Contenu de la section

La trigonométrie c'est l'étude des triangles.
Plus spécifiquement, l'étude des liens entre

- la mesure des angles, et
- la mesure des côtés.

Question

Comment mesurer des angles ?

Contenu de la section

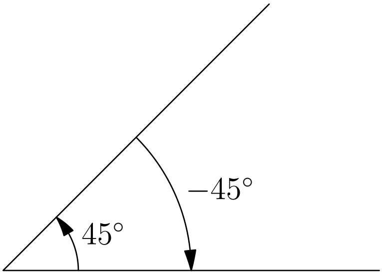
Intuitivement, un angle est une fraction de « faire un tour complet ». Pour le mesurer, on peut donner un nombre réel décrivant le nombre de tour complets. Mais généralement on utilisera

- le degré (1 tour = 360 degrés), ou
- le radian (1 tour = 2π radians)

Le radian sera notre choix !

Attention à

- Faire un tour et demi (3π) correspond à la même position finale que faire un demi tour (π).
  $\Rightarrow$ on parlera souvent de mesure « à 2π près ».
- Faire un demi tour dans un sens ou dans l'autre n'est pas pareil.
  $\Rightarrow$ on parle d'angle orienté lorsque cela est important !
  Dans le plan :
  Orientation positive Sens anti-horaire
  Orientation négative Sens horaire

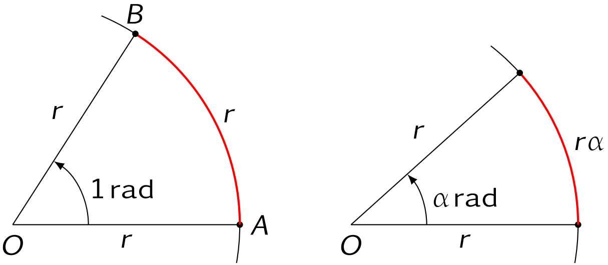


$-45°$
$45°$

Contenu de la section

Pourquoi 2π ?

Un *radian* (1 rad) correspond à l'angle au centre d'un cercle qui intercepte, sur la circonférence, un arc dont la longueur est égale au rayon du cercle.



Le radian est idéal pour calculer et manipuler des longueurs d'arcs !

Pour passer du radian au degré et inversement, retenons que $2\pi\,\text{rad} = 360^\circ$. Par habitude, nous retiendrons également le tableau suivant :

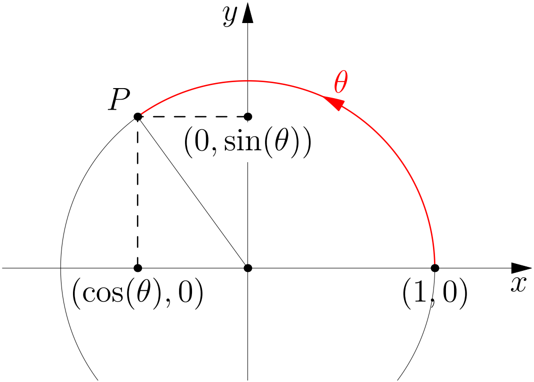
en radians	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	2π
en degrés	30°	45°	60°	90°	180°	360°

Contenu de la section

Définition

Soit un angle θ en radians. Soit P le point du cercle de centre 0 et de rayon 1 qui fait un angle θ avec l'horizontale. Alors

- $\cos\theta$ est l'abscisse du point P, et
- $\sin\theta$ est l'ordonnée du point P .

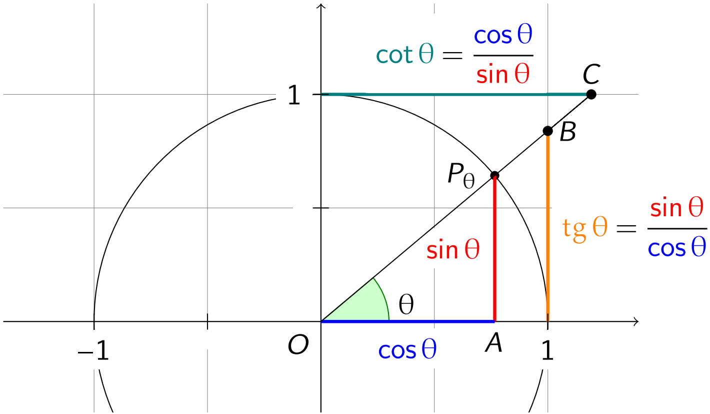


Définition

Un *cercle trigonométrique* est un cercle de rayon 1, il permet de représenter géométriquement toutes les fonctions trigonométriques.

Autres fonctions trigonométriques importantes :

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \qquad \cot(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$$



Dans ce cercle, $\sin(\theta)$ et $\cos(\theta)$ gardent leur interprétation classique: sin est « côté opposé sur hypothénuse », etc...

Pente et angle

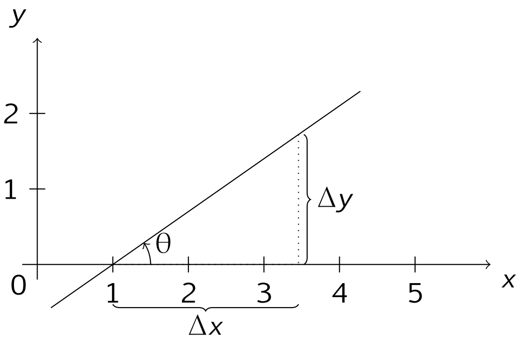
Résultat

Étant donné un repère cartésien orthonormé. Pour une droite d'équation $y = mx + p$ formant un angle (orienté) θ avec l'horizontale, nous avons

$$m = \tan\theta$$

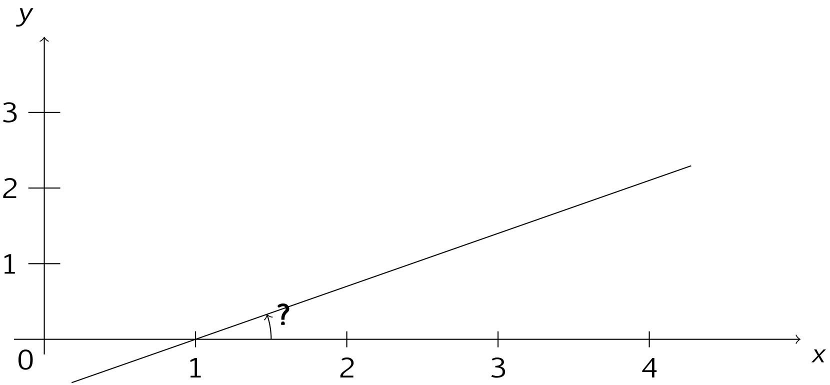
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

où (x_0, y_0) et (x_1, y_1) sont deux points distincts du graphe de f.



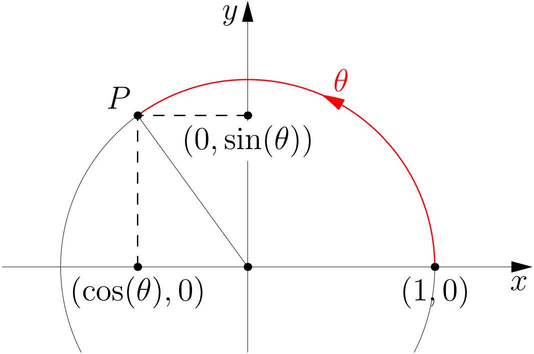
Remarque

Cette interprétation ne tient plus si les axes ne sont pas gradués à l'identique :



Contenu de la section

Relation fondamentale entre cos et sin



Le théorème de Pythagore appliqué dans le cercle trigonométrique implique l'importante relation $(\cos(\theta))^2 + (\sin(\theta))^2 = 1$. On l'écrira plus souvent sous la forme:

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$$

Angles remarquables

Voici quelques valeurs importantes des fonctions sinus et cosinus :

angle	sin		cos	tan	cot
0	$\sqrt{0}/2$	$= 0$	1	0	$\nexists$
$\pi/6$	$\sqrt{1}/2$	$= 1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$		$\sqrt{2}/2$	1	1
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$		$1/2$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$
$\pi/2$	$\sqrt{4}/2$	$= 1$	0	$\nexists$	0

(1.6)

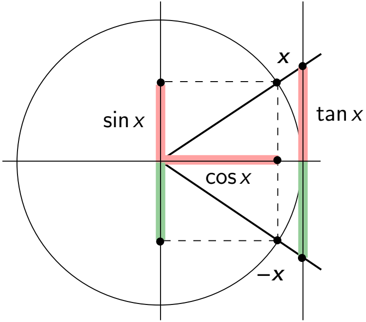
Pour ces valeurs particulières: on obtient une des deux (cos ou sin) en lisant sur le cercle trigonométrique, et l'autre à partir de la relation fondamentale.

Et ensuite on calcule tan par

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Contenu de la section

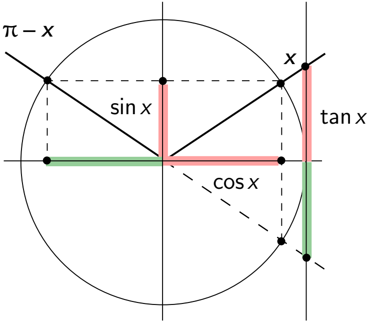
Symétrie par rapport à l'axe des abscisses



$$\sin(-x) = -\sin(x)$$
$$\cos(-x) = \cos(x)$$
$$\tan(-x) = -\tan(x)$$

Il est inutile d'apprendre ces relations par coeur, mais il faut savoir les retrouver en lisant le cercle trigonométrique.

Symétrie par rapport à l'axe des ordonnées



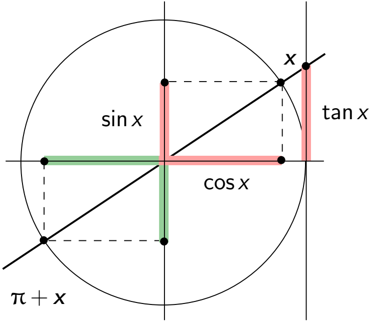
$$\sin(\pi - x) = \sin(x)$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$$

$$\tan(\pi - x) = -\tan(x)$$

Pour lire $\pi - x$: on trace d'abord $-x$, puis ajouter π revient à faire un demi-tour (dans le sens horaire).

Symétrie par rapport à l'origine

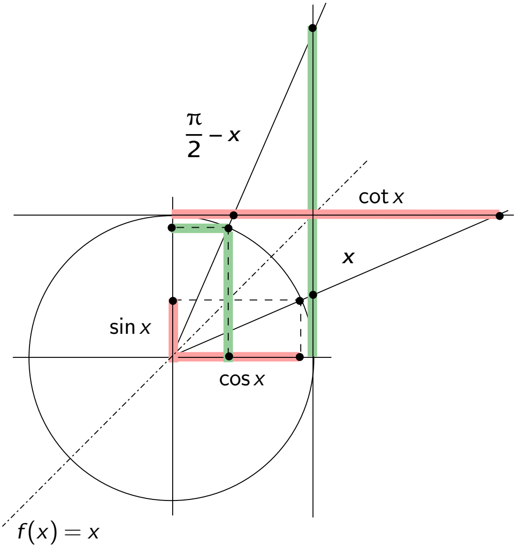


$$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$$

$$\tan(\pi + x) = \tan(x)$$

Symétrie par rapport à la première bissectrice

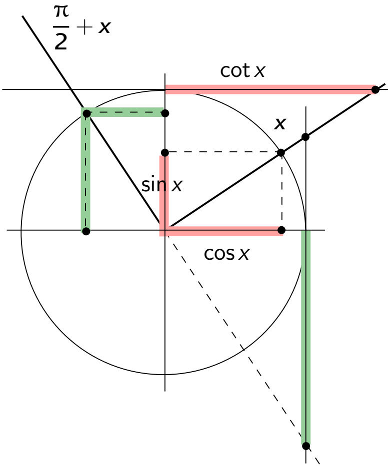


$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot(x)$$

Angles décalés de 90°



$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos(x)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin(x)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\cot(x)$$

Morale de cette section: il faut savoir retrouver toutes ces relations à l'aide du cercle trigonométrique.

Contenu de la section

Il existe des formules qui permettent d'exprimer les sinus et cosinus d'une somme d'angles en fonction des sinus et cosinus des angles de départ:

Résultat

Pour tous angles A et B (en radians):

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

Ces formules sont très utiles pour exprimer (par exemple) $\cos(3x)$, $\sin(5x)$, etc... en fonction uniquement de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

Exemple

- Pour tout angle x:
  $\sin(2x) = \sin(x)\cos(x) + \cos(x)\sin(x) = 2\sin(x)\cos(x)$.
- Pour tout angle x: $\cos(2x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2$.
- Pour tout angle x:

$$\begin{aligned}\sin(3x) = \sin(2x + x) &= \sin(2x)\cos(x) + \cos(2x)\sin(x)\\ &= 2\sin(x)\cos(x)^2 + \Big(\cos(x)^2 - \sin(x)^2\Big)\sin(x)\\ &= 3\sin(x)\cos(x)^2 - \sin(x)^3\end{aligned}$$

En utilisant maintenant $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$ il reste:

$$\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin(x)^3.$$

On peut montrer de la même manière plein de formules différentes:

$$\cos A \cos B = \frac{\cos(A-B)+\cos(A+B)}{2}$$
$$\sin A \sin B = \frac{\cos(A-B)-\cos(A+B)}{2}$$
$$\sin A \cos B = \frac{\sin(A+B)+\sin(A-B)}{2}$$
$$\cos A \sin B = \frac{\sin(A+B)-\sin(A-B)}{2}$$
$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Pour l'examen, seules les formules donnant $\sin(A+B)$, $\cos(A+B)$ et $\tan(A+B)$ seront exigées. Il sera aussi demandé d'exprimer des nombres de la forme $\sin(7x)$, $\cos(3x)$, etc... en fonction de $\sin(x)$ et $\cos(x)$ comme ci-dessus.

Contenu de la section

Fonctions périodiques

Définition

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $T > 0$ un nombre réel. On dit que f est périodique de période T si, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x+T) = f(x).$$
On appelle période de f le plus petit nombre T vérifiant ça.

Exemple

- sin et cos sont 2π-périodiques. (Rajouter 2π c'est faire un tour de cercle trigonométrique).
- $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ est alors aussi 2π-périodique. Mais: tan est en fait π-périodique, car:
$$\tan(\pi + x) = \frac{\sin(\pi + x)}{\cos(\pi + x)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x).$$
La période de tan est donc π (le demi-tour).

Contenu de la section

Géométrie analytique

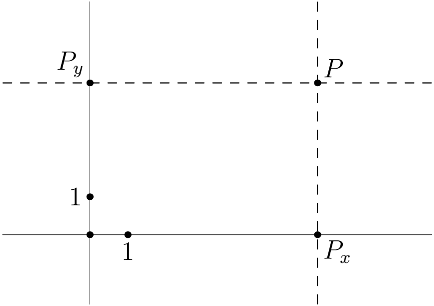
La géométrie analytique est une manière d'aborder des problèmes de géométrie grâce à un ou plusieurs systèmes de coordonnées. Et en faisant des calculs.

On donne quelques exemples dans le plan:

Coordonnées cartésiennes

Définition

Un repère cartésien est la donnée de deux axes sécants, et d'une unité sur chaque axe. L'intersection des axes est appelée l'origine. Les coordonnées cartésiennes d'un point P du plan sont alors obtenues en projetant ce point sur chacun des axes, et en repérant la projection par rapport à l'unité.



Ayant un système de coordonnées, nous avons donc l'équivalence entre

- les points du plan et
- les éléments de $\mathbb{R}^2$ (via les coordonnées des points)

Contenu de la section

Définition

Un élément de $\mathbb{R}^n$ peut être vu comme un *point*, et il s'écrit alors avec n nombres réels appelés ses *coordonnées*, que nous notons généralement $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$.
Lorsque $n = 2$: les coordonnées sont appelées l'abcisse et l'ordonnée (souvent notées x et y)

Exemple

Le point $(1, -1)$ de $\mathbb{R}^2$ désigne l'élément du plan dont l'abcisse vaut 1 et l'ordonnée vaut -1.

Définition

Un élément de $\mathbb{R}^n$ peut aussi être vu comme un *vecteur*, et ses constituants sont les *composantes* du vecteur.

Remarque

Un vecteur représente un déplacement : une translation. C'est "une flèche" entre deux points.

Exemple

Le vecteur $(-1,1)$ de $\mathbb{R}^2$ indique une translation dans la direction « Nord-Ouest » sur le plan.

Différence entre point et vecteur

La différence, fondamentale et intuitive entre point et vecteur est:

- que le point représente un état, une position
- tandis que le vecteur représente une évolution, un mouvement, une direction.

Remarque

Mais les deux sont représentés par des éléments de $\mathbb{R}^n$!

Un vecteur se représentera sous la forme d'une flèche.

Le vecteur qui va du point **x** au point **y** se note généralement $\overrightarrow{xy}$. Ses composantes sont données en prenant la différence entre les coordonnées de **y** (le point d'arrivée) et celles de **x** (le point de départ). Par exemple, dans $\mathbb{R}^3$:

$$\overrightarrow{xy} = \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ y_2 - x_2 \\ y_3 - x_3 \end{pmatrix}$$

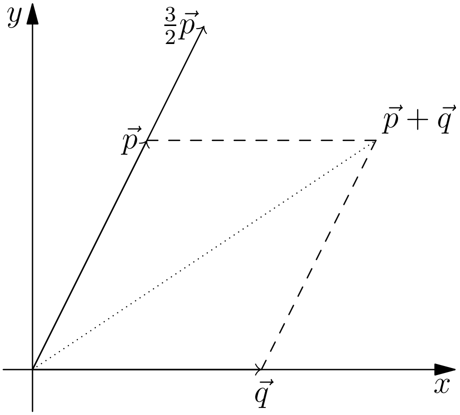
Un vecteur est donné sans point de départ: c'est une direction. Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, la direction « nord-ouest » est donnée par le vecteur $(-1,1)$.

Contenu de la section

Si $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ sont des éléments de $\mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on peut sommer deux vecteurs et multiplier un vecteur par un réel. Tout se fait coordonnée par coordonnée:

$$(x_1,\ldots,x_n)+(y_1,\ldots,y_n)=(x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)$$
$$(x_1,\ldots,x_n)-(y_1,\ldots,y_n)=(x_1-y_1,\ldots,x_n-y_n)$$
$$\lambda(x_1,\ldots,x_n)=(\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n)$$

- la somme de deux vecteurs est donnée par la règle du parallélogramme ;
- la multiplication par un réel (on dira aussi « par un *scalaire* ») multiplie la longueur.



Quelques précisions

- la différence de deux **points** est un vecteur allant du second vers le premier : $\mathbf{p} - \mathbf{q}$ est le vecteur $\overrightarrow{qp}$;
- la somme d'un **point** et d'un **vecteur** représente un déplacement à partir de ce point dans la direction du vecteur donné : le résultat est un point ;
- la somme de deux ou plusieurs **vecteurs** représente la composée de déplacements successifs : le résultat est un vecteur.

Exemple

Si on considère $\mathbf{p} = (1,2)$ comme un point, et $\overrightarrow{w} = (-1,1)$ comme un vecteur (donnant la direction « Nord-Ouest »), alors on conçoit leur somme $\mathbf{p} + \overrightarrow{w} = (1,2) + (-1,1) = (0,3)$ comme le point obtenu en translatant le point de départ, $\mathbf{p}$, dans la direction donnée $\overrightarrow{w}$.

Définition

L'élément particulier $(0,0,\ldots,0)$ se note $\overrightarrow{0}$ et est appelé *vecteur nul*.

Il représente une translation... de vecteur nul.

Résultat

Quel que soit le vecteur $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$*, nous avons*

$$x + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + x = x.$$

Décomposition selon les axes de coordonnées

Regardons le cas $n = 3$. Si nous notons $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ les vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{e_1} = (1,0,0) \qquad \overrightarrow{e_2} = (0,1,0) \qquad \overrightarrow{e_3} = (0,0,1)$$

alors tout vecteur $\overrightarrow{x}$ de $\mathbb{R}^3$ peut s′écrire:

$$\overrightarrow{x} = x_1\,\overrightarrow{e_1} + x_2\,\overrightarrow{e_2} + x_3\,\overrightarrow{e_3}.$$

On peut généraliser à toutes les valeurs de n, avec

$$\overrightarrow{e_1} = (1,0,\ldots,0), \quad \overrightarrow{e_2} = (0,1,0,\ldots,0),\ldots, \quad e_n = (0,\ldots,0,1).$$

Remarque

Attention, ici $\overrightarrow{e_1},\ldots,\overrightarrow{e_n}$ sont des vecteurs eux-même. Pour l′exemple, x_1 et $\overrightarrow{e_1}$ ont donc des rôles fondamentalement différents : le premier est un réel (ou « scalaire »), le second est un vecteur.

- la différence de deux **points** est un vecteur allant du second vers le premier : $\mathbf{p} - \mathbf{q}$ est le vecteur $\overrightarrow{qp}$;
- la somme d'un **point** et d'un **vecteur** représente un déplacement à partir de ce point dans la direction du vecteur donné : le résultat est un point ;
- la somme de deux ou plusieurs **vecteurs** représente la composée de déplacements successifs : le résultat est un vecteur.

Exemple

Si on considère $\mathbf{p} = (1,2)$ comme un point, et $\overrightarrow{w} = (-1,1)$ comme un vecteur (donnant la direction « Nord-Ouest »), alors on conçoit leur somme $\mathbf{p} + \overrightarrow{w} = (1,2) + (-1,1) = (0,3)$ comme le point obtenu en translatant le point de départ, $\mathbf{p}$, dans la direction donnée $\overrightarrow{w}$.