Contenu de la section

Contenu de la section

Diagrammes de Venn

Si A et B sont des ensembles, on définit les trois opérations :

Intersection $A \cap B = \{x \text{ t.q. } x \in A \text{ et } x \in B\}$

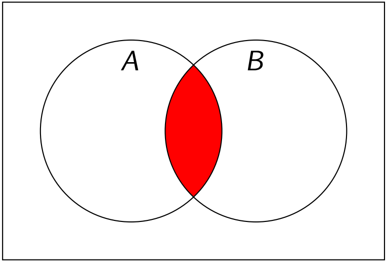
Union $A \cup B = \{x \text{ t.q. } x \in A \text{ ou } x \in B\}$

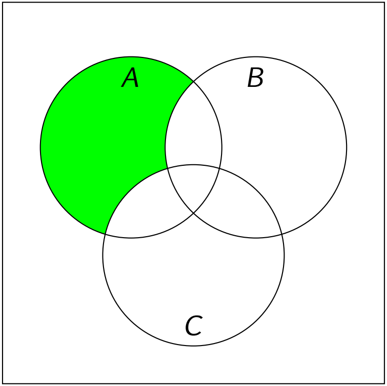
Différence $A \setminus B = \{x \text{ t.q. } x \in A \text{ et } x \notin B\}$

On peut représenter les opérations sur des diagrammes appelés diagrames de Venn.

Exercice

Voici deux diagrammes de Venn :





Que représentent-ils ?

Réponse : $A \cap B$ et $A \setminus (B \cup C)$

Contenu de la section

Réciproque

Définition

Une fonction $f\colon A \to B$ est *inversible* si il existe une fonction $g\colon B \to A$ telle que

$$g(f(x)) = x \quad \forall x \in A \qquad \text{et} \qquad f(g(y)) = y \quad \forall y \in B.$$

La fonction g est appelée *l'inverse* ou la *fonction réciproque* de f, et se note f^{-1}.

Remarque

Attention à ne pas confondre $f^{-1}(x)$ avec $f(x)^{-1} := 1/f(x)$! Par exemple, les fonctions

$$f : \mathbb{R}_0 = \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}_0 : x \mapsto x \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}_0 : x \mapsto \frac{1}{x}$$

vérifient $f(x)^{-1} = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_0$, par contre $f^{-1} = f$ et $g^{-1} = g$ (exercice facile).

Résultat

1. *Une fonction est inversible si et seulement si c'est une bijection.*
2. *Si g est l'inverse de f, alors f est l'inverse de g. En d'autres termes,*

$$\left(f^{-1}\right)^{-1} = f.$$

Démonstration.

Si f est inversible (d'inverse g), alors f est

- injective car $f(x) = f(y)$ implique $x = g(f(x)) = g(f(y)) = y$.
- surjective car si $z \in B$, alors $g(z)$ est un antécédent de z.

Si f est bijective, alors pour tout $z \in B$ il existe un (surjectivité) unique (injectivité) antécédent. $\square$

Graphe de la réciproque

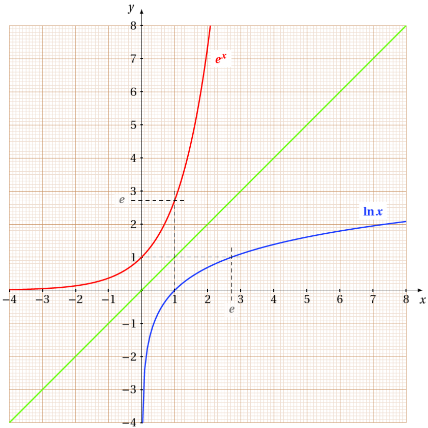
Le résultat précédent montre qu'une fonction $f : A \to B$ est inversible si et seulement si pour tout $y \in B$, il existe un et un seul $x \in A$ tel que $y = f(x)$. C'est cette valeur de x qui est notée $f^{-1}(x)$. Ou encore:

$$\text{lorsque } f \text{ est inversible,} \quad y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

Dès lors: si $f : A \to B$ est bijective, alors le graphe de sa réciproque $f^{-1} : B \to A$ peut s'obtenir en prenant l'image du graphe de f par une symétrie d'axe $x = y$. En effet,

$$\Gamma_{f^{-1}} = \{(y, f^{-1}(y)) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } y \in B\} = \{(f(x), x) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x \in A\}$$

Exemple: logarithme et exponentielle



ln (logarithme népérien) est la fonction réciproque de l'exponentielle $x \mapsto \exp(x)$ car: $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y > 0$,

$$\exp(x) = y \iff x = \ln(y).$$

Contenu de la section

Arcsinus

La fonction sin : $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ possède une réciproque notée :

$$\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

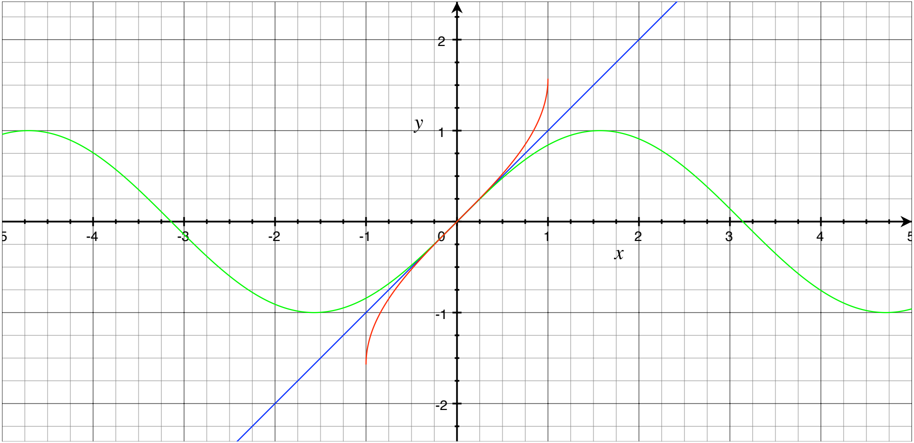
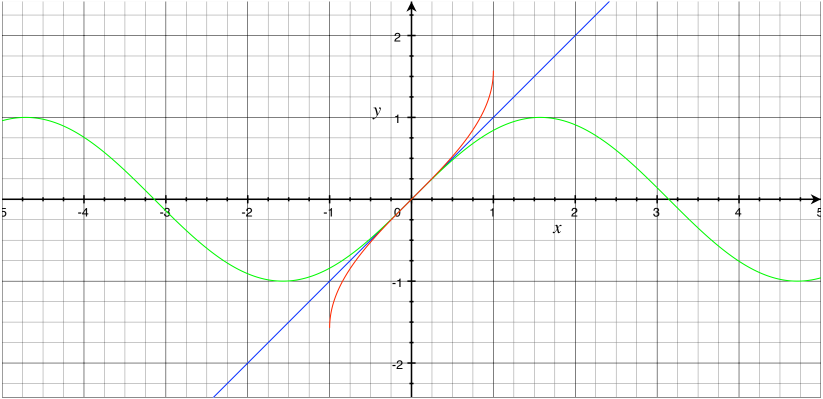


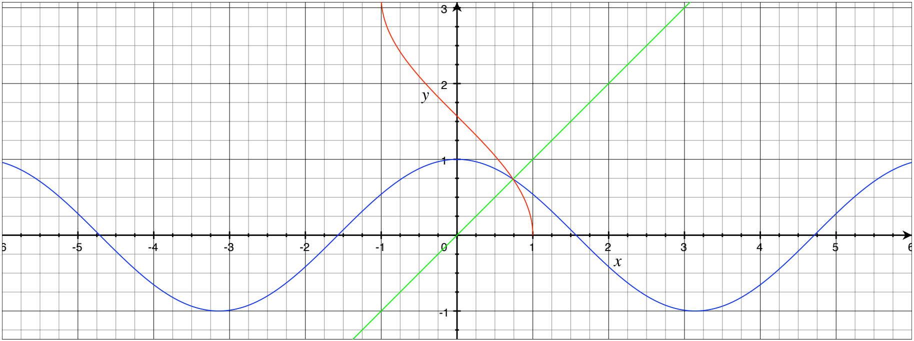
FIG.: Graphes de sin et arcsin

Attention: Il est faux de dire que $\sin : \mathbb{R} \to [-1,1]$ admet une fonction réciproque! La fonction sin admet une réciproque seulement sur un intervalle où elle est inversible, c'est-à-dire sur un intervalle où tout élément de l'image a exactement un antécédent.



Graphes de sin et arcsin

Arccosinus



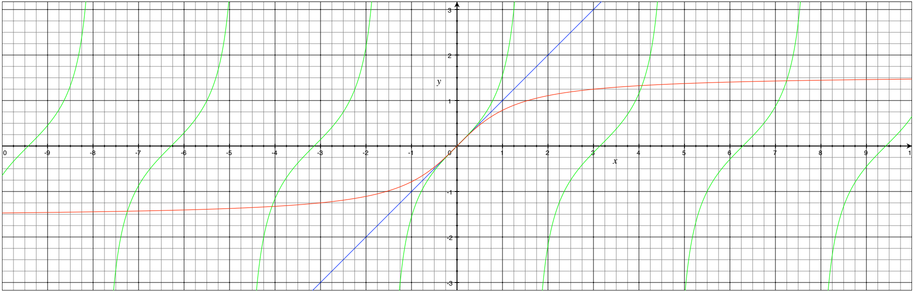
La réciproque de $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ est:

$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$$

Arctangente

La réciproque de $\mathrm{tg} : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to]-\infty, \infty[$ est

$$\mathrm{arctg} :]-\infty, \infty[\to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$



On peut aussi définir la réciproque de $\mathrm{cotg} :]0, \pi[\to]-\infty, \infty[$.

Contenu de la section

Fonctions réelles

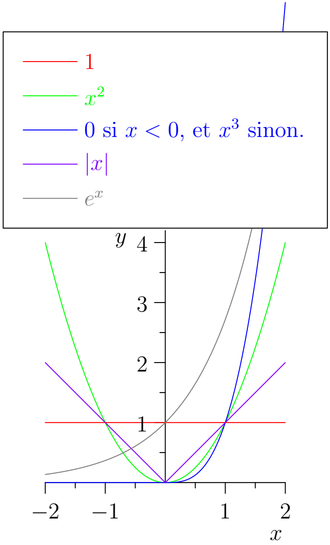
Motivation

Exemple

Voici quelques fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, qui à x associent :

- 1
- x^2
- $\exp x$
- 0 si $x < 0$, x^3 sinon.
- $|x|$
- 1 si $x \in \mathbb{Q}$ et 0 sinon.

et voici les graphes de ces fonctions (sauf la dernière.)



Motivation, suite

Certaines fonctions sont plus agréables que d'autres.

- Comment les caractériser ?
- Comment les trouver ?
- Quelles sont leurs propriétés qui les rendent « agréables »?

Nous décrirons plusieurs classes de fonctions « agréables » :

- continue
- dérivable
- C^∞ (lire « C infinie »)

Contenu de la section

Distances

Rappel

La distance entre deux réels quelconques x et y est $|x-y|$.

Si $\delta > 0$, dire que $|x-y| < \delta$ revient donc à dire que la distance entre x et y est inférieure à δ.

On a les équivalences suivantes :

$$|x-y| < \delta \iff y \in \,]x-\delta, x+\delta[\iff x-\delta < y < x+\delta$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Dans la définition de limite on écrira souvent:

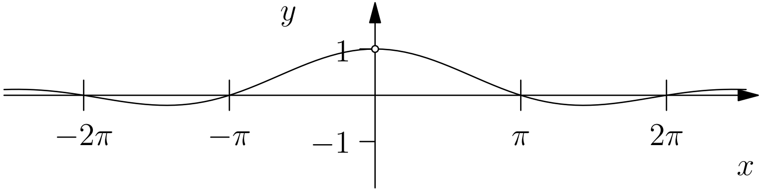
$$|x-y| < \delta, \quad y \neq x.$$

Ceci signifie que

$$y \in \,]x-\delta, x+\delta[\setminus\{x\} =]x-\delta, x[\cup]x, x+\delta[.$$

Idée intuitive de limite 1

Considérons la fonction $f : \mathbb{R}_0 = \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$. Son graphe est :



La valeur $f(0)$ n'est a priori pas définie car 0 n'est pas dans le domaine, car $\frac{0}{0}$ n'a aucun sens.

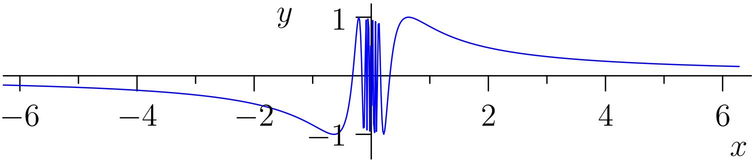
Mais on a quand même envie de dire que $f(0) = 1$!
À la place, on dira:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1,$$

et on va définir cela rigoureusement maintenant.

Idée intuitive de limite 2

Considérons la fonction $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin(1/x)$. Son graphe est :



La valeur $f(0)$ n'a aucun sens car 0 n'est pas dans le domaine (car $\frac{1}{0}$ n'a aucun sens).

Quelle valeur a-t-on envie que $f(0)$ prenne ? Aucune! Lorsque x s'approche de 0 (disons par les nombres positifs), $\frac{1}{x}$ prend des valeurs de plus en plus grandes. Comme sin est 2π périodique, la fonction $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ oscille de plus en plus vite!

À la place on dira que $\lim_{x\to 0} f(x)$ n'existe pas.

Définition de limite

Définition

Soit $f : A \to \mathbb{R}$ où $A \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $a \in \mathbb{R}$.
Un nombre réel L est la *limite de f en a* si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in A, |x - a| < \delta, x \neq a \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Si L est la limite de f en a, on écrit

$$\lim_{x \to a} f(x) = L. \tag{3.7}$$

On dit aussi que la limite (de f en a) existe et vaut L.

Définition

S'il n'existe pas de $L \in \mathbb{R}$ tel que L est la limite de f en a est L, on dit que la limite de f en a n'existe pas (dans $\mathbb{R}$).

Résultat

Quand la limite de f en a existe, elle est unique!

Définition

Ré-écrivons la définition:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in A, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Remarque

L'ordre des quantificateurs « pour tout » et « il existe » est essentiel! On choisit d'abord une précision ϵ qui contrôle les valeurs de la fonction et puis ensuite un rayon δ adapté à cette précision. Au plus ϵ est petit, au plus il faudra choisir le rayon δ petit.

[Faites un dessin!]

La définition de limite est essentiellement :

$$\text{Si } x \approx a \text{ (mais } x \neq a\text{) alors } f(x) \approx L.$$

Limites restreintes

Définition

Si on ne s'intéresse qu'à certaines valeurs de x, on écrira

$$\lim_{\substack{x \to a \\ \text{condition sur } x}} f(x) = L$$

Ce qui signifie:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \ : \forall x \in A, \begin{cases} |x-a| < \delta, x \neq a \text{ et} \\ \text{condition sur } x \end{cases} \implies |f(x) - L| < \epsilon.$$

Exemple

Les limites « à droite » et « à gauche » sont les suivantes :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$$

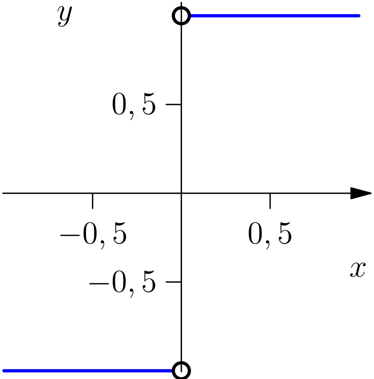
Si f est définie sur un intervalle $]a,b[$ (par exemple: $]0,1[$), les limites épointées permettent de parler de limite en 0 (ou en 1).

Exemple de limites à gauche et à droite qui sont différentes

Exemple

La limite lorsque $x \to 0$ de $|x|/x$ n'existe pas, mais

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{|x|}{x} = -1 \qquad\qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{|x|}{x} = 1$$



Un exemple

Question

Montrez que

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x} = 0.$$

en utilisant la définition.

Déjà: est-ce que ça vous paraît normal?

Réponse

Soit > 0. Pour montrer que la définition s'applique, il faut montrer qu'il existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tel que

$$|x - 0| < \delta \Longrightarrow |\sqrt{x} - 0| < \epsilon$$

pour $x > 0$. **Comment choisir ce δ explicitement en termes de ϵ?**
On choisira juste $\delta = \epsilon^2$ Car

$$|x - 0| < \epsilon^2 \Longrightarrow x < \epsilon^2 \Longrightarrow \sqrt{x} < \epsilon \Longrightarrow |\sqrt{x} - 0| < \epsilon$$

Contenu de la section

Notion de limite infinie

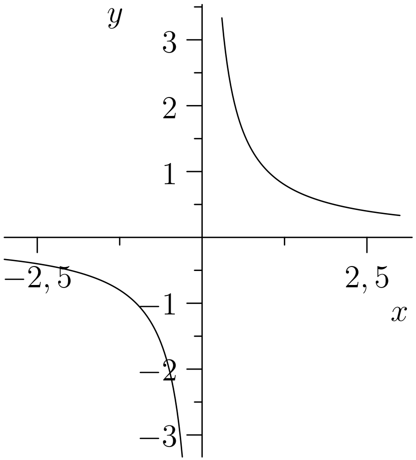
On est souvent amenés à observer l'évolution d'une grandeur naturelle, notée $Q(t)$ sur un intervalle de temps très grand. Parfois les valeurs de cette grandeur $Q(t)$ se stabilisent lorsque le temps devient très grand (par exemple: la batterie de votre téléphone se vide!) ou deviennent de plus en plus proches d'une valeur L donnée au fur et à mesure que le temps augmente.

On aurait alors envie de dire que, lorsque le temps t, « devient infini », $Q(t)$ « tend vers L quand t tend vers l'infini.

De même: si $Q(t)$ devenait de plus en plus grande, on aurait envie de dire que « $Q(t)$ tend vers l'infini ». On va formaliser ces deux notions maintenant.

Sur le graphe de cette fonction, on veut

- écrire $L = \pm\infty$ en 0
- étudier les cas $a = \pm\infty$



Remarque

La définition de limite va rester essentiellement :

$$\text{Si } x \approx a \text{ alors } f(x) \approx L.$$

Sauf que a ou L seront exprimés avec l'infini (de manière rigoureuse!).

Remarque

Chaque utilisation du symbole ∞ s'accompagne d'une nouvelle définition ! L'infini n'intervient pas comme un cas particulier de ce qu'on a vu précédemment.

À titre d'illustration on va traiter les limites valant $-\infty$ (en un point a et en $\pm\infty$).

Définition

Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, A un intervalle borné et a un point (ou une extrémité) de A.
On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ pour x tendant vers a si

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in A, |x-a| < \delta, x \neq a, \Rightarrow f(x) < -M$$

on note cette situation

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

Définition

Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction réelle dont le domaine n'est pas majoré.
On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ pour x tendant vers $+\infty$ si

$$\forall M > 0, \exists N > 0 : \forall x \in A, x > N \Rightarrow f(x) < -M$$

on note cette situation

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$$

Remarque

Autrement dit: quelle que soit la valeur $-M$ choisie (avec M qu'on imagine grand), lorsque x devient suffisamment grand les valeurs de $f(x)$ restent en-dessous de $-M$.

Les autres cas de limite infinie / à l'infini s'approchent de la même façon.

Contenu de la section

Résultat

Si les deux limites, $\lim_{x\to a} f(x)$ *et* $\lim_{x\to a} g(x)$ *existent dans* $\mathbb{R}$*, alors* $\lim_{x\to a} [f(x)+g(x)]$*,* $\lim_{x\to a} cf(x)$*,* $\lim_{x\to a} [f(x)-g(x)]$ *et* $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$ *existent aussi et on a*

$$\lim_{x\to a} [f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a} cf(x) = c \lim_{x\to a} f(x), \forall c \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to a} [f(x)-g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x)$$

Si, de plus $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ *alors* $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ *existe et on a*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

Composition de limites

Résultat

Soit une fonction composée $g \circ f$. Si on sait que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ et que $\lim_{y \to L} g(y)$ existe, alors $\lim_{x \to a} g(f(x))$ existe et on a

$$\lim_{x \to a} g(f(x)) = \lim_{y \to L} g(y)$$

Exemple

On admet pour l'instant que $\sin x/x$ tend vers 1 en 0.
Alors

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{x} = 3\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{3x} = 3\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 3$$

Ici on a posé: $t = 3x$.

Remarque

En d'autres termes, on peut poser t = fonction de x, et remplacer tous les x par des t, et considérer la limite pour t.

Exemple

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sin(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

où on a posé ici:

$$t = x^2 - 1$$

Et $t \to 0$ lorsque $x \to 1$.

Contenu de la section

Résultat

Les règles de calcul précédentes restent valables, sans modification, si on prend $a = +\infty$ ou $a = -\infty$. (Limite en $\pm\infty$)

Résultat

Lorsque les limites valent $\pm\infty$, chacune des « égalités » suivante est un résultat qui se démontre :

$$
\begin{aligned}
(+\infty) + (+\infty) &= +\infty \\
(-\infty) + (-\infty) &= -\infty \\
c \cdot (\pm\infty) &= \begin{cases} \pm\infty & si\ c > 0 \\ \mp\infty & si\ c < 0 \text{ (! changement de signe.)} \end{cases} \\
\infty \cdot \infty &= \infty \\
\infty \cdot (-\infty) &= -\infty \\
(-\infty) \cdot (-\infty) &= \infty
\end{aligned}
$$

En particulier, les « quantités » suivantes n'ont aucun sens a priori :

$$\infty - \infty,\ 0 \cdot \infty,\ 1^{\infty},\ \infty^{0},\ \frac{0}{0} \text{ et } \frac{\infty}{\infty}.$$

Ce sont des *formes indéterminées.*

Exemple

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + x}{x^2 - x} = ?$$

On ne peut pas appliquer la règle de calcul du quotient ! Car c'est une situation du type $\frac{0}{0}$. Il faut écrire :

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + x}{x^2 - x} = \lim_{x \to 0} \frac{x + 1}{x - 1} = \frac{1}{-1} = -1$$

Ici on a remarqué qu'on pouvait diviser en haut et en bas par x! Car $x \neq 0$ par définition.

Exemple

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x}{x^2-x} =?$$

C'est une situation du type

$$\frac{\infty+\infty}{\infty-\infty}$$

On ne peut pas appliquer la règle de calcul du quotient ! Il faut écrire :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+1/x}{1-1/x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+0}{1-0} = 1$$

On a ici divisé par x^2 car on prend la limite lorsque $x \to +\infty$.

Résultat

Pour le quotient, on pourra aussi prendre les conventions suivantes :

$$\frac{L}{0^+} = \begin{cases} +\infty & si\ L > 0 \\ -\infty & si\ L < 0 \end{cases} \qquad \frac{L}{0^-} = \begin{cases} -\infty & si\ L > 0 \\ +\infty & si\ L < 0 \end{cases}$$

$$\frac{\pm\infty}{0^+} = \pm\infty \qquad \frac{\pm\infty}{0^-} = \mp\infty \text{ (changement de signe !)}$$

Remarque

Une limite qui vaut 0^+ signifie que $f(x) \to 0$ pour $x \to a$ et $f(x) > 0$ pour $x \approx a$.

Exemple

La fonction $x \mapsto x$ a une limite nulle en 0. On peut cependant être plus précis et écrire :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} x = 0^- \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} x = 0^+.$$

Avec les règles de calcul étendues ceci donne :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x} = \infty.$$

Contenu de la section

Notation de Landau

Il arrive souvent qu'on ait besoin de comparer des fonctions « sur le long terme ».

Exemple

Deux populations de bactéries peuvent avoir le même nombre d'individus au début, mais leur nombre va-t-il rester comparable tout le temps ? Les deux nombres vont-ils rester du même ordre de grandeur ?

Exemple

Si deux algorithmes pour factoriser le nombre n prennent respectivement $f(n)$ et $g(n)$ secondes, comment savoir lequel est le plus rapide lorsque n devient grand ?

Nous allons voir une définition permettant de comparer ces grandeurs.

Petits et grand O

Définition

Soient $f,g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Supposons qu'il existe $r \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}_0^+$ tels que pour tout $x \in]r, +\infty[$ on a

$$|f(x)| \leq c \cdot |g(x)|$$

On dit alors « f est un $O(g)$ » (prononcer « f est un grand O de g »).

Remarque

Cette notion indique que f/g reste borné. Généralement on compare une fonction f intéressante à une fonction g bien connue. On dira aussi que l'ordre de grandeur de f est inférieur à celui de g.

Exemple

- $10x$ est $O(x)$. En effet, si $x > 0$, on a bien $10x \leq cx$ (par exemple $c = 10$ fonctionne).
- $\sin(x) + x^2$ est en $O(x^2)$ car $\sin(x) + x^2 \leq 1 + x^2 \leq 2x^2$ si $x \geq 1$.
- x est $O(x^2)$ mais x^2 n'est pas $O(x)$.

Résultat

Considérons la limite $\lim_{x\to\infty}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|$.

- *Si elle existe dans* $\mathbb{R}$, *alors* $f(x)$ *est* $O(g(x))$.
- *Si elle est infinie, alors* $f(x)$ *n'est pas* $O(g(x))$.

Dans le premier cas, si la limite existe, c'est que $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|$ reste borné quand $x \to +\infty$. Et donc

$$f(x) = O\Big(g(x)\Big).$$

Exemple

x^n est $O(x^k)$ si et seulement si $n \leq k$. En d'autres termes : x^n est d'un ordre de grandeur inférieur à x^k si et seulement si $n \leq k$.

En effet: on calcule le quotient $\left|\frac{x^n}{x^k}\right| = \left|x^{n-k}\right|$:

- Si $n \leq k$ alors l'exposant $n-k$ est négatif ou nul, donc le quotient tend vers 0 ou 1.
- Si $n > k$, alors l'exposant est strictement positif et donc le quotient tend vers $+\infty$.

« Petit o »

Une définition similaire est la suivante :

Définition

Lorsque $\lim_{x \to \infty} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = 0$, on dit alors que $f(x)$ est $o(g(x))$.

Remarque

Si $g(x)$ tend vers 0 et $f(x)$ est un $o(g(x))$, alors f tend vers 0 plus vite que g !

Exemple

- x^2 est un $o(x^3)$ (pour $x \to \infty$),
- x^3 n'est pas un $o(x^2)$ (pour $x \to \infty$),

Définition

Les définitions de o et O se définissent de la même manière lorsque x tend vers $a \in \mathbb{R}$ ou vers $-\infty$. Il faut alors préciser à chaque fois quelle est la limite pour x !

Exemple

- x^3 est un $o(x^2)$ (pour $x \to 0$),
- x^2 n'est pas un $o(x^3)$ (pour $x \to 0$).

Contenu de la section

Définition

Soit $f : A \to B$ une fonction réelle et $a \in A$. La fonction f est *continue au point a* si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Remarque

Une fonction est continue en a si ses valeurs près de a tendent vers sa valeur en a.

Définition

f est *discontinue au point a* si f n'est pas continue au point a.

Définition

f est *continue (sur son domaine)* si elle est continue en chaque point a de son domaine.

Exemple

Par exemple, la fonction

$$f : \mathbb{R}_0 \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$$

est continue car f est continue en chaque $a \in \mathbb{R}_0 = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Attention, cette fonction n'est pas définie en 0. Donc ça n'a pas de sens de parler de sa continuité en 0!

Exemple

1. Les fonctions suivantes sont continues :
   - $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$, et
   - $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|$
2. La fonction
$$i : \mathbb{R} \to \mathbb{Z} : x \mapsto \lfloor x \rfloor$$
   est discontinue en a pour $a \in \mathbb{Z}$, et continue en a pour $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Leitmotiv: Une fonction est continue si on peut tracer son graphe sans lever le crayon.

Contenu de la section

Soient deux fonctions f et g continues en un point a. Soit $c \in \mathbb{R}$ une constante. Alors

$$f + g \text{ est continue en } a$$

$$cf \text{ est continue en } a$$

$$fg \text{ est continue en } a$$

Si, de plus, $g(a) \neq 0$, alors

$$\frac{f}{g} \text{ est continue en } a.$$

Résultat

Si $f : A \to B$ et $g : C \to D$, avec $A, B, C, D \subset \mathbb{R}$ et $\operatorname{Im} f \subset C$ (de sorte que la composée $g \circ f$ a du sens), si f est continue en a et g est continue en $f(a)$ alors

$$g \circ f \text{ est continue en } a.$$

Remarque

Ces règles de calculs sont des conséquences directes des règles de calculs pour les limites.

Contenu de la section

Théorème (Théorème des bornes atteintes)

Si $f : A \to \mathbb{R}$ est continue alors pour tout $a < b \in A$ il existe u,v deux réels dans $[a,b]$ tels que $f([a,b]) = [f(u),f(v)]$.

Définition

Soit $E \subset \mathbb{R}$ un ensemble. On dit que $m \in \mathbb{R}$ est un majorant de E si $m \geq e$ pour tout $e \in E$.

Théorème (Propriété de la borne supérieure)

Si $E \subset \mathbb{R}$ est majoré, alors il existe un plus petit majorant noté $\sup E$. Similairement si E est minoré, il possède un plus grand minorant noté $\inf E$.

Cette propriété est une propriété fondamentale de l'ensemble des nombres réels, que nous prenons comme axiome (admise sans preuve).

Exemple

Si $A = [0,1[\cup [2,5[$, alors :

$$\inf A = 0 \qquad\qquad \sup A = 5$$

Non vu au cours

Idée de preuve du théorème de la borne atteinte.

Nous n'allons nous intéressons qu'au cas de la borne supérieure. Le cas de la borne inférieure s'en déduit.
Montrons d'abord que $F := f([a,b])$ est majoré. Pour $N > 0$, considérons l'ensemble E_N des éléments $x \in [a,b]$ vérifiant $f(x) \geq N$. Notons que les ensembles E_N diminuent lorsque N augmente. Si E_N est vide pour un certain N, alors N majore F. Sinon, E_N n'est jamais vide, et toujours minoré par a et majoré par b.
Considérons alors l'ensemble E des valeurs $\sup E_N$ pour $N > 0$. Cet ensemble est minoré par a. Considérons donc $c = \inf E$.
Par construction, c est arbitrairement proche de nombres dont l'image est au delà de N, pour tout N. D'un autre côté par continuité, les nombres proches de c ont des images proches de $f(c)$. Ceci fournit une contradiction.

Non vu au cours

Idée de preuve, partie 2.

L'ensemble $F = f([a,b])$ étant majoré, il possède un supremum, notons le s.

Pour $\epsilon > 0$, on s'intéresse maintenant aux ensembles E_ϵ des x tels que $f(x) > s - \epsilon$. Il existe toujours de tels x puisque $s - \epsilon$ n'est pas un majorant de F. Cet ensemble est toujours minoré par a et majoré par b.

On s'intéresse comme précédemment à l'ensemble des nombres $\sup E_\epsilon$, et plus précisément à leur infimum. Ce nombre est le nombre v recherché.

Ceci montre que $f(v)$ est la plus grande valeur prise par f sur $[a,b]$. Similairement on peut démontrer l'existence de u tel que $f(u)$ est la plus petite valeur. Le fait que $f([a,b]) = [f(u),f(v)]$ suivra alors du théorème suivant (de la valeur intermédiaire). □

Exemple

L'image de $[0{,}2\pi]$ par la fonction sinus est $[-1{,}1]$, qu'on peut effectivement ré-écrire $[\sin(3\pi/2), \sin(\pi/2)]$.

Il est intuitivement clair que si le graphe d'une fonction continue « démarre » en dessous d'une droite horizontale et se termine au dessus de cette droite, il doit croiser la droite quelque part. C'est l'objet du résultat suivant :

Théorème (Théorème de la valeur intermédiaire.)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$ strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = \gamma$.

Non vu au cours

Idée de preuve.

Nous supposons que $f(a) < \gamma < f(b)$: le cas $f(b) < f(a)$ se déduit d'arguments similaires.
Considérons
$$S = \{x : x \in [a,b] \text{ et } f(x) < \gamma\}.$$
Cet ensemble S est non-vide puisque $a \in S$ et S est majoré par b. Donc S possède un supremum. Écrivons $c = \sup S$. Évidemment $c \in [a,b]$.
Nous démontrons que $f(c) = \gamma$ en raisonnant par l'absurde :

- Si $f(c) < \gamma$, alors il existe un point x légèrement plus grand que c tel que $f(x)$ est encore plus petit que γ, ce qui contredit le fait que c majore S.
- Si $f(c) > \gamma$, nous voyons qu'en fait $f(x) > \gamma$ à partir d'un point légèrement plus petit que c, ce qui contredit le fait que c est le plus petit majorant de S.

$\square$

Résultat

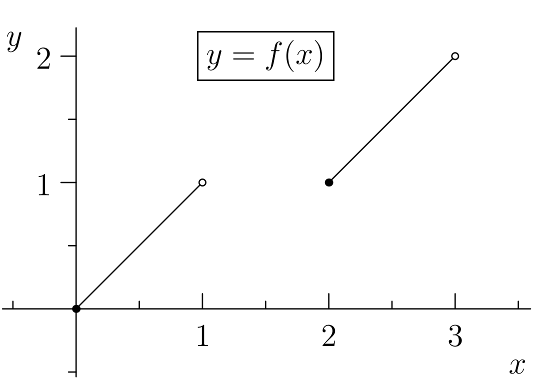
Soit f une fonction réelle bijective définie sur un intervalle. Si f est continue en a, alors sa réciproque est continue en $f(a)$.

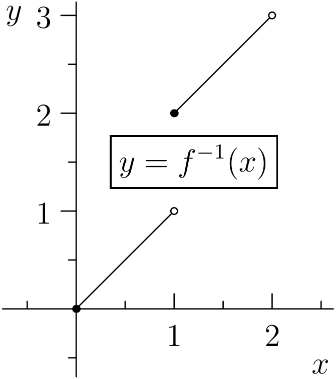
Exemple

Voyons un exemple dont le domaine n'est pas un intervalle. Soit

$$f : [0,1[\cup [2,3[: x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ x-1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors f est continue partout, mais f^{-1} n'est pas continue au point 1. Ci-dessous, la fonction f et la fonction f^{-1} sont représentées :





Contenu de la section

Rappel

Considérons la droite D du plan passant par les points (x,y) et $(x+\Delta x, y+\Delta y)$, avec $\Delta x \neq 0$. Cette droite possède une pente

$$m := \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

qui vaut, lorsque le repère est orthonormé, la tengente de l'angle formé par la droite avec l'horizontale.

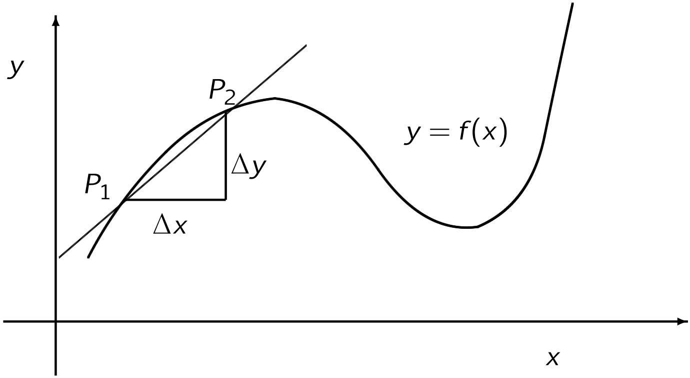
Définition

Soit $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, et soit a un point intérieur à A. Si la limite

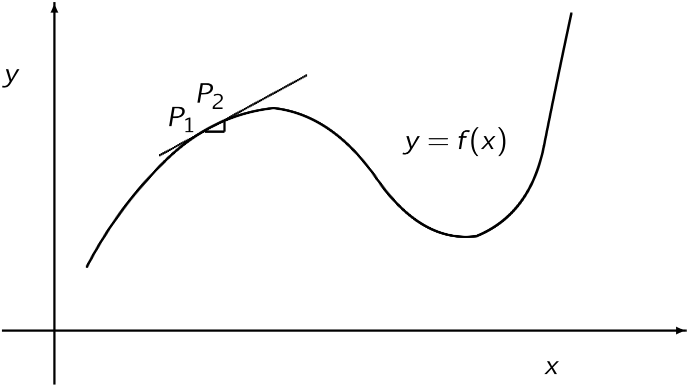
$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe dans $\mathbb{R}$, on appelle cette limite le *nombre dérivé de f en a* et on le note $f'(a)$.

Quand cette limite existe, on dit que f est *dérivable* au point a, ou encore que $f'(a)$ existe.



y
P_2
$y = f(x)$
Δy
P_1
Δx
x


y
P_2
P_1
$y = f(x)$
x

Exemple

Si $f(x) = x^2$, le nombre dérivé de f en a est $2a$

Démonstration.

On remarque que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{(x-a)(x+a)}{x - a} = x + a$$

pour tout $x \neq a$. Dès lors lorsque $x \to a$, la limite vaut bien $a + a = 2a$. □

On notera donc $f'(a) = 2a$, ou $f'(x) = 2x$.

Étant donnée f une fonction, la notion de dérivabilité ci-dessus donne lieu à une nouvelle fonction, notée f' qui à chaque valeur x pour laquelle f est dérivable associe le nombre dérivé de f en x, c'est-à-dire $f'(x)$. Cette fonction f' est appelée la fonction dérivée de f.