Remarques méthodologique

Important: le syllabus d'exercices est désormais disponible aux PUB (ou alors c'est une question de jours)

Conseils méthodologiques: pour le cours de Math F112:

- Le syllabus et les slides sont des supports du cours. Toutes les définitions et résultats importants sont ainsi accessibles pour travailler chez vous.
- Pendant le cours, il n'est pas nécessaire de noter les énoncés des résultats. En revanche il est utile de prendre des notes (remarques orales, etc...) et de noter en détails les exemples et calculs faits en direct (en les faisant au moment idéalement!)

Contenu de la section

Rappels

- la différence de deux **points** est un vecteur allant du second vers le premier : $\mathbf{p} - \mathbf{q}$ est le vecteur $\overrightarrow{qp}$;
- la somme d'un **point** et d'un **vecteur** représente un déplacement à partir de ce point dans la direction du vecteur donné : le résultat est un point ;
- la somme de deux ou plusieurs **vecteurs** représente la composée de déplacements successifs : le résultat est un vecteur.

Exemple

Si on considère $\mathbf{p} = (1,2)$ comme un point, et $\overrightarrow{w} = (-1,1)$ comme un vecteur (donnant la direction « Nord-Ouest »), alors on conçoit leur somme $\mathbf{p} + \overrightarrow{w} = (1,2) + (-1,1) = (0,3)$ comme le point obtenu en translatant le point de départ, $\mathbf{p}$, dans la direction donnée $\overrightarrow{w}$.

Applications

Milieu

Le milieu d'un segment de $\mathbf{a}$ jusqu'à $\mathbf{b}$ est donné par :

$$\mathbf{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ab} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$$

Le *milieu* ou *centre de gravité* des points $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ est donné par :

$$\mathbf{g} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} a_i.$$

Chaque coordonnée du centre de gravité $\mathbf{g}$ est la moyenne des coordonnées des a_i.

Résultat (Rappel – Pythagore)

Dans le plan, la longueur du segment de **a** *à* **b** *est donnée par* $\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$.

Définition

En général, on appelle *norme* d'un vecteur $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$ la quantité:

$$\left\|\overrightarrow{v}\right\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}$$

Exemple

La norme du vecteur $(4,2,4)$ est $\sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6$.

Remarque

Si **a** et **b** sont deux points de $\mathbb{R}^n$, la norme du vecteur $\overrightarrow{ab}$ mesure la distance entre **a** et **b**.

Contenu de la section

On connait le système de coordonnées cartésiennes du plan, c′est une bijection

$$\begin{cases} \text{plan} \to \mathbb{R}^2 \\ \quad \mathbf{p} \mapsto (x(\mathbf{p}), y(\mathbf{p})) \end{cases}$$

D′autres systèmes de coordonnées existent : chaque bijection (c′est-à-dire: chaque correspondence unique) entre le plan et une partie de $\mathbb{R}^2$ peut servir de système de coordonnées.

Coordonnées polaires.

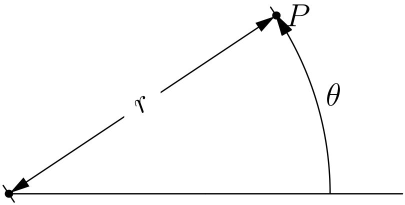
Pour définir des *coordonnées polaires* du plan, on choisit

- une origine **o** (un point) et
- une demi-droite issue de ce point.

Un point P est alors repéré dans le plan par deux coordonnées, souvent notées (r,θ), où

- r correspond à la distance entre **o** et P, et
- θ correspond à l'angle orienté entre la demi-droite choisie et la demi-droite issue de **o** passant par P.

On choisit généralement $\theta \in [0; 2\pi[$.



Si P possède des coordonnées cartésiennes (x,y) et des coordonnées polaires (r,θ), elles sont reliées par les relations :

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta), \\ y = r\sin(\theta). \end{cases}$$

Remarque

Il n'est pas possible d'écrire aisément θ en terme de x et y, par contre par le théorème de Pythagore on obtient $r = \sqrt{x^2+y^2}$, ce qui permet d'écrire

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \sin(\theta) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases}$$

Équation d'un cercle en coordonnées polaires

Exemple

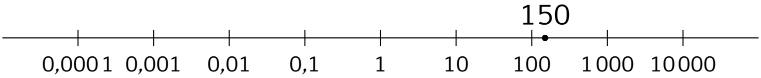
Coordonnées d'un cercle centré en l'origine en coordonnées

cartésiennes $x^2 + y^2 = R^2$

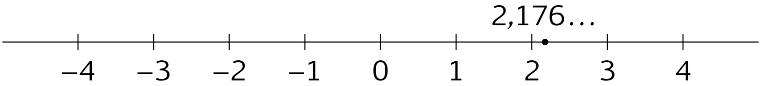
polaires $r = R$

Le choix du système de coordonnées peut donc considérablement simplifier le problème étudié.

Coordonnées logarithmiques.



ce qu'on comprend en « prenant le logarithme (en base 10) de tout cela : »



Cette seconde droite graduée est liée à la première de la manière suivante :

$$10^{-4} = 0{,}000\,1,\ 10^{-3} = 0{,}001,\ \ldots,\ 10^{3} = 1\,000,\ 10^{4} = 10\,000,$$

et bien évidemment : $10^{2{,}176} = 150$.

Contenu de la section

Équations d'objets

Rappel: chaque point du plan a deux coordonnées cartésiennes. On va voir qu'on peut dessiner des ensembles de points dans le plan dont les coordonnées vérifient une équation de deux variables.

Équation d'une droite

Dans $\mathbb{R}^2$, toute droite admet une équation de la forme

$$ax + by + c = 0$$

c'est-à-dire que les points (x,y) vérifiant l'équation ci-dessus sont exactement les points de la droite. Les constantes a,b,c permettent de décrire la droite (position, direction).

Ceci est une équation à deux inconnues, elle admet donc en général un nombre infini de solutions!

Justification

Soit $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ (un point) et $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$ (un vecteur). La droite de $\mathbb{R}^n$ passant par $\mathbf{p}$ et dirigée selon la direction $\overrightarrow{v}$ est l'ensemble des points $\mathbf{x}$ de la forme

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\overrightarrow{v} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

C'est ce qu'on appelle les équations paramétriques de la droite.

Pour $n = 2$ on écrit $\mathbf{x} = (x,y)$, $\mathbf{p} = (p_1,p_2)$, $\overrightarrow{v} = (v_1,v_2)$.

Alors

$$x = p_1 + tv_1 \quad \text{et} \quad y = p_2 + tv_2.$$

donc

$$x - p_1 = tv_1 \quad \text{et} \quad y - p_2 = tv_2.$$

On a alors

$$(x - p_1)v_2 = (y - p_2)v_1$$

c'est-à-dire, en changeant de notations

$$ax + by + c = 0$$

(on a posé: $a = v_2$, $b = -v_1$ et $c = p_2v_1 - p_1v_2$).

Remarquons que la droite d'équation $ax + by + c = 0$

- est verticale si $b = 0$, $a \neq 0$.
- est horizontale si $a = 0$, $b \neq 0$.
- passe par l'origine si $c = 0$. Ceci car si $c = 0$, $(0,0)$ vérifie toujours l'équation.
- est identique à la droite d'équation $kax + kby + kc = 0$ pour n'importe quelle constante $k \neq 0$.

Lorsque $b \neq 0$ (droite non-verticale), on peut ré-écrire l'équation en isolant y :

$$y = mx + p$$

Équations de cercles

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, et $r > 0$. Le cercle de centre (a,b) et de rayon r est l'ensemble des points à distance r du point (a,b). Il a donc pour équation :

$$\|(x,y)-(a,b)\| = r$$

c'est-à-dire

$$(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$$

Exemple

L'équation:

$$x^2 - 6x + y^2 - 2y + 9 = 0$$

représente un cercle de centre $(3,1)$ et de rayon 1.

Pour voir ça, on réécrit:

$$x^2 - 6x + y^2 - 2y + 9 = 0 \iff (x-3)^2 - 9 + (y-1)^2 - 1 + 9 = 0$$

qui est équivalente à :

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 1.$$

Contenu de la section

Définition

Le *produit scalaire* entre deux vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ de $\mathbb{R}^n$ est donné par

$$\left\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \right\rangle = v_1 w_1 + \cdots + v_n w_n.$$

C'est donc un nombre réel (un « scalaire »).

Exemple

$$\langle (2,1),(2,5) \rangle = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 5 = 9$$

$$\langle (1,0),(2,5) \rangle = 2 \qquad \langle (0,1),(2,5) \rangle = 5 \qquad \langle (1,1),(2,5) \rangle = 7$$

Notons que si $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, alors $\left\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{e_i} \right\rangle = v_i$

Où $\overrightarrow{e_i}$ est le vecteur

$$\overrightarrow{e_i} = (0, \ldots, 0, \underbrace{\;1\;}_{i\text{-ème pos}}, 0, \ldots, 0)$$

de coordonnées: $(e_i)_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Résultat

Pour tous ***vecteurs*** $\overrightarrow{a},\overrightarrow{a'},\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^n$ *et* ***scalaires*** $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$*, le produit scalaire vérifie les propriétés suivantes :*

1. $\left\langle (\lambda\overrightarrow{a} + \mu\overrightarrow{a'}),\overrightarrow{b} \right\rangle = \lambda\left\langle \overrightarrow{a},\overrightarrow{b} \right\rangle + \mu\left\langle \overrightarrow{a'},\overrightarrow{b} \right\rangle$ *(linéaire à gauche)*
2. $\left\langle \overrightarrow{a},\overrightarrow{b} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{b},\overrightarrow{a} \right\rangle$ *(symétrique)*
3. $\left\langle \overrightarrow{a},\overrightarrow{a} \right\rangle \geq 0$ *et de plus,* $\left\langle \overrightarrow{a},\overrightarrow{a} \right\rangle = 0 \iff \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ *(défini positif).*

Les deux premières propriétés montrent qu'il y a également linéarité à droite ; on dit alors que le produit scalaire est *bilinéaire.*

Ces propriétés sont immédiates par définition. Par exemple dans $\mathbb{R}^2$ tout se vérifie à partir de :

$$\langle (a_1,b_1),(a_2,b_2) \rangle = a_1 a_2 + b_1 b_2.$$

Le **produit scalaire** est associé à la **norme** par la relation suivante:

$$\left\|\overrightarrow{v}\right\| = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2} := \sqrt{\left\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \right\rangle}$$

C'est ce qui prouve la propriété: $\left\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \right\rangle = 0 \iff \overrightarrow{v} = 0$.

Remarque

La « norme » d'un vecteur correspond à sa « longueur » d'après le théorème de Pythagore.

Exemple

(pour $n = 2$) Si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a $\|(a,b)\| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Résultat (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Pour tous ***vecteurs*** $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ *de* $\mathbb{R}^n$*, on a*

$$\left|\left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \right\rangle\right| \leq \left\|\overrightarrow{a}\right\| \left\|\overrightarrow{b}\right\|.$$

C'est un résultat fondamental , dont la preuve sera exigible à l'examen de Janvier.

Il dit que le produit scalaire entre deux vecteurs est au plus égal (en valeur absolue) au produit des deux normes.

Démonstration.

Pour tout nombre réel t, on regarde la quantité $\left\langle \overrightarrow{a} + t\,\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a} + t\,\overrightarrow{b} \right\rangle$. Elle est positive par définition du produit scalaire. Nous pouvons la ré-écrire via la bilinéarité du produit scalaire sous la forme :

$$\begin{aligned} \left\langle \left(\overrightarrow{a} + t\,\overrightarrow{b}\right), \left(\overrightarrow{a} + t\,\overrightarrow{b}\right) \right\rangle &= \left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{a} \right\rangle + 2\left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \right\rangle t + t^2 \left\langle \overrightarrow{b}, \overrightarrow{b} \right\rangle \\ &= \left\| \overrightarrow{a} \right\|^2 + 2\left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \right\rangle t + t^2 \left\| \overrightarrow{b} \right\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Mais cette expression est un polynôme du second degré. Si elle est positive pour toute valeur de t c'est que son discriminant est négatif:

$$\left(2\left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \right\rangle \right)^2 - 4 \left\| \overrightarrow{a} \right\|^2 \left\| \overrightarrow{b} \right\|^2 \leq 0$$

qui donne alors:

$$\left| \left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \right\rangle \right| \leq \left\| \overrightarrow{a} \right\| \left\| \overrightarrow{b} \right\|$$

qui est l'inégalité annoncée. □

Résultat

La norme $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *vérifie les propriétés suivantes :*

- $\left\|\overrightarrow{a}\right\| = 0 \iff \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ *;*
- $\left\|\lambda\overrightarrow{a}\right\| = |\lambda| \left\|\overrightarrow{a}\right\|$ *;*
- $\left\|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right\| \leq \left\|\overrightarrow{a}\right\| + \left\|\overrightarrow{b}\right\|$ *(inégalité triangulaire).*

La preuve est omise.

$\square$

Résultat

Si $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, alors

$$\left\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \right\rangle = \left\| \overrightarrow{v} \right\| \left\| \overrightarrow{w} \right\| \cos(\theta)$$

où θ est l'angle orienté formé par les vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ (supposés basés au même point!).

Démonstration.

Voir le syllabus, c'est une application des formules de trigonométrie. $\square$

Corollaire

Le produit scalaire de $\overrightarrow{v}$ *et* $\overrightarrow{w}$ *s'annule si et seulement si les vecteurs sont orthogonaux (c'est-à-dire s'ils font un angle de* $\frac{\pi}{2}$*) ou si l'un des deux est nul.*

Démonstration.

On utilise le résultat précédent:

$$\left\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \right\rangle = \left\| \overrightarrow{v} \right\| \left\| \overrightarrow{w} \right\| \cos(\theta)$$

Si les vecteurs ne sont pas nuls, alors leur norme n'est pas nulle. Dès lors seul le cosinus peut s'annuler, ce qui n'arrive que pour des angles de $\frac{\pi}{2}$ (des angles droits). □

Il faut retenir le principe suivant: le produit scalaire sert à comprendre quand deux vecteurs sont orthogonaux ou non. Quand deux vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont orthogonaux, on notera parfois $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{w}$.

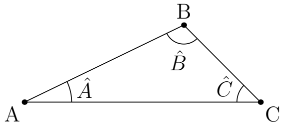
Contenu de la section

Loi des cosinus

Soit un triangle de sommets A,B,C. Alors :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \hat{C}$$

Ceci est un théorème de Pythagore généralisé



Démonstration.

Notons $\overrightarrow{AB} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$ pour le vecteur de **A** à **B**, etc. On développe AB^2 grâce au produit scalaire :

$$\begin{aligned} AB^2 &= \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{CB}\right\|^2 + 2\left\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB} \right\rangle \\ &= \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{CB}\right\|^2 + 2\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\left\|\overrightarrow{CB}\right\|\cos(\pi - \hat{C}) \\ &= \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{CB}\right\|^2 - 2\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\left\|\overrightarrow{CB}\right\|\cos(\hat{C}) \end{aligned}$$

Attention, l'angle entre $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CB}$ est $\pi - \hat{C}$ car ils n'ont pas le même point base sur l'image. $\square$

Contenu de la section

Définition

La mesure de *l'angle entre deux vecteurs* est l'unique nombre θ entre 0 et π tel que $\cos\theta = \frac{\langle\vec{v},\vec{w}\rangle}{\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|}$.

Cette définition est tout à fait naturelle, car on avait vu que

$$\left\langle\vec{v},\vec{w}\right\rangle = \left\|\vec{v}\right\|\left\|\vec{w}\right\|\cos(\theta)$$

quand les vecteurs faisaient un angle θ. On se restreint à $\theta \in [0,\pi]$ **par parité** de la fonction cosinus.

Le produit vectoriel

Définition

Soient $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^3$ deux **vecteurs**. On définit leur *produit vectoriel* comme le vecteur dont les composantes sont les suivantes:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} := \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

En particulier, $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ est encore un vecteur. (D'où le nom produit « vectoriel »).

Le produit vectoriel est donc une application

$$\cdot \times \cdot : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) \mapsto \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}.$$

Remarque

Le produit vectoriel est parfois noté $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}$ au lieu de $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$. Il n'est bien défini que pour des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Propriétés

Résultat

Le produit vectoriel vérifie les identités suivantes :

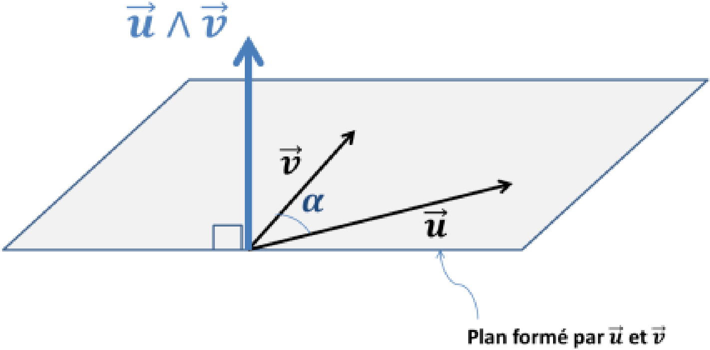
- $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \perp \overrightarrow{a}$ *et* $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \perp \overrightarrow{b}$ *;*
- $(\alpha\overrightarrow{a} + \alpha'\overrightarrow{a'}) \times \overrightarrow{b} = \alpha\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} + \alpha'\overrightarrow{a'} \times \overrightarrow{b}$ *(linéaire à gauche)*
- $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$ *(anti-symétrique) ;*
- $\left\|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right\| = \left\|\overrightarrow{a}\right\| \left\|\overrightarrow{b}\right\| \sin\theta$ *;*

pour tout $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$ *et* $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a'}, \overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^3$*, et où* θ *est l'angle formé par les vecteurs* $\overrightarrow{a}$ *et* $\overrightarrow{b}$*.*

Démonstration.

Tous ces points se prouvent à partir de la définition. (exercice)
Dans l'égalité $\left\|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right\| = \left\|\overrightarrow{a}\right\| \left\|\overrightarrow{b}\right\| \sin\theta$, le sinus est toujours positif car l'angle θ est, par définition, entre 0 et π. $\square$

Interprétation graphique



Le produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est un vecteur orthogonal au plan formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Sa norme:

$$\left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\| = \left\|\vec{a}\right\| \left\|\vec{b}\right\| \sin\alpha$$

est égale à l'aire du parallélogramme formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.