Répartition des groupes de TP

Remarque

Vous n'êtes *pas* répartis de la même manière que pour vos autres cours. Vous êtes répartis selon la première lettre de votre nom de famille.

GEOL1 Un seul groupe - voir GeHol – **Hussein Cheikh-Ali**

GEOG1 Un seul groupe - voir GeHol – **Christine Cutting**

BIOL1 et SCIE1

- A à K: Mardi 16h-18h (local P.A2.222) et Jeudi 10h-12h (local S.K.3.401) – **Julien Rémy**
- K à Z: Mardi 16h-18h (local P.OF.2072) et Jeudi **10h30/12h30** (local P.2.N-0.7.08) – **Selim Rexhep.**

INFO1

- A à DEL: Lundi 16h-18h (P.2.N-0.7.08) et Vendredi 14h-16h (P.OF.2070 jusqu'à la semaine 6, puis P.0F.2064) – **Hussein Cheikh-Ali**
- DEM à I: Lundi 16h-18h (P.A2.220) et Vendredi 14h-16h (P.1C3.203) – **Robson do Nascimento**
- J à PIR: Lundi 16h-18h (P.FORUM.H) et Vendredi 10h30-12h30 (P.2.N-O.6.07) – **Thibaut Grouy**
- POI à Z: Lundi 16h-18h (P.2.N-0.6.07) et Vendredi 10h30-12h30 (P.A2.122) – **Antoine Bricmont**

CHIM1

- A à H
  - Lundi 14h-16h (P.OF.2072, Semaines 3 à 6), Vendredi 16h-18h (P.OF.2076, Semaine 8 à 14) et toujours Mardi 10h-12h (S.UB4.132) – **Hussein Cheickh-Ali**
- I à Z
  - Lundi 14h-16h (P.A2.220, Semaines 3 à 6), Vendredi 16h-18h (P.OF.2066, Semaine 8 à 14) et toujours Mardi 10h-12h (S.P4.1.10) – **Jessica Mulfas**

IRBI1

- A à DE – Mercredi 8h-10h (P.2.N-0.5.06) et Jeudi 16h-18h (P.2.N-O.7.08) – **Hussein Cheikh-Ali**
- DO à L – Mercredi 8h-10h (S.C4.219) et Vendredi 16h-18h (P.A2.222) – **Julie Distexhe**
- M à Z – Mercredi 8h-10h (S.H3244) et Vendredi 16h-18h (P.2.N-0.7.07) - **Robson do Nascimento**

Toutes ces infos sont sur la page du cours homepages.ulb.ac.be/ bpremose.

Combinatoire: rappels de la séance précédente

Supposons que nous ayons n objets distincts.

- Faire des mots de longueur k avec répétition possible : n^k possibilités.
- Ré-ordonner ces n objets : $n!$ possibilités. C'est équivalent à faire des mots de longueur n avec ces n objets.
- Choisir k objets parmi ces n objets :
  - Si l'ordre compte : $n(n-1)\cdots(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$ possibilités. C'est équivalent à faire des mots de longueur k avec ces n objets.
  - Si l'ordre ne compte pas : $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$ possibilités. C'est équivalent à compter le nombre de « tas » possibles avec k objets parmis ces n.

Le coefficient $\binom{n}{k}$ se prononce « k parmi n » ou « n choose k ».

Symétrie des coefficients binomiaux

Remarquons qu'on peut poser deux questions similaires :

Question

De combien de façons peut-on choisir k objets distincts parmi n objets distincts, sans prendre en compte leur ordre?

Question

De combien de façons peut-on choisir $n-k$ objets distincts parmi n objets distincts, sans prendre en compte leur ordre?

Réponse

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

La preuve par le calcul

La preuve algébrique de ce résultat est très simple:

$$\begin{aligned}\binom{n}{n-k} &= \frac{n!}{\big(n-(n-k)\big)!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \binom{n}{k}.\end{aligned}$$

Formule du binôme de Newton

Les coefficients binomiaux interviennent naturellement quand on veut développer des puissances. On calcule:

Exemple

$$\begin{aligned}
(x+y)^2 &= (x+y)(x+y) = xx+xy+yx+yy = x^2+2xy+y^2 \\
(x+y)^3 &= (x+y)(x+y)(x+y) \\
&= x(xx+xy+yx+yy)+y(xx+xy+yx+yy) \\
&= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3
\end{aligned}$$

Les coefficients (1,2,1) et (1,3,3,1) correspondent aux lignes $n=2$ et $n=3$ du triangle de Pascal. (Donc respectivement la 3ème et 4ème ligne).

Triangle de Pascal (Rappel)

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

							1							
						1		1						
					1		2		1					
				1		3		3		1				
			1		4		6		4		1			
		1		5		10		10		5		1		
	1		6		15		20		15		6		1	
1		7		21		35		35		21		7		1

Formule du binôme de Newton

Les coefficients binomiaux apparaissent dans la formule du binôme:

Résultat (Formule du binôme de Newton)

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Démonstration.

Par récurrence. Nous ne la ferons pas ici, voir le syllabus. $\square$

Illustration avec le triangle de Pascal:

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

La première ligne correspond à $n = 0$. Pour calculer $(x+y)^5$ on lit les coefficients sur la 6-ème ligne du tableau:

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5.$$

Contenu de la section

Contenu de la section

La valeur absolue de x, notée $|x|$, est définie par :

$$|x| := \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exemple

- $|5| = 5$ car 5 est positif, donc on est dans le premier cas.
- $|-5| = -(-5) = 5$ car -5 est négatif, donc on est dans le second cas.
- 0 n'est pas spécial : $|0| = 0$ (premier cas).

Remarque

Si x,y sont des réels, alors $|x-y|$ s'interpète comme la distance entre x et y.

Résultat

Pour tous x,y, nous avons

$$|x| = |-x| \qquad\qquad |x-y| = |y-x|$$

Démonstration.

Pour la première égalité, on distingue trois cas :

- Si $x = 0$ est nul, alors $-x = 0$,
- Si $x > 0$, alors $-x < 0$ donc $x = -(-x)$,
- Si $x < 0$, alors $-x > 0$ donc $-x = -x$.

Pour la seconde égalité, notons simplement que $x - y = -(y - x)$. $\square$

Contenu de la section

Soit x un nombre réel. Considérons x^2. Quelques valeurs :

x	x^2
0	0
0.10	0.01
0.50	0.25
0.90	0.81
0.99	0.9801
1	1
1.1	1.21
1.5	2.25
2	4
10	100

Définition

Si t est un réel positif ou nul, sa *racine carrée*,notée $\sqrt{t}$, est l'unique réel positif ou nul dont le carré vaut t.

Remarque

Si t est strictement positif, alors il existe exactement *deux* nombres dont le carré vaut t : $\sqrt{t}$ et $-\sqrt{t}$.
Le premier est positif, le second est négatif. Mais par définition une racine carrée est toujours strictement positive.

On peut sans problème étendre ces raisonnements à x^3, x^4, etc.

Définition

Si t est un réel positif ou nul, sa *racine* n^e, notée $\sqrt[n]{t}$, est l'unique réel positif ou nul dont la puissance n^{e} vaut t.

Puissances et racines

Exemple

La notation $x^{1/3}$ a-t-elle du sens ? Non ! Mais supposons que les règles précédentes restent valables, alors

$$(x^{1/3})^3 = x^{3/3} = x^1 = x$$

Dès lors, $x^{1/3}$ doit être la racine cubique de x !

$$x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$$

Définition

Si p et q sont naturels, on définit $x^{p/q} := (\sqrt[q]{x})^p$.

Remarque

- Cela coïncide avec la définition usuelle dès que p/q est un naturel.
- On peut définir x^r pour tout réel r dès que $x > 0$.

Résultat

Pour tous réels strictement positifs x,y, et pour tous réels a,b, nous avons

$$x^a > 0 \tag{1.3}$$

$$x^a y^a = (xy)^a \qquad x^a x^b = x^{a+b} \tag{1.4}$$

$$(x^a)^b = x^{ab} \qquad \frac{x^a}{x^b} = x^{a-b} \tag{1.5}$$

Contenu de la section

Définition

Une *fonction f* c'est :

- un *ensemble de départ A*,
- un *ensemble d'arrivée B* et
- une règle qui associe à chaque élément x de A un unique élément de B, noté $f(x)$.

- $f(x)$ est l'*image* de x par f.
- On dit aussi que x est un *antécédent* de $f(x)$.

La notation pour une fonction f de A dans B est

$$f : \begin{cases} A \to B \\ x \mapsto f(x) \end{cases} \text{ ou encore } f : A \to B, \quad x \mapsto f(x).$$

Exemple

Voici quelques exemples de fonctions :

- Une fonction associant à chaque réel son carré
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2;$$
- la fonction valeur absolue
$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|;$$
- La fonction racine carrée:
$$h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto \sqrt{x};$$
- la fonction *plancher*
$$i : \mathbb{R} \to \mathbb{Z} : x \mapsto \lfloor x \rfloor$$
où $\lfloor x \rfloor$ est défini comme le plus grand entier k tel que $k \leqslant x$;

Exemple

- la *fonction caractéristique* de l'ensemble $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
$$j : \mathbb{R} \to \{0,1\} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Autres exemples de fonction

Une fonction est en général juste une loi de correspondance:

Exemple

Si t désigne le nombre de secondes depuis un instant 0 fixé arbitrairement (par exemple: **maintenant**), nous pouvons noter $f(t)$

- le nombre de lapins sur le campus Plaine, ou
- le nombre de bactéries dans environnement donné, ou
- toute quantité dont les variations au fil du temps nous intéressent...

Une fonction peut concerner autre chose que des nombres.

Exemple

Soit A l'ensemble des étudiant-e-s à l'ULB. On associe, à chaque étudiant-e, son numéro de matricule. Chaque étudiant-e à l'ULB possède un unique tel numéro matricule, cela définit donc une fonction de A dans $\mathbb{N}$.

Exemple

La notation

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$$

ne définit *pas* une fonction au sens précédent, car l'image de 0 n'a pas été définie. Par contre,

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

définit correctement une fonction. (Tous les points de l'ensemble de départ doivent avoir une image; ou alors il faut changer l'ensemble de départ!) Pareil si on remplace 0 par -1, 50, etc...

Exemple

Par exemple:

$$h : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$$

définit maintenant bien une fonction au sens précédent. Avec pour ensemble de départ $A = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ et pour ensemble d'arrivée $B = \mathbb{R}$.

Ceci car tout point de l'ensemble A a une image bien définie.

Exemple

Est-ce que

$$g : [-1, +\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}$$

définit correctement une fonction? **Non**, car la racine carrée d'un nombre négatif n'est pas bien définie!

Contenu de la section

Exercice

Comment choisir le domaine $A \subset \mathbb{R}$ pour que

$$f : A \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x^2 - 1}$$

définisse une fonction ?

Réponse

N'importe quel A ne contenant ni 1 ni -1 convient. Généralement, nous prenons « le plus grand possible », c'est-à-dire $A = \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$.

Remarque

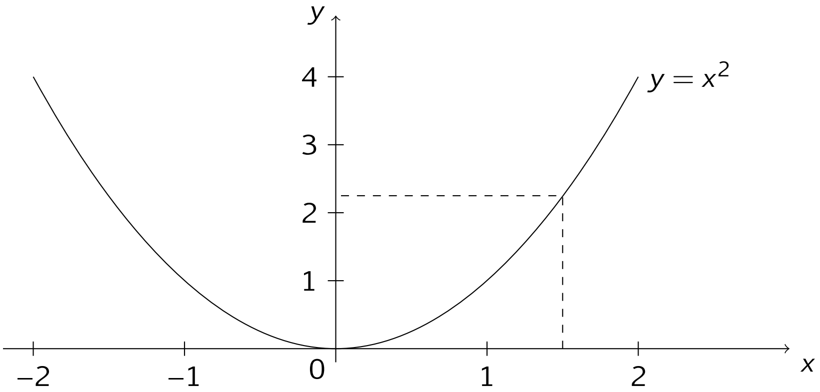
La règle qui donne $f(x)$ sera souvent une simple formule contenant la variable x (également appelée *expression algébrique*). Mais parfois la recette est plus complexe, et parfois il n'y a aucune formule.

Graphe de fonction

Définition

Le graphe d'une fonction $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est l'ensemble des points du plan de la forme $(x,f(x))$.

Par définition, il s'agit donc des solutions de l'équation $y = f(x)$.



Définition

Une fonction $f : A \to B$, avec $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$ est :

- *paire* si et seulement si pour tout x de A, on a $-x \in A$ et $f(x) = f(-x)$.
- *impaire* si et seulement si pour tout x de A, on a $-x \in A$ et $f(-x) = -f(x)$.

Attention, la définition de paire et impaire demande que le domaine A soit symétrique par rapport à 0. (c'est ce que signifie $-x \in A$).

Remarque

Une fonction est paire $\iff$ son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
Une fonction est impaire $\iff$ son graphe est symétrique par rapport à l'origine (0,0).

Exemples

- La fonction f définie par $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + 1$ est paire.

Démonstration.

En effet: $f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x)$. □

- La fonction définie par $f : \mathbb{R} \backslash \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$ est impaire.

Démonstration.

En effet: $f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$. □

- La fonction définie par $f : [-2, +\infty[\backslash \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$ est rien du tout! Car $[-2,\infty[$ n'est pas symétrique par rapport à 0.
- La fonction définie par $f : \mathbb{R} \backslash \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x^2+1} - 3x$ est rien du tout!.

La plupart des fonctions ne sont ni paires ni impaires!

Propriétés des fonctions

Soit $f : A \to B$ une fonction.

- f est dite *surjective* si tout élément de B est l'image d'au moins un élément de A ;
- f est dite *injective* si deux éléments distincts de A ont des images distinctes ;
- f est dite *bijective* si f est à la fois injective et surjective.

Remarque

Une fonction est injective si et seulement si toute droite horizontale coupe son graphe en *maximum* un point !

Exemples

- La fonction f définie par $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ n'est pas surjective. Car les réels négatifs ne sont jamais de la forme x^2.
- En revanche, la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto x^2$ est surjective. Car tout nombre positif admet une racine carrée!
- La fonction définie par $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto x^2$ n'est pas injective. Car 1 et -1 (plus géneralement x et $-x$) ont la même image.
- La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 3x$ est injective et surjective. Elle est donc bijective.
- La fonction f définie par $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ n'est donc ni surjective ni injective.

  Ici encore: les fonctions que vous rencontrerez ne seront pas forcément surjectives, injectives ou bijectives!

Ensemble image

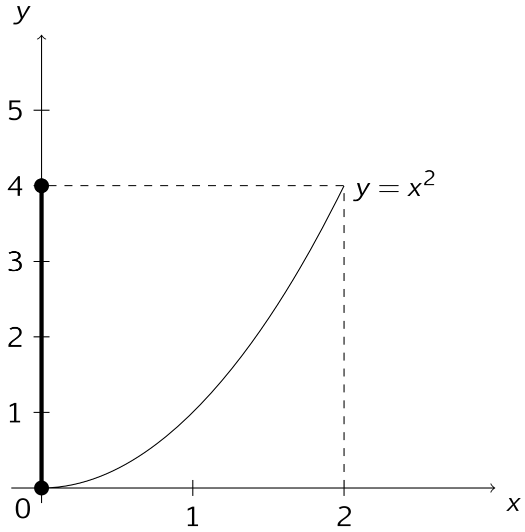
Soit $f : A \to B$ une fonction. L'ensemble image de f, noté $\operatorname{Im} f$ ou $f(A)$, est l'ensemble des valeurs prises par la fonction. C'est

$$\operatorname{Im} f = \{f(x) \text{ t.q. } x \in A\}.$$

L'ensemble image de la fonction...

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ est $\mathbb{R}^+$
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$ est $\mathbb{R}$
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 + 1$ est $[1, +\infty[$.
- $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est $]0, +\infty[$.

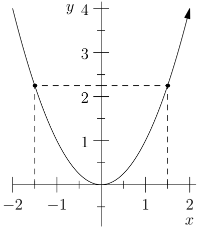
Le graphe de $[0,2] \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ et son ensemble image



Injectivité, surjectivité et graphe

Remarque

- On peut « voir » les antécédents d'un nombre y sur le graphe de f en traçant une droite horizontale à hauteur y : les antécédents sont les abcisses des points d'intersection.



- Une fonction est injective si et seulement si tout élément dans son ensemble d'arrivée admet au maximum un antécédent.
- Une fonction est surjective si et seulement si tout élément dans son ensemble d'arrivée admet au moins un antécédent.

Contenu de la section

Fonctions polynomiales

Définition

Les *fonctions polynômiales* sont des fonctions de la forme

$$x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

où $a_0, \ldots, a_n$ sont des constantes réelles, et n est un entier.
L'entier n est le *degré* de la fonction (si $a_n \neq 0$).

Fonctions racines

Exemple

Les fonctions *racine carrée* et *racine cubique* sont :

$$\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto \sqrt{x} \quad \text{et} \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt[3]{x}$$

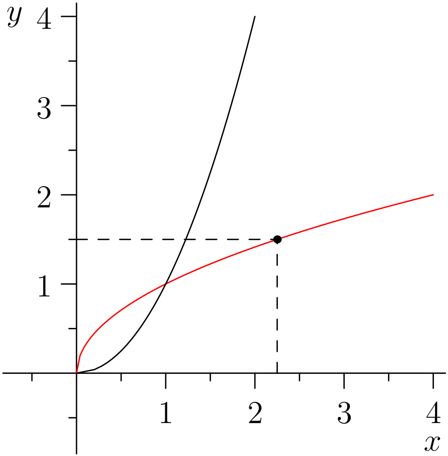
Définition

Plus généralement, pour n naturel pair, nous avons une fonction racine n^{e} :

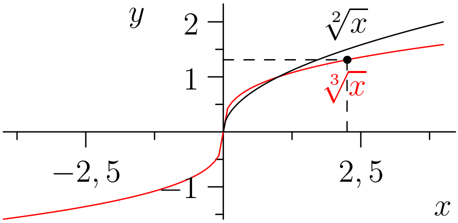
$$\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto \sqrt[n]{x}$$

et pour n naturel impair, similairement avec un autre domaine :

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt[n]{x}.$$



La fonction racine carrée est en rouge. En noir, c'est la fonction $x \mapsto x^2$.



La fonction racine carrée est en noir. En rouge c'est la fonction racine cubique.

Les fonctions racines n-èmes avec n impair sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier, alors que pour n pair elles sont seulement définies sur $\mathbb{R}^+$.

Exemple

La raison est que si $x < 0$, alors x^3 est encore négatif. On peut donc tout à fait prendre la racine cubique (ou cinquième, etc...) d'un nombre négatif, qui sera... négative.

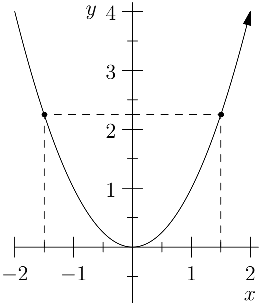
Croissance et décroissance

Définition

Soit f une fonction réelle et $A \subset \operatorname{dom} f$. Cette fonction est

- *croissante* sur A si pour tout x,y dans A : $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$;
- *décroissante* sur A si pour tout x,y dans A : $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$;
- *strictement croissante* sur A si pour tout x,y dans A : $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$;
- *strictement décroissante* sur A si pour tout x,y dans A : $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.

$x \mapsto x^2$ est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$:



Sur $\mathbb{R}$, elle n'est ni croissante ni décroissante ; on dit qu'elle n'est pas monotone.

Contenu de la section

Exponentielles

Définition

Les fonction exponentielles sont les fonctions du type

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto a^x$$

pour un certain réel positif $a > 0$, appelé la *base* de l'exponentielle.

Définition

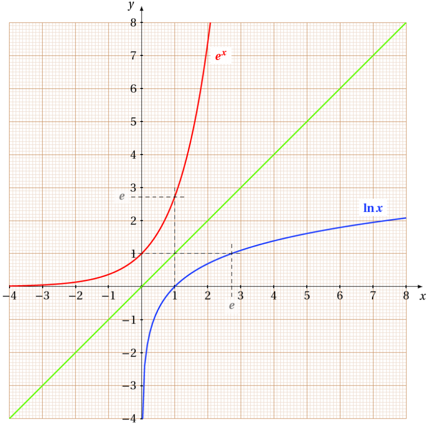
La fonction exponentielle, c'est la fonction exponentielle dont la base est $a = \mathrm{e}$, où $\mathrm{e} \simeq 2.7182818\ldots$ est une constante appelée… « le nombre e. »

Remarque

- Domaine = $\mathbb{R}$ Image = $\mathbb{R}_0^+ =]0,\infty]$.
- Si $a > 1$, l'exponentielle est croissante !
- Si $0 < a < 1$, l'exponentielle est décroissante !

Graphe

La ligne rouge est la ligne intéressante pour l'instant :



Logarithme

Question

Quel est le nombre x tel que $100000000 = 10^x$?

Définition

Le logarithme de y en base a est le nombre x tel que $a^x = y$! On le note $\log_a(y)$.

$$\log_a(y) = x \iff a^x = y$$

Remarque

En d'autres termes, le logarithme de y en base a est l'antécédent de y pour la fonction $x \mapsto a^x$

Graphe

Revenons aux graphes :