

# Le produit vectoriel

## Définition

Soient  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$  deux **vecteurs**. On définit leur *produit vectoriel* comme le vecteur dont les composantes sont les suivantes:

$$\vec{a} \times \vec{b} := \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

En particulier,  $\vec{a} \times \vec{b}$  est encore un vecteur. (D'où le nom produit « vectoriel »).

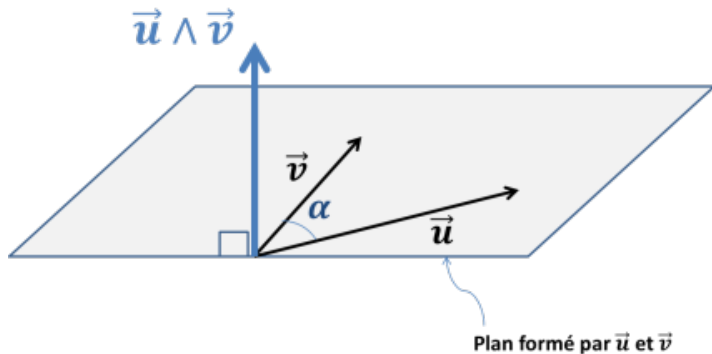
Le produit vectoriel est donc une application

$$\cdot \times \cdot : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (\vec{a}, \vec{b}) \mapsto \vec{a} \times \vec{b}.$$

## Remarque

Le produit vectoriel est parfois noté  $\vec{a} \wedge \vec{b}$  au lieu de  $\vec{a} \times \vec{b}$ . Il n'est bien défini **que pour des vecteurs de  $\mathbb{R}^3$** .

## Interprétation graphique



Le **produit vectoriel** de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est un vecteur orthogonal au plan formé par  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ . Sa norme:

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \alpha$$

est égale à l'aire du parallélogramme formé par  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

## Produit vectoriel et vecteur colinéaires de $\mathbb{R}^3$

### Définition

On dit que deux vecteurs  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  **non nuls** de  $\mathbb{R}^3$  sont **colinéaires** si il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que

$$\vec{v} = \lambda \vec{w}.$$

Une convention: le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

L'intérêt du produit vectoriel est de **détecter les vecteurs colinéaires**:

### Résultat

*Soient  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  des vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ . Alors  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont colinéaires si et seulement si  $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$ .*

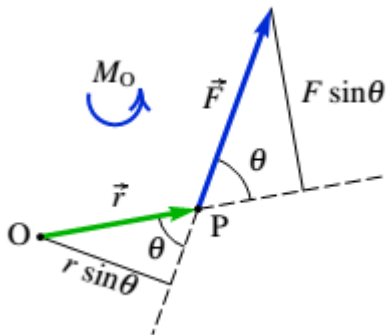
### Démonstration.

On utilise:  $\|\vec{v} \times \vec{w}\| = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \sin \theta$ , où  $\theta$  est l'angle entre  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$ .  
Mais  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont colinéaires si et seulement si  $\theta = 0$  ou  $\theta = \pi$ , et pour ces valeurs  $\sin(\theta) = 0$ . □

## À quoi sert le produit vectoriel?

Le produit vectoriel mesure le moment d'une force qui s'exerce sur un solide.

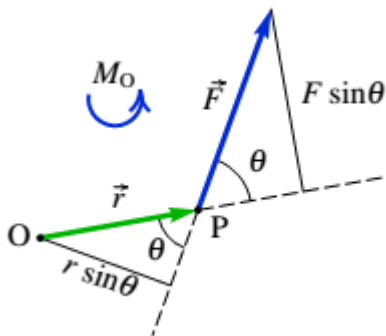
Plus précisément: soit un objet qui pivote autour d'un point  $O$  et une force  $\vec{F}$  s'exerçant sur le solide en un point  $P$ .



Le moment cinétique de  $\vec{F}$  est donné par:

$$\vec{M} = \vec{OP} \times \vec{F}.$$

Il mesure la capacité de la force à mettre le solide en rotation autour de  $O$ .



$$\vec{M} = \vec{OP} \times \vec{F}.$$

Plus la norme du moment est élevée, plus la force fait pivoter le solide autour du point  $O$ . Comme:

$$\|\vec{M}\| = OP \cdot \|\vec{F}\| \sin(\theta),$$

à intensité égale une force produit plus d'effets si elle est exercée **loin du centre de rotation**.

# Contenu de la section

**Équations et systèmes**

Systemes d'équations

Lien avec les équations cartésiennes

Distances

## Définition

Une *équation* est une égalité faisant intervenir une ou plusieurs quantités inconnues.

Résoudre une équation revient à déterminer l'ensemble des valeurs possibles pour la quantité inconnue de sorte que l'égalité soit vérifiée. Ces valeurs sont *les solutions de l'équation*.

Dans une de ses formes les plus simples, une équation fait intervenir une unique quantité inconnue : un nombre réel. La « quantité inconnue » (ou simplement « inconnue ») est souvent nommée  $x$ , mais ce nom n'a rien de magique.

## Exemple

- ▶ L'équation  $2x - 3 = 1$  a pour seule solution :  $x = 2$ .
- ▶ L'équation  $t^2 - 1 = 0$  (dont l'inconnue est  $t$ ) a pour solutions :  $t = 1$  et  $t = -1$ . On peut écrire que l'ensemble des solutions est  $S = \{-1, 1\}$ .
- ▶ L'équation  $\sin(x) = 0$  a pour solution  $x = 0$ , mais il y en a d'autres. Par exemple  $x = \pi$ . En fait, l'ensemble des solutions est formé de l'ensemble des multiples entiers de  $\pi$ . On peut noter  $S = \{k\pi \text{ t.q. } k \in \mathbb{Z}\}$ .
- ▶ L'équation  $x^2 + 1 = 0$  n'a pas de solution dans les nombres réels, car tout réel pris au carré est positif, donc  $x^2 + 1$  ne peut jamais être égal à 0. L'ensemble des solutions est donc vide. On peut noter  $S = \emptyset$ .



Une équation peut faire intervenir plusieurs inconnues. Dans ce cas, **une solution** est la donnée d'une valeur pour chaque inconnue.

### Exemple

L'équation  $x^2 + y^2 = 0$  (dont les inconnues sont  $x$  et  $y$ ) a une solution :  $x = y = 0$ . Il n'y en a pas d'autres. On peut noter  $S = \{(0,0)\}$ .

Dans l'exemple ci-dessus, il y avait une équation, deux inconnues, mais une seule solution. C'est rare. Généralement **une seule** équation avec **deux ou plus inconnues** possède **une infinité de solutions**.

### Exemple

L'équation  $x + y^2 = 0$  possède une infinité de solutions : pour chaque nombre réel  $r$ , les valeurs  $y = r$  et  $x = -r^2$  fournissent une solution. On peut noter  $S = \{(-r^2, r) \text{ t.q. } r \in \mathbb{R}\}$ .

# Contenu de la section

Équations et systèmes

**Systèmes d'équations**

Lien avec les équations cartésiennes

Distances

Lorsqu'il y a plusieurs inconnues, il peut arriver qu'il y ait également plusieurs équations. On parle alors de *système d'équations*.

### Exemple

Considérons le système d'équations suivant, dont les inconnues sont  $(x,y)$ :

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

Les solutions sont  $x = 2$  et  $y = -1$ . Il y a une unique solution.

## Exemple

Considérons le système d'équations suivant, dont les inconnues sont  $(x,y)$ :

$$\begin{cases} x - y^2 = 1 \\ x + y^2 = 3 \end{cases}$$

En résolvant, on trouve  $x = 2$  et  $y^2 = 1$ . Dès lors il y a deux possibilités :

- ▶ Soit  $x = 2$  et  $y = 1$ ,
- ▶ soit  $x = 2$  et  $y = -1$ .

Il y a donc ici deux solutions:  $(2,1)$  et  $(2, -1)$ .

# Contenu de la section

Équations et systèmes

Systèmes d'équations

**Lien avec les équations cartésiennes**

Distances

## Droites du plan

### Équation cartésienne

Une droite de  $\mathbb{R}^2$  passant par  $\mathbf{p}$  dans la direction  $\vec{v}$  est l'ensemble des points  $(x_1, x_2)$  vérifiant

$$(x_1 - p_1)v_2 = (x_2 - p_2)v_1$$

ou encore

$$ax_1 + bx_2 + c = 0$$

pour  $a = v_2, b = -v_1, c = p_2v_1 - p_1v_2$ , c'est-à-dire

$$a(x_1 - p_1) + b(x_2 - p_2) = 0$$

pour  $a = v_2, b = -v_1$ . On réécrit ça comme

$$\langle \vec{n}, \mathbf{x} - \mathbf{p} \rangle = 0$$

pour  $\vec{n} = (a, b) = (v_2, -v_1)$ .

En d'autres termes,  $\vec{n}$  est un vecteur perpendiculaire (on dit « vecteur normal ») à la droite. Ecrire  $\langle \vec{n}, \mathbf{x} - \mathbf{p} \rangle = 0$  est une manière de retrouver l'équation de la droite!

## Plans dans l'espace

### Équation vectorielle

Soient  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  deux vecteurs **non-colinéaires** (ce qui signifie:  $\vec{v} \times \vec{w} \neq \mathbf{0}$ ). Un plan passant par le point  $\mathbf{p}$  dans les directions des vecteurs  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  est l'ensemble des points  $\mathbf{x}$  de la forme

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\vec{v} + s\vec{w}.$$

lorsque  $s, t \in \mathbb{R}$ . Les vecteurs  $\vec{v}, \vec{w}$  sont les vecteurs directeurs du plan.

### Équations paramétriques

Un plan est l'ensemble des points  $(x_1, x_2, x_3)$  de la forme

$$x_1 = p_1 + tv_1 + sw_1$$

$$x_2 = p_2 + tv_2 + sw_2$$

$$x_3 = p_3 + tv_3 + sw_3$$

pour certains réel  $s$  et  $t$ .

## Équation cartésienne

Un plan consiste en les points  $(x_1, x_2, x_3)$  vérifiant

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$$

pour certaines constantes  $a, b, c, d$ . De manière équivalente :

$$a(x_1 - p_1) + b(x_2 - p_2) + c(x_3 - p_3) = 0$$

où  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$  est un point du plan.

## Équation cartésienne, version 2

Un plan passant par  $\mathbf{p}$  est l'ensemble des points  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  vérifiant

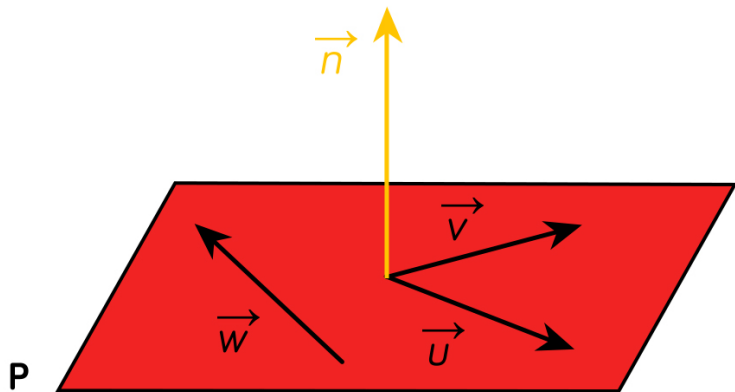
$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, \vec{n} \rangle = 0$$

pour un certain vecteur  $\vec{n} = (a, b, c)$  : le **vecteur normal** (pour dire « perpendiculaire »).

## Résultat

*Si  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  et  $\vec{w}$  sont deux vecteurs directeurs, alors leur produit vectoriel est un vecteur normal.*





## Un exercice d'application

### Question

Quelle est l'équation du plan  $(P)$  de  $\mathbb{R}^3$  passant par  $a = (1,4,2)$  et perpendiculaire à la droite passant par les points  $b = (1,2,-1)$  et  $c = (1,1,1)$ ?

### Réponse

**Étape 1:** on calcule un vecteur directeur de la droite  $(bc)$ , qui sera donc un **vecteur normal** au plan. Par exemple le vecteur  $\overrightarrow{bc}$ :

$$\overrightarrow{bc} = \mathbf{c} - \mathbf{b} = (0, -1, 2).$$

**Étape 2:** Un point  $\mathbf{p} = (x,y,z)$  appartient au plan  $(P)$  si et seulement si  $\overrightarrow{ap}$  est orthogonal au vecteur  $\overrightarrow{bc}$ : c'est-à-dire si et seulement si

$$\langle (x-1, y-4, z-2), (0, -1, 2) \rangle = 0.$$

Ceci donne l'équation:  $-y + 2z = 0$ , soit:

$$y = 2z.$$

# Contenu de la section

Équations et systèmes

Systèmes d'équations

Lien avec les équations cartésiennes

**Distances**

# Projection Orthogonale

## Définition

La **projection orthogonale** d'un vecteur  $\vec{v}$  sur un vecteur  $\vec{w}$  est donnée par

$$\vec{p} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{w}\|^2} \vec{w}.$$

La projection orthogonale de  $\vec{v}$  sur  $\vec{w}$  est l'unique vecteur  $\vec{p}$  de la forme  $\vec{p} = k \vec{w}$  tel que  $\vec{v} - \vec{p}$  est orthogonal à  $\vec{w}$ .

Preuve de la remarque.

Soit  $\vec{p} = k \vec{w}$  pour un certain  $k$ .

On écrit que  $\vec{v} - \vec{p}$  est orthogonal à  $\vec{w}$  et la valeur de  $k$  en découle :

$$\langle \vec{v} - \vec{p}, \vec{w} \rangle = 0 \iff \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle k \vec{w}, \vec{w} \rangle = k \|\vec{w}\|^2$$



## Distances point-droite et point-plan

Nous savons que la distance entre deux points  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{q}$  dans  $\mathbb{R}^n$  est la norme  $\|\mathbf{q} - \mathbf{p}\|$ . Notons  $d(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  cette quantité.

### Définition

Soit  $\mathbf{p}$  un point de  $\mathbb{R}^n$  et  $E$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  (par exemple une droite de  $\mathbb{R}^n$  ou un plan). La *distance entre le point  $\mathbf{p}$  et  $E$*  est

$$d(\mathbf{p}, E) := \min \{d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \text{ t.q. } \mathbf{q} \in E\}.$$

Autrement dit: on regarde tous les points  $\mathbf{q}$  de  $E$ , on calcule leur distance à  $\mathbf{p}$ , et on garde la plus petite de ces distances.

## Distance point-droite

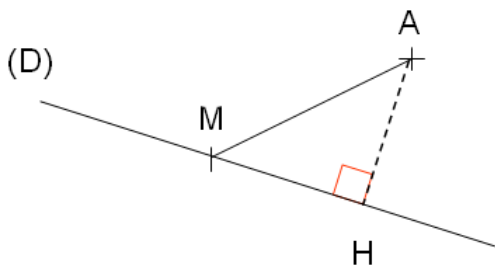
### Résultat

La distance entre le point  $\mathbf{p}$  et la droite passant par  $\mathbf{q}$  de vecteur directeur  $\vec{v}$  est donnée par

$$\|\mathbf{q} - \mathbf{p}\|^2 - \frac{\left(\langle (\mathbf{p} - \mathbf{q}), \vec{v} \rangle\right)^2}{\|\vec{v}\|^2}.$$

Le point de la droite réalisant ce minimum est donné par la projection orthogonale  $\mathbf{p}'$  de  $\mathbf{p}$  sur la droite :

$$\mathbf{p}' = \mathbf{q} + \frac{\langle (\mathbf{p} - \mathbf{q}), \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v}.$$



### Démonstration.

Trouver le minimum de la distance revient à trouver le minimum du carré de la distance et puis à *en prendre la racine carrée*; donc il faut trouver le minimum de  $f$  définie par  $f(t) = \|\mathbf{q} + t\vec{v} - \mathbf{p}\|^2$ , ceci car tout point de la droite s'écrit  $\mathbf{q} + t\vec{v}$  avec  $t \in \mathbb{R}$ . Or

$$f(t) = \|\mathbf{q} - \mathbf{p}\|^2 + 2t \langle (\mathbf{q} - \mathbf{p}), \vec{v} \rangle + t^2 \|\vec{v}\|^2$$

est un polynôme du second degré en  $t$  dont le minimum se calcule facilement. □

## Et avec un vecteur normal?

### Résultat

La distance entre le point  $\mathbf{p}$  et la droite passant par  $\mathbf{q}$  de vecteur normal  $\vec{n}$  est donnée par

$$\frac{|\langle \vec{n}, (\mathbf{p} - \mathbf{q}) \rangle|}{\|\vec{n}\|}.$$

En d'autres termes, si la droite a pour équation

$$ax + by + c = 0$$

la distance entre cette droite et le point  $\mathbf{p}$  est

$$\frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Cette distance est juste la longueur de la projection orthogonale de  $\vec{pq}$  sur  $\vec{n}$ !



## Résultat

La distance entre le point  $\mathbf{p}$  et le plan de vecteur normal  $\vec{\mathbf{w}} = (a,b,c)$  passant par  $\mathbf{q}$  est donnée par

$$\frac{|\langle \vec{\mathbf{w}}, (\mathbf{p} - \mathbf{q}) \rangle|}{\|\vec{\mathbf{w}}\|}.$$

En d'autres termes, si le plan a pour équation

$$ax + by + cz + d = 0$$

la distance entre ce plan et le point  $\mathbf{p}$  est

$$\frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

## Démonstration.

Le vecteur

$$\frac{\langle \vec{\mathbf{w}}, \mathbf{p} - \mathbf{q} \rangle}{\|\vec{\mathbf{w}}\|^2} \vec{\mathbf{w}}$$

est le projeté de  $\mathbf{p} - \mathbf{q}$  sur la droite normale au plan. □

# Contenu de la section

Fonctions réciproques

# Contenu de la section

Fonctions réciproques

Diagrammes de Venn

Fonctions réciproques

Fonctions trigonométriques réciproques

# Diagrammes de Venn

Si  $A$  et  $B$  sont des ensembles, on définit les trois opérations :

**Intersection**  $A \cap B = \{x \text{ t.q. } x \in A \text{ et } x \in B\}$

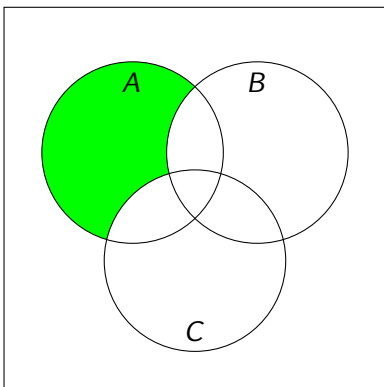
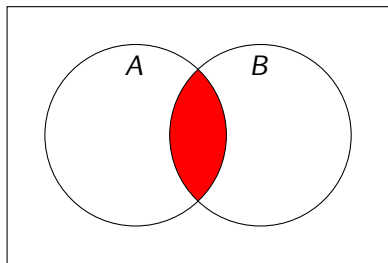
**Union**  $A \cup B = \{x \text{ t.q. } x \in A \text{ ou } x \in B\}$

**Différence**  $A \setminus B = \{x \text{ t.q. } x \in A \text{ et } x \notin B\}$

On peut représenter les opérations sur des diagrammes appelés diagrammes de Venn.

## Exercice

Voici deux diagrammes de Venn :



Que représentent-ils ?

Réponse :  $A \cap B$  et  $A \setminus (B \cup C)$

# Contenu de la section

## Fonctions réciproques

Diagrammes de Venn

Fonctions réciproques

Fonctions trigonométriques réciproques

# Réciproque

## Définition

Une fonction  $f: A \rightarrow B$  est *invertible* si il existe une fonction  $g: B \rightarrow A$  telle que

$$g(f(x)) = x \quad \forall x \in A \quad \text{et} \quad f(g(y)) = y \quad \forall y \in B.$$

La fonction  $g$  est appelée *l'inverse ou la fonction réciproque de  $f$* , et se note  $f^{-1}$ .

## Remarque

**Attention à ne pas confondre  $f^{-1}(x)$  avec  $f(x)^{-1} := 1/f(x)$ !** Par exemple, les fonctions

$$f: \mathbb{R}_0 = \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}_0: x \mapsto x \quad \text{et} \quad g: \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{R}_0: x \mapsto \frac{1}{x}$$

vérifient  $f(x)^{-1} = g(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_0$ , par contre  $f^{-1} = f$  et  $g^{-1} = g$  (exercice facile).

## Résultat

1. Une fonction est inversible si et seulement si c'est une bijection.
2. Si  $g$  est l'inverse de  $f$ , alors  $f$  est l'inverse de  $g$ . En d'autres termes,

$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

## Démonstration.

Si  $f$  est inversible (d'inverse  $g$ ), alors  $f$  est

- ▶ injective car  $f(x) = f(y)$  implique  $x = g(f(x)) = g(f(y)) = y$ .
- ▶ surjective car si  $z \in B$ , alors  $g(z)$  est un antécédent de  $z$ .

Si  $f$  est bijective, alors pour tout  $z \in B$  il existe un (surjectivité) unique (injectivité) antécédent. □



## Graphe de la réciproque

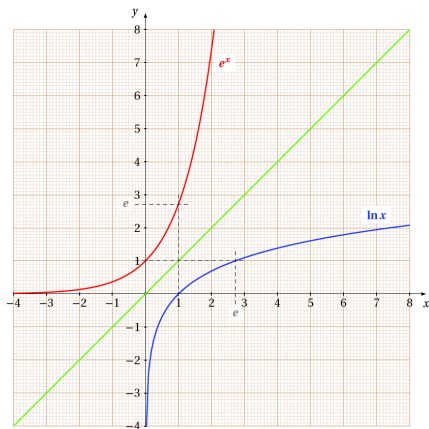
Le résultat précédent montre qu'une fonction  $f : A \rightarrow B$  est inversible si et seulement si pour tout  $y \in B$ , il existe un et un seul  $x \in A$  tel que  $y = f(x)$ . C'est cette valeur de  $x$  qui est notée  $f^{-1}(y)$ . Ou encore:

lorsque  $f$  est inversible,  $y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$ .

Dès lors: si  $f : A \rightarrow B$  est bijective, alors le graphe de sa réciproque  $f^{-1} : B \rightarrow A$  peut s'obtenir en prenant l'image du graphe de  $f$  par une symétrie d'axe  $x = y$ . En effet,

$$\Gamma_{f^{-1}} = \{(y, f^{-1}(y)) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } y \in B\} = \{(f(x), x) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x \in A\}$$

## Exemple: logarithme et exponentielle



$\ln$  (logarithme népérien) est la fonction réciproque de l'exponentielle  $x \mapsto \exp(x)$  car:  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y > 0$ ,

$$\exp(x) = y \iff x = \ln(y).$$

# Contenu de la section

## Fonctions réciproques

Diagrammes de Venn

Fonctions réciproques

Fonctions trigonométriques réciproques

## Arcsinus

La fonction  $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$  possède une réciproque notée :

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

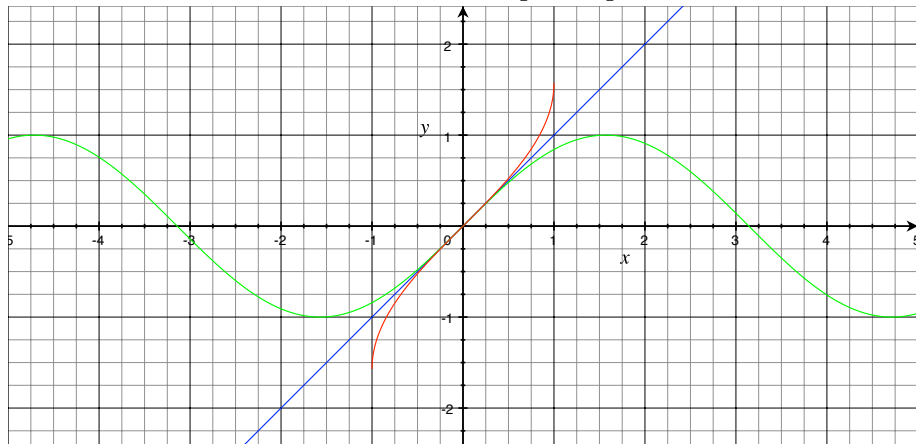
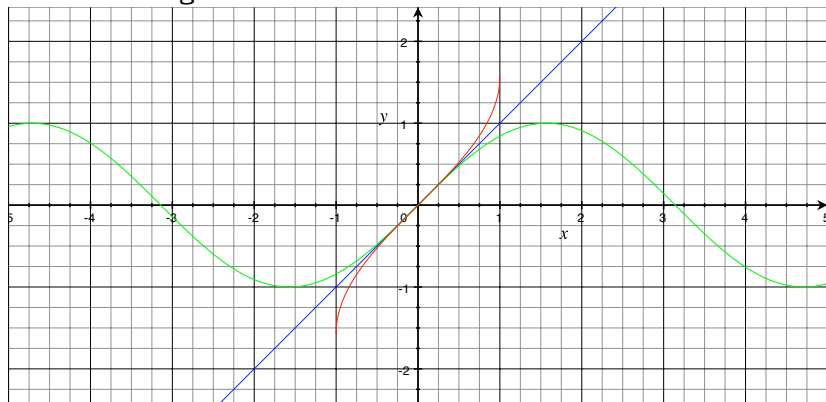


Fig.: Graphes de sin et arcsin

**Attention:** Il est **faux** de dire que  $\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1,1]$  admet une fonction réciproque! La fonction  $\sin$  admet une réciproque **seulement sur un intervalle où elle est inversible**, c'est-à-dire sur un intervalle où tout élément de l'image a exactement un antécédent.



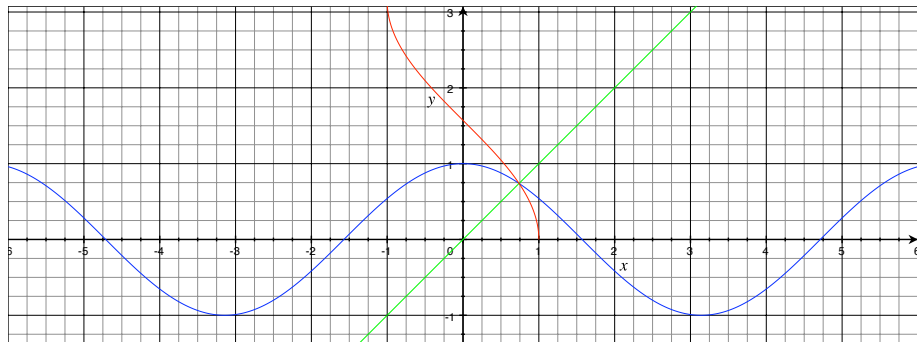
Graphes de  $\sin$  et  $\arcsin$

De la même manière:  $\sin$  n'est pas bijective (= inversible) sur  $[-\pi, \pi]$ !

# Arccosinus

La réciproque de  $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  est

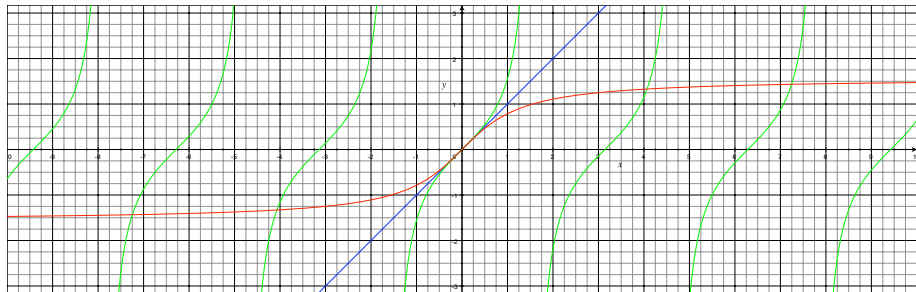
$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$



# Arctangente

La réciproque de  $\operatorname{tg} : ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \rightarrow ]-\infty, \infty[$  est

$$\operatorname{arctg} : ]-\infty, \infty[ \rightarrow ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$



On peut aussi définir la réciproque de  $\operatorname{cotg} : ]0, \pi[ \rightarrow ]-\infty, \infty[$ .

## Contenu de la section

Questions d'examen potentielles



## Exigences pour les examens (interro de Novembre et examen de Janvier)

Le programme de l'examen se base sur:

- ▶ Le contenu du cours (slides en priorité et syllabus en support)
- ▶ Le contenu des séances d'exercices

Ne seront exigées à l'examen que des choses **du même type que celles vues en cours ou en exercices**. L'objectif n'est pas de vous piéger, mais de vérifier que vous avez compris. Précisons:

- ▶ Les questions théoriques de l'examen ne porteront que sur des démonstrations ou des notions **vues en cours**. Si une démonstration/définition est dans le syllabus mais n'a pas été vue en cours, elle ne sera pas demandée.
- ▶ Le contenu des séances d'exercice **est complémentaire au cours et sera exigé à l'examen!** Vous verrez en TP des méthodes (ou applications des résultats du cours) **non vues en cours** qu'il faudra connaître pour l'examen.

# Contenu de la section

Questions d'examen potentielles

Questions théoriques

Exercices-types de l'interro de Novembre

## Exemple de questions théoriques POSSIBLES:

La liste définitive vous sera donnée avant l'examen!

- ▶ Prouver **par récurrence** que  $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ .
- ▶ Démontrer : si  $a < b$  et  $c < d$ , alors  $a + c < b + d$ .
- ▶ Écrire  $[-2,4[ \cup ]-5,1]$  sous forme d'intervalle.
- ▶ De combien de manière peut on disposer  $k$  billes identiques dans deux urnes?
- ▶ Définir la fonction racine carrée de  $x$  et donner son domaine de définition.
- ▶ Définir ce qu'est une fonction croissante; donner un exemple et un contre-exemple)
- ▶ Définir le logarithme d'un nombre  $a$  en base  $b$ . À quelles conditions sur  $a$  et  $b$  ce logarithme existe-t-il?
- ▶ **Donner et prouver** la formule de Cauchy-Schwarz.
- ▶ etc.

# Contenu de la section

## Questions d'examen potentielles

Questions théoriques

Exercices-types de l'interro de Novembre

## Question

Combien de **mots** de 5 lettres peut-on former avec les lettres TUVWXYZ sans utiliser deux fois la même lettre ?

## Réponse

On peut choisir  $\binom{7}{5}$  « tas » de 5 lettres parmi ces 7 lettres TUVWXYZ. Ensuite, chaque « tas » donne  $5!$  mots possibles, car les lettres sont toutes distinctes. Solution:  $5! \cdot \binom{7}{5} = \frac{7!}{2} = 2520$ .

## Question

Que vaut  $\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$ ?

## Réponse

On écrit que:

$$\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$