux à b ;*
- $]a,\infty[$ *désigne l'ensemble des réels strictement supérieurs à a ;*
- $[a,\infty[$ *désigne l'ensemble des réels supérieurs ou égaux à a ;*
- $]-\infty,\infty[$ *désigne l'ensemble des réels, également noté $\mathbb{R}$.*

Exemple

L'ensemble des réels positifs (ou nuls) $\mathbb{R}^+$ est également noté $[0,+\infty[$.
L'ensemble des réels *strictement positifs* est $]0,+\infty[$.

Un intervalle est généralement « infini » car il contient une infinité de nombre, mais parfois il est néanmoins « borné »

Exemple

- L'intervalle $[0,1]$ contient une infinité de nombres, puisqu'il contient notamment 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, etc. Mais il est borné, car aucun des nombres n'est inférieur à 0 ou supérieur à 1 (c'est la définition de cet intervalle !).
- L'intervalle $[4,4]$ contient un seul nombre : le nombre 4.
- L'intervalle $]4,4[$ ne contient aucun nombre! Car aucun nombre n'est à la fois strictement supérieur et strictement inférieur à 4.

Contenu de la section

Manipulation et opérations sur les nombres

Contenu de la section

Considérons les calculs suivants :

$$1+2=3, \quad 1+2+3=6, \quad 1+2+3+4=10, \quad \dots$$

Comment exprimer un calcul pour sommer les cent nombres de 1 jusqu'à 100 ? Où jusqu'à une valeur n quelconque ? Une solution classique est d'inventer une notation !

Nous définissons un *symbole de sommation* comme suit :

Définition

Si m et n sont des entiers, $m \leq n$, et si $a_m, a_{m+1}, \dots, a_n$ sont des nombres, on définit :

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

Exemple

Il s'agit juste de donner une autre manière d'écrire les sommes :

$$\sum_{k=1}^{100} k = 1+2+3+\ldots+100$$

$$\sum_{k=1}^{100} k^2 = 1+4+9+\ldots+10000$$

$$\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k} = \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{100}$$

$$\sum_{k=1}^{100} 3 = 3+3+3+\cdots+3 (= 3\times 100 = 300)$$

$$\sum_{k=5}^{10} (k-1) = 4+5+6+7+8+9$$

Exemple

$$\sum_{k=5}^{5}(k-1) = 4$$

$$\frac{1}{100}\sum_{k=1}^{100} k = \frac{1+2+3+\ldots+100}{100}$$

$$\sum_{k=1}^{100}\frac{k}{100} = \frac{1}{100}+\frac{2}{100}+\frac{3}{100}+\ldots+\frac{100}{100}$$

$$\begin{aligned}(n+1)+\sum_{k=1}^{n} k &= (n+1)+(1+2+3+\cdots+n) \\ &= 1+2+3+\cdots+n+(n+1) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} k.\end{aligned}$$

Résultat

Le symbole somme vérifie les relations suivantes :

$$\sum_{k=m}^{n}(a_k + b_k) = \left(\sum_{k=m}^{n} a_k\right) + \left(\sum_{k=m}^{n} b_k\right)$$

$$\sum_{k=m}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=m}^{n} a_k$$

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n} a_{n+m-k}$$

Le dernier résultat dit juste que si on somme des éléments dans un sens ou dans l'autre, le résultat ne change pas:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + +a_2 + a_1.$$

Démonstration.

Preuve de $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n} a_{n+m-k}$ (la dernière égalité)
Le membre de gauche est :

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$$

et le membre de droite est

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n} a_{n+m-k} &= a_{n+m-(m)} + a_{n+m-(m+1)} + a_{n+m-(m+2)} + \dots \\ &\qquad \dots + a_{n+m-(n-1)} + a_{n+m-(n)} \\ &= a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_{m+1} + a_m\end{aligned}$$

Les deux sont donc égaux (l'un est simplement sommé dans un sens, l'autre l'est dans l'autre sens). □

Rappel

Nous avons défini le signe somme :

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

Exemple

Nous avions déjà prouvé par récurrence, mais avec d'autres notations :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

On va maintenant en voir une preuve simple en réécrivant la somme à l'envers.

Calcul de la somme des entiers de 1 à n.

On veut calculer $S = \sum_{k=1}^{n} k$. On écrit la somme dans les deux sens:

$$S = 1 + 2 + \cdots + n$$

$$S = n + \cdots + 2 + 1.$$

(Ces deux sommes sont les mêmes.) On somme alors ligne à ligne: la somme des termes qui sont l'un en face de l'autre vaut toujours $n+1$, et elle est répétée n fois:

$$2S = n(n+1).$$

Ce qui donne donc:

$$S = \frac{n(n+1)}{2}.$$

C'est (selon la légende) la preuve que Gauss donna... à 7 ans!

Contenu de la section

Moyenne

Définition

La moyenne arithmétique de n nombres $x_1,\ldots,x_n$ est la quantité

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n}$$

La moyenne arithmétique donne une idée de la valeur « moyenne » des valeurs d'une mesure.

Exemple

Si cinq étudiant-e-s ont suivi le cours de mathématiques, et ont eut des notes e_1,e_2,e_3,e_4,e_5, alors on dira que la moyenne des notes pour ce cours est

$$\frac{e_1+e_2+e_3+e_4+e_5}{5}.$$

Résultat

La moyenne arithmétique d'une séquence de nombres est toujours:

- *plus petite que le plus grand de ces nombres*
- *et plus grande que le plus petit de ces nombres.*

Démonstration.

Considérons la moyenne $\bar{x}$ de n nombres $x_1,\ldots,x_n$. Le plus petit des ces nombres a un certain indice, disons j. De même, le plus grand a un certain indice disons J. C'est-à-dire qu'on a

$$x_j \leq x_k \leq x_J \text{ pour tout } k \text{ entre } 1 \text{ et } n.$$

Dès lors :

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq x_J + x_J + \cdots + x_J = nx_J$$

dont on tire

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n} \leq x_J.$$

Pour cette dernière étape, on a juste sommé des inégalités.

La preuve est la même pour le plus petit nombre x_j. □

Contenu de la section

Un pourcentage est une façon commode de quantifier le rapport entre deux quantités.

Exemple

Si on affirme « 50% des humains sont des femmes. », ceci signifie que dans la population, la moitié sont des femmes : $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$.

Le « pourcent » décrit une proportion « pour cent unités ». En d'autres termes, on décrit un nombre qui doit être divisé par cent.

Exemple

« Le taux de réussite des étudiant-e-s de bachelier de l'année passée était d'un tiers. » En d'autres termes, un-e étudiant-e sur trois avait réussi. Ceci est approximativement 33% car

$$\frac{1}{3} = \frac{\frac{1}{3}100}{100} = \frac{33.3\ldots3\ldots}{100} = 33.3\ldots3\ldots\%$$

- Le pourcentage est une information globale, et non individuelle.

Exemple

Un taux de 33% ne veut pas dire qu'en prenant trois étudiant-e-s au hasard, un-e seul-e réussira.

- Le pourcentage n'est pas de la voyance.

Exemple

Le taux de réussite peut très bien être différent cette année ! Il dépend de vous !

Contenu de la section

Sur la notation des produits

Généralement le produit entre deux quantités se note en juxtaposant ces quantités.

Exemple

Par exemple ab veut dire « a fois b », et $3x$ veut dire « 3 fois x ».

Exemple

Si $a = 3$ et $b = 5$, écrire $ab = 35$ est source de confusion !
Autre notation : $3 \cdot 5$ pour désigner le produit de 3 et de 5.
Nous n'utilisons *pas* la notation 3×5, pour éviter de confondre le symbole $\times$ avec la variable x.

Puissances

Remarques générales

Nous avons déjà défini :

$$x^b = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{b \text{ fois}}.$$

Cas particulier: $x^0 = 1$ (C'est une définition!).

Résultat

Pour tous réels x,y et pour tous naturels a,b, nous avons

$$x^a y^a = (xy)^a \qquad x^a x^b = x^{a+b} \tag{2.1}$$

$$(x^a)^b = x^{ab} \qquad \frac{x^a}{x^b} = x^{a-b} \tag{2.2}$$

Comme nous allons le voir dans un instant, les puissances servent en particulier à résoudre des problèmes de comptage.

Contenu de la section

Combinatoire

Questions de comptage

Question

Combien de séquences de 5 lettres peut-on réaliser avec les lettre A, C, G et T ?

Réponse

$$4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^5 = 1024$$

Question

Combien de séquences de 8 chiffres peut-on réaliser avec les chiffres 0 et 1 ?

Réponse

$$2^8 = 256$$

Factorielle

Question

Combien de séquences de 4 lettres peut-on réaliser avec les lettres A, C, G et T en utilisant une seule fois chaque lettre ?

Réponse

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Définition

La factorielle d'un entier naturel $n \geq 1$ est définie par :

$$n! := n(n-1)(n-2)\cdots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Pour $n = 0$, on définit $0! = 1$.

Exemple

$$0! = 1 \quad 1! = 1 \quad 2! = 1 \times 2 = 2 \quad 3! = 1 \times 2 \times 3 = 6 \quad 4! = 24 \quad 5! = 120 \quad \cdots$$

Résultat

Pour tout $n > 0$,

$$n! = n(n-1)!$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} n! &= n(n-1)(n-2)\cdots 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 \\ &= n[(n-1)(n-2)\cdots 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1] \\ &= n(n-1)! \end{aligned}$$

$\square$

C'est ce qu'on appelle une formule de récurrence: il suffit de connaître la valeur de $(n-1)!$ pour calculer $n!$.

Nous allons maintenant apprendre des méthodes de comptage un peu plus élaborées.

Question

Combien de séquences de 2 lettres différentes peut-on former avec A, C, T, G ?

Réponse

$4 \times 3 = 12.$

Question

Combien de séquences de k lettres différentes peut-on former avec n lettres (différentes) données ?

Réponse

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Supposons maintenant qu'on veuille seulement compter le nombre de « tas » de lettres distinctes, en se fichant de l'ordre. (Par exemple GAT et TAG représentent le même « tas » de lettres).

Question

Combien de « tas » de k lettres différentes peut-on former avec n lettres (différentes) données ?

Il faut pour cela diviser par le nombre de séquences de k lettres possibles, qui vaut $k!$:

Réponse

$$\frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Les coefficients binomiaux

Définition

Pour $0 \leq k \leq n$, on définit le coefficient binomial :

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Calculer $\binom{n}{k}$, pour tous les k et n, permet donc de compter le nombre de « tas » (sans tenir compte de l'ordre) de k objects distincts – par exemple, des lettres – choisis parmi n objets distincts.

On va maintenant voir comment les calculer.

Propriétés des coefficients binomiaux

Résultat

Pour tout naturel n, pour tout naturel $k \geq 1$:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

C'est donc encore une formule de récurrence.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-(k-1))!(k-1)!} &= \frac{n!(n-k+1)}{(n-k)!k!(n-k+1)} + \frac{n!k}{(n-k+1)!k(k-1)!} \\
&= \frac{n!(n-k+1)+n!k}{k!(n-k+1)!} \\
&= \frac{n!(n-k+1+k)}{(n+1-k)!k!} = \binom{n+1}{k}
\end{aligned}$$

$\square$

Triangle de Pascal

Ce calcul se représente graphiquement par le Triangle de Pascal:

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

							1							
						1		1						
					1		2		1					
				1		3		3		1				
			1		4		6		4		1			
		1		5		10		10		5		1		
	1		6		15		20		15		6		1	
1		7		21		35		35		21		7		1

Symétrie des coefficients binomiaux

Remarquons qu'on peut poser deux questions similaires :

Question

De combien de façons peut-on choisir k objets distincts parmi n objets distincts, sans prendre en compte leur ordre?

Question

De combien de façons peut-on choisir $n-k$ objets distincts parmi n objets distincts, sans prendre en compte leur ordre?

Réponse

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

La preuve algébrique de ce résultat est très simple:

$$\begin{aligned}\binom{n}{n-k} &= \frac{n!}{\big(n-(n-k)\big)!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \binom{n}{k}.\end{aligned}$$