

Répartition des groupes de TP (à jour, cette fois-ci)

Remarque

Les groupes de Math F112 ont été harmonisés avec vos groupes usuels, et tout a été mis à jour sur GeHol.

GEOL1 Un seul groupe - voir GeHol – **Hussein Cheikh-Ali**

GEOG1 Un seul groupe - voir GeHol – **Christine Cutting**

BIOL1 et SCIE1 TROIS GROUPES:

- ▶ Groupe 1 – Groupe 2: Mardi 16h-18h (local P.2.N-0.5.06) et Jeudi 10h-12h (local S.K.3.401) – **Julien Rémy**
- ▶ Groupe 3: Mardi 16h-18h (P.A2.222) et Jeudi 14h-16h (P.A2.120) – **Robson do Nascimento**
- ▶ Groupe 4 et SCIE: Mardi 16h-18h (P.OF.2072) et Jeudi 10h30-12h30 (P.2.N-0.7.08) – **Selim Rexhep.**

- INFO1**
- ▶ Groupe 1 – Groupe 2: Lundi 16h-18h (P.2.N-0.6.07) et Vendredi 10h30-12h30 (P.A2.122) – **Julie Distexhe**
 - ▶ Groupe 3 – Groupe 4: Lundi 16h-18h (P.FORUM.H) et Vendredi 10h30-12h30 (P.2.N-O.6.07) – **Thibaut Grouy**
 - ▶ Groupe 5: Lundi 16h-18h (P.2.N-0.7.08) et Vendredi 14h-16h (P.OF.2070 **uniquement les semaines 3 et 6**, sinon P.OF.2064) – **Hussein Cheikh-Ali**
 - ▶ Groupe 6: Lundi 16h-18h (P.A2.220) et Vendredi 14h-16h (P.1C3.203) – **Robson do Nascimento**

- CHIM1**
- ▶ Groupe 1:
 - ▶ Lundi 14h-16h (P.OF.2072, Semaines 3 à 6), Vendredi 16h-18h (P.OF.2076, Semaine 8 à 14) et toujours Mardi 10h-12h (S.UB4.132) – **Hussein Cheickh-Ali**
 - ▶ Groupe 2 – Groupe 3:
 - ▶ Lundi 14h-16h (P.A2.220, Semaines 3 à 6), Vendredi 16h-18h (P.OF.2066, Semaine 8 à 14) et toujours Mardi 10h-12h (S.P4.1.10) – **Jessica Mulfas**

- IRBI1
- ▶ Groupe 1 – Groupe 2: Mercredi 8h-10h (S.C4.219) et Vendredi 16h-18h (P.2.N-O.7.07) – **Antoine Bricmont**
 - ▶ Groupe 3 – Groupe 4: Mercredi 8h-10h (S.H3244) et Jeudi 16h-18h (P.2.N-O.7.08) – **Hussein Cheikh-Ali**
 - ▶ Groupe 5: Mercredi 8h-10h (P.2.N-O.5.06) et Vendredi 16h-18h (P.A2.222) - **Robson do Nascimento**

Toutes ces infos sont sur la page du cours
[homepages.ulb.ac.be/ bpremore](http://homepages.ulb.ac.be/bpremore).

Le point sur l'évaluation

La matière présentée à l'examen sera l'union du cours sur transparents et syllabus et du contenu des séances d'exercices.

L'examen contiendra **une question théorique**: il faudra énoncer une définition, un résultat ou refaire une démonstration vue en cours.

Elle sera choisie parmi une liste qui vous sera communiquée avant l'examen. Une anticipation: la preuve de

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

par récurrence y sera sûrement!

Contenu de la section

Fonctions

Contenu de la section

Fonctions

Propriétés des fonctions

Classes de fonctions particulières

Les fonctions exponentielles et logarithmes

Exercice

Comment choisir le domaine $A \subset \mathbb{R}$ pour que

$$f : A \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x^2 - 1}$$

définisse une fonction?

Réponse

N'importe quel A **ne contenant ni 1 ni -1 convient**. Généralement, nous prenons « le plus grand possible », c'est-à-dire $A = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Remarque

La règle qui donne $f(x)$ sera souvent une simple formule contenant la variable x (également appelée *expression algébrique*). Mais parfois la recette est plus complexe, et parfois il n'y a aucune formule.

Un autre exercice

Exercice

Quel est le plus grand domaine A sur lequel

$$f(x) = \frac{1}{3 + \sqrt{x^2 - 4}}$$

définit bien une fonction?

Réponse

$\sqrt{x^2 - 4} \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc il n'y a pas de risques que $3 + \sqrt{x^2 - 4} \geq 0$ s'annule. C'est donc **la racine carrée** qui limite le domaine de définition. Cette fonction est bien définie si ce qui est sous la racine est positif ou nul, c'est-à-dire si

$$\begin{aligned} x^2 - 4 \geq 0 &\iff x^2 \geq 4 \\ &\iff x \geq 2 \text{ ou } x \leq -2. \end{aligned}$$

Le domaine maximal de définition est donc

$$A =]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[.$$

Un troisième exercice

Exercice

Quel est le plus grand domaine A sur lequel

$$g(x) = \frac{\sqrt{2x-1}}{x^2-1}$$

définit bien une fonction?

Réponse

Il y a deux problèmes ici: la racine carrée et le dénominateur qui peut s'annuler. Pour le dénominateur: l'expression est bien définie si

$$x^2 - 1 \neq 0 \iff x^2 \neq 1 \iff x \notin \{-1, 1\}.$$

Pour la racine carrée: elle est bien définie si $2x - 1 \geq 0 \iff x \geq \frac{1}{2}$. Le domaine maximal de définition est donc

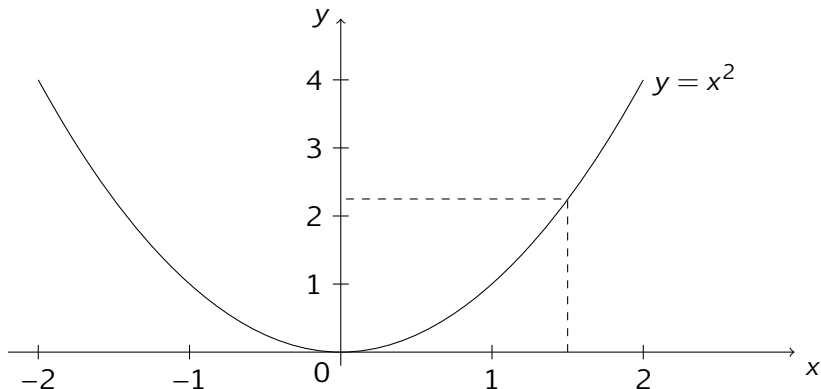
$$A = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right] \setminus \{1\} = \left[\frac{1}{2}, 1\right[\cup]1, +\infty[.$$

Graphe de fonction

Définition

Le graphe d'une fonction $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est l'ensemble des points du plan de la forme $(x, f(x))$.

Par définition, il s'agit donc des solutions de l'équation $y = f(x)$.



Définition

Une fonction $f: A \rightarrow B$, avec $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$ est :

- ▶ *paire* si et seulement si pour tout x de A , on a $-x \in A$ et $f(x) = f(-x)$.
- ▶ *impaire* si et seulement si pour tout x de A , on a $-x \in A$ et $f(-x) = -f(x)$.

Attention, la définition de paire et impaire demande que le domaine A soit *symétrique par rapport à 0*. (c'est ce que signifie $-x \in A$).

Remarque

Une fonction est paire \iff son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Une fonction est impaire \iff son graphe est symétrique par rapport à l'origine $(0,0)$.

Exemples

- ▶ La fonction f définie par $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + 1$ est **paire**.

Démonstration.

En effet: $f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x)$. □

- ▶ La fonction définie par $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$ est **impaire**.

Démonstration.

En effet: $f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$. □

- ▶ La fonction définie par $f : [-2, +\infty[\setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$ est **rien du tout!** Car $[-2, \infty[$ n'est pas symétrique par rapport à 0.
- ▶ La fonction définie par $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x^2+1} - 3x$ est **rien du tout!**

La plupart des fonctions ne sont ni paires ni impaires. Et la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire n'est en général rien du tout.

La somme de fonctions paires est paire.

En revanche, la somme de deux fonctions paires ou impaires est encore paire ou impaire:

Résultat

Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. Si f et g sont paires alors la fonction $f + g$ est encore paire. Si f et g sont impaires alors la fonction $f + g$ est encore impaire.

Démonstration.

On fait uniquement le cas impair. Supposons que f et g sont impaires. Soit $x \in A$. Alors, par hypothèse, $-x \in A$. On calcule alors:

$$\begin{aligned}(f + g)(-x) &= f(-x) + g(-x) = -f(x) + (-g(x)) \text{ car } f \text{ et } g \text{ sont impaires} \\ &= -(f + g)(x).\end{aligned}$$

Même chose dans le cas pair. □

Propriétés des fonctions

Soit $f : A \rightarrow B$ une fonction.

- ▶ f est dite *surjective* si tout élément de B est l'image d'au moins un élément de A ;
- ▶ f est dite *injective* si deux éléments distincts de A ont des images distinctes ;
- ▶ f est dite *bijjective* si f est à la fois injective et surjective.

Remarque

Une fonction est injective si et seulement si toute droite horizontale coupe son graphe en *maximum* un point !

Exemples

- ▶ La fonction f définie par $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ n'est pas surjective. Car les réels négatifs ne sont jamais de la forme x^2 .
- ▶ En revanche, la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto x^2$ est surjective. Car tout nombre positif admet une racine carrée!
- ▶ La fonction définie par $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto x^2$ n'est pas injective. Car 1 et -1 (plus généralement x et $-x$) ont la même image.
- ▶ La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 3x$ est injective et surjective. Elle est donc bijective.
- ▶ La fonction f définie par $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ n'est donc ni surjective ni injective.

Ici encore: les fonctions que vous rencontrerez ne seront pas forcément surjectives, injectives ou bijectives!

Ensemble image

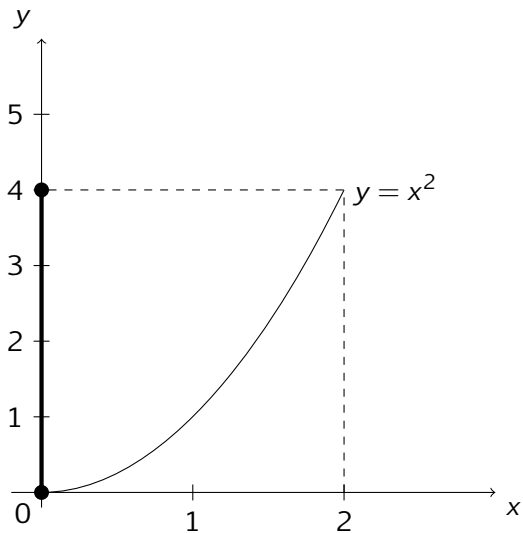
Soit $f : A \rightarrow B$ une fonction. L'ensemble image de f , noté $\text{Im } f$ ou $f(A)$, est l'ensemble des valeurs prises par la fonction. C'est

$$\text{Im } f = \{f(x) \text{ t.q. } x \in A\}.$$

L'ensemble image de la fonction...

- ▶ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ est \mathbb{R}^+
- ▶ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^3$ est \mathbb{R}
- ▶ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2 + 1$ est $[1, +\infty[$.
- ▶ $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est $]0, +\infty[$.

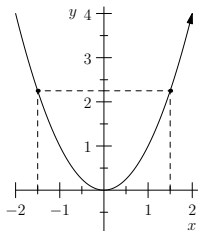
Le graphe de $[0,2] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ et son ensemble image



Injectivité, surjectivité et graphe

Remarque

- ▶ On peut « voir » les antécédents d'un nombre y sur le graphe de f en traçant une droite horizontale à hauteur y : les antécédents sont **les abscisses des points d'intersection**.



- ▶ Une fonction est injective si et seulement si tout élément dans son ensemble d'arrivée **admet au maximum un antécédent**.
- ▶ Une fonction est surjective si et seulement si tout élément dans son ensemble d'arrivée **admet au moins un antécédent**.

Contenu de la section

Fonctions

Propriétés des fonctions

Classes de fonctions particulières

Les fonctions exponentielles et logarithmes

Fonctions polynomiales

Définition

Les *fonctions polynômiales* sont des fonctions de la forme

$$x \mapsto a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

où a_0, \dots, a_n sont des constantes réelles, et n est un entier.

L'entier n est le *degré* de la fonction (si $a_n \neq 0$).

Fonctions racines

Exemple

Les fonctions *racine carrée* et *racine cubique* sont :

$$\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ : x \mapsto \sqrt{x} \quad \text{et} \quad \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt[3]{x}$$

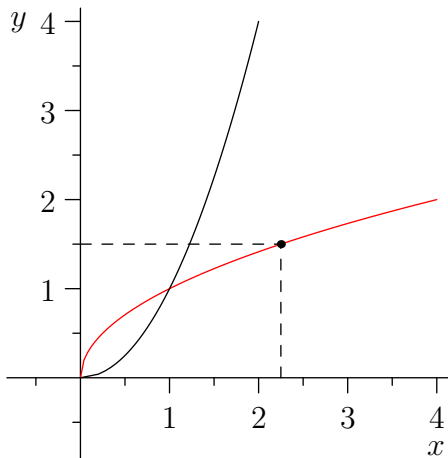
Définition

Plus généralement, pour n naturel pair, nous avons une fonction racine n^{e} :

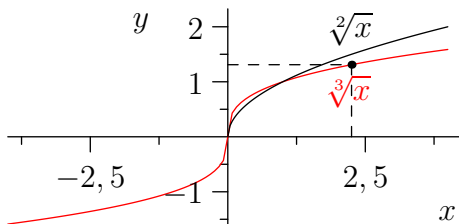
$$\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ : x \mapsto \sqrt[n]{x}$$

et pour n naturel impair, similairement avec un autre domaine :

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt[n]{x}.$$



La fonction racine carrée est en rouge. En noir, c'est la fonction $x \mapsto x^2$.



La fonction racine carrée est en noir. En rouge c'est la fonction racine cubique.

Question

La fonction racine cubique est-elle paire, impaire ou rien du tout?

Réponse: elle est **impaire**, car son graphe est symétrique par rapport à l'origine.

Les fonctions racines n -èmes avec n impair sont définies sur \mathbb{R} tout entier, alors que pour n pair elles sont seulement définies sur \mathbb{R}^+ .

Exemple

La raison est que si $x < 0$, alors x^3 est encore négatif. On peut donc tout à fait prendre la racine cubique (ou cinquième, etc...) d'un nombre négatif, qui sera... négative.

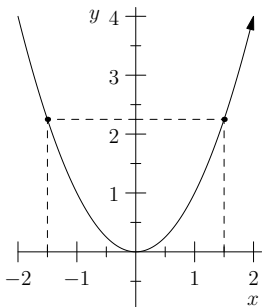
Croissance et décroissance

Définition

Soit f une fonction réelle et $A \subset \text{dom } f$. Cette fonction est

- ▶ *croissante sur A* si pour tout x, y dans A : $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$;
- ▶ *décroissante sur A* si pour tout x, y dans A : $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$;
- ▶ *strictement croissante sur A* si pour tout x, y dans A :
 $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$;
- ▶ *strictement décroissante sur A* si pour tout x, y dans A :
 $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.

$x \mapsto x^2$ est décroissante sur \mathbb{R}^- et croissante sur \mathbb{R}^+ :



Sur \mathbb{R} , elle n'est ni croissante ni décroissante ; on dit qu'elle n'est pas monotone.

Contenu de la section

Fonctions

Propriétés des fonctions

Classes de fonctions particulières

Les fonctions exponentielles et logarithmes

Exponentielles

Définition

Les fonction exponentielles sont les fonctions du type

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto a^x$$

pour un certain réel positif $a > 0$, appelé la *base* de l'exponentielle.

Définition

La fonction exponentielle, c'est la fonction exponentielle dont la base est $a = e$, où $e \simeq 2.7182818\dots$ est une constante appelée... « le nombre e . »

Remarque

- ▶ Domaine = \mathbb{R} Image = $\mathbb{R}_0^+ =]0, \infty[$.
- ▶ Si $a > 1$, l'exponentielle est croissante !
- ▶ Si $0 < a < 1$, l'exponentielle est décroissante !

Quelle est l'utilité de la fonction exponentielle?

La fonction exponentielle sert à décrire des phénomènes physiques et/ou biologiques où rentre en jeu une quantité dont les variations sont **proportionnelles à la valeur de la quantité en tout instant**.

Exemple

On injecte à un lapin, par voie intramusculaire, une substance qui n'est pas naturellement présente dans son organisme. On note $Q(t)$ la quantité au temps t .

La substance est dégradée proportionnellement à sa concentration: pendant un laps de temps Δt , la quantité de substance dégradée est

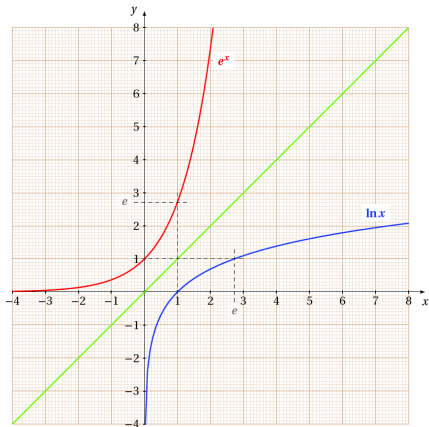
$$\Delta Q = -K \Delta t \cdot Q$$

où $K > 0$ est un paramètre. L'évolution de Q se décrit par exemple par:

$$Q(t) = Q_0 e^{-Kt}.$$

Graphe

La ligne rouge est la ligne intéressante pour l'instant :



Logarithme

Question

Quel est le nombre x tel que $100000000 = 10^x$?

Définition

Le logarithme de y en base a est l'unique nombre x tel que $a^x = y$! On le note $\log_a(y)$.

$$\log_a(y) = x \iff a^x = y$$

Remarque

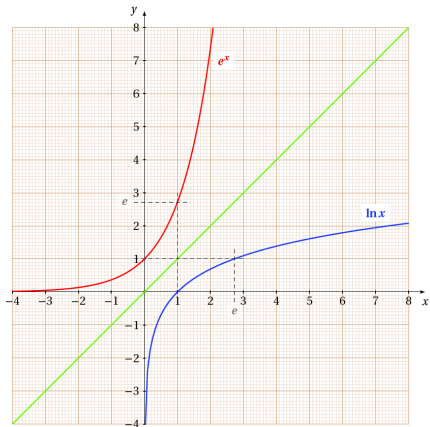
En d'autres termes, le logarithme de y en base a est l'antécédent de y pour la fonction $x \mapsto a^x$

Le logarithme de base e est juste noté \ln . En particulier:

$$e^0 = 1 \iff \ln(1) = 0.$$

Graphe

Revenons aux graphes :



Les fonctions logarithmes sont définies sur le domaine \mathbb{R}_0^+ et ont pour ensemble image \mathbb{R} .

Il y a quelques fonctions logarithmes fort utilisées :

- ▶ le logarithme décimal, en base 10, souvent noté simplement \log ,
- ▶ le logarithme en base e , souvent noté \ln , et
- ▶ le logarithme en base 2, noté \log_2 .

Identités importantes

Résultat

Pour $a, b > 0$ et $x, y \in \mathbb{R}$.

- ▶ $\exp(\ln a) = a$ et $\ln(\exp x) = x$,
- ▶ $\exp(0) = 1$ et $\ln 1 = 0$,
- ▶ $\exp(x + y) = \exp x \exp y$ et $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$,
- ▶ $\ln(a^x) = x \ln a$
- ▶ $\log_a(b) = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$.