Rappel: limites à gauche et à droite

Définition

Soit $f : A \to \mathbb{R}$, A intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ (a est dans A ou c'est une extrémité de A).

Rappel: limites à gauche et à droite

Définition

Soit $f : A \to \mathbb{R}$, A intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ (a est dans A ou c'est une extrémité de A). On dit que la limite à gauche de f en a existe si:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \ : \forall x \in A, \quad a - \delta < x < a \Longrightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Rappel: limites à gauche et à droite

Définition

Soit $f : A \to \mathbb{R}$, A intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ (a est dans A ou c'est une extrémité de A). On dit que la limite à gauche de f en a existe si:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \ : \forall x \in A, \quad a - \delta < x < a \Longrightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

La limite à droite se définit de la même manière avec $a < x < a + \delta$.

Rappel: limites à gauche et à droite

Définition

Soit $f : A \to \mathbb{R}$, A intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ (a est dans A ou c'est une extrémité de A). On dit que la limite à gauche de f en a existe si:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \ : \forall x \in A, \quad a - \delta < x < a \Longrightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

La limite à droite se définit de la même manière avec $a < x < a + \delta$. Dans le cas où les valeurs de $f(x)$ s'approchent de la limite en restant toujours au-dessus (ou en-dessous) on le notera « avec un plus »:

Rappel: limites à gauche et à droite

Définition

Soit $f : A \to \mathbb{R}$, A intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ (a est dans A ou c'est une extrémité de A). On dit que la limite à gauche de f en a existe si:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \ : \forall x \in A, \quad a - \delta < x < a \Longrightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

La limite à droite se définit de la même manière avec $a < x < a + \delta$.
Dans le cas où les valeurs de $f(x)$ s'approchent de la limite en restant toujours au-dessus (ou en-dessous) on le notera « avec un plus »:

Définition

On dit que $\lim_{x \to a} f(x) = L_+$ si

Rappel: limites à gauche et à droite

Définition

Soit $f : A \to \mathbb{R}$, A intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ (a est dans A ou c'est une extrémité de A). On dit que la limite à gauche de f en a existe si:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \ : \forall x \in A, \quad a - \delta < x < a \Longrightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

La limite à droite se définit de la même manière avec $a < x < a + \delta$. Dans le cas où les valeurs de $f(x)$ s'approchent de la limite en restant toujours au-dessus (ou en-dessous) on le notera « avec un plus »:

Définition

On dit que $\lim_{x \to a} f(x) = L_+$ si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ et $f(x) > L$ pour x proche de a.

Rappel: limites à gauche et à droite

Définition

Soit $f : A \to \mathbb{R}$, A intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ (a est dans A ou c'est une extrémité de A). On dit que la limite à gauche de f en a existe si:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \ : \forall x \in A, \quad a - \delta < x < a \Longrightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

La limite à droite se définit de la même manière avec $a < x < a + \delta$.
Dans le cas où les valeurs de $f(x)$ s'approchent de la limite en restant toujours au-dessus (ou en-dessous) on le notera « avec un plus »:

Définition

On dit que $\lim_{x \to a} f(x) = L_+$ si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ et $f(x) > L$ pour x proche de a.

De la même manière, on peut aussi écrire $\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = L_+$, etc...

Exemple

La fonction $x \mapsto x$ a une limite nulle en 0. On peut cependant être plus précis et écrire :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} x = 0^- \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} x = 0^+.$$

Exemple

La fonction $x \mapsto x$ a une limite nulle en 0. On peut cependant être plus précis et écrire :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} x = 0^- \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} x = 0^+.$$

Avec les règles de calcul étendues ceci donne :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x} = \infty.$$

Exemple

La fonction $x \mapsto x$ a une limite nulle en 0. On peut cependant être plus précis et écrire :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} x = 0^- \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} x = 0^+.$$

Avec les règles de calcul étendues ceci donne :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x} = \infty.$$

Remarque

Lorsque la limite de f en a existe, alors les limites à gauche et à droite existent et valent $\lim_{x \to a} f$.

Contenu de la section

Notation de Landau

Il arrive souvent qu'on ait besoin de comparer des fonctions « sur le long terme ».

Notation de Landau

Il arrive souvent qu'on ait besoin de comparer des fonctions « sur le long terme ».

Exemple

Deux populations de bactéries peuvent avoir le même nombre d'individus au début, mais leur nombre va-t-il rester comparable tout le temps ? Les deux nombres vont-ils rester du même ordre de grandeur ?

Notation de Landau

Il arrive souvent qu'on ait besoin de comparer des fonctions « sur le long terme ».

Exemple

Deux populations de bactéries peuvent avoir le même nombre d'individus au début, mais leur nombre va-t-il rester comparable tout le temps ? Les deux nombres vont-ils rester du même ordre de grandeur ?

Exemple

Si deux algorithmes pour factoriser le nombre n prennent respectivement $f(n)$ et $g(n)$ secondes, comment savoir lequel est le plus rapide lorsque n devient grand ?

Nous allons voir une définition permettant de comparer ces grandeurs.

Grands O

Définition

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Supposons qu'il existe $r \in \mathbb{R}$ et $c > 0$ tels que pour tout $x \in]r, +\infty[$ on a

$$|f(x)| \leq c \cdot |g(x)|$$

On dit alors « f est un $O(g)$ » (prononcer « f est un grand O de g »).

Grands O

Définition

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Supposons qu'il existe $r \in \mathbb{R}$ et $c > 0$ tels que pour tout $x \in]r, +\infty[$ on a

$$|f(x)| \leq c \cdot |g(x)|$$

On dit alors « f est un $O(g)$ » (prononcer « f est un grand O de g »).

Remarque

Cette notion indique que f/g reste borné. Généralement on compare une fonction f intéressante à une fonction g bien connue. On dira aussi que l'ordre de grandeur de f est inférieur à celui de g.

Exemple

- $10x$ est $O(x)$. En effet, si $x > 0$, on a bien $10x \leq cx$ (par exemple $c = 10$ fonctionne).

Exemple

- $10x$ est $O(x)$. En effet, si $x > 0$, on a bien $10x \leq cx$ (par exemple $c = 10$ fonctionne).
- Inversement, x est $O(10x)$

Exemple

- $10x$ est $O(x)$. En effet, si $x > 0$, on a bien $10x \leq cx$ (par exemple $c = 10$ fonctionne).
- Inversement, x est $O(10x)$ car $x \leq c10x$ avec $c = \frac{1}{10}$.
- $\sin(x) + x^2$ est en $O(x^2)$ car

Exemple

- $10x$ est $O(x)$. En effet, si $x > 0$, on a bien $10x \leq cx$ (par exemple $c = 10$ fonctionne).
- Inversement, x est $O(10x)$ car $x \leq c10x$ avec $c = \frac{1}{10}$.
- $\sin(x) + x^2$ est en $O(x^2)$ car $\sin(x) + x^2 \leq 1 + x^2 \leq 2x^2$ si $x \geq 1$.

Exemple

- $10x$ est $O(x)$. En effet, si $x > 0$, on a bien $10x \leq cx$ (par exemple $c = 10$ fonctionne).
- Inversement, x est $O(10x)$ car $x \leq c10x$ avec $c = \frac{1}{10}$.
- $\sin(x) + x^2$ est en $O(x^2)$ car $\sin(x) + x^2 \leq 1 + x^2 \leq 2x^2$ si $x \geq 1$.
- x est $O(x^2)$ mais x^2 n'est pas $O(x)$.

Une charactérisation des O

Résultat

Considérons la limite $\lim_{x\to\infty}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|$.

- *Si elle existe dans* $\mathbb{R}$*, alors* $f(x)$ *est* $O(g(x))$.

Une charactérisation des O

Résultat

Considérons la limite $\lim_{x\to\infty}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|$.

- *Si elle existe dans* $\mathbb{R}$, *alors* $f(x)$ *est* $O(g(x))$.
- *Si elle est infinie, alors* $f(x)$ *n'est pas* $O(g(x))$.

Une charactérisation des O

Résultat

Considérons la limite $\lim_{x\to\infty}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|$.

- *Si elle existe dans* $\mathbb{R}$, *alors* $f(x)$ *est* $O(g(x))$.
- *Si elle est infinie, alors* $f(x)$ *n'est pas* $O(g(x))$.

Dans le premier cas, si la limite existe, c'est que $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|$ reste borné quand x devient suffisamment grand.

Une charactérisation des O

Résultat

Considérons la limite $\lim_{x\to\infty}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|$.

- *Si elle existe dans* $\mathbb{R}$*, alors* $f(x)$ *est* $O(g(x))$.
- *Si elle est infinie, alors* $f(x)$ *n'est pas* $O(g(x))$.

Dans le premier cas, si la limite existe, c'est que $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|$ reste borné quand x devient suffisamment grand. Et donc

$$f(x) = O\big(g(x)\big).$$

Exemple

x^n est $O(x^k)$ si et seulement si $n \leq k$.

Exemple

x^n est $O(x^k)$ si et seulement si $n \leq k$. En d'autres termes : x^n est d'un ordre de grandeur inférieur à x^k si et seulement si $n \leq k$.

Exemple

x^n est $O(x^k)$ si et seulement si $n \leq k$. En d'autres termes : x^n est d'un ordre de grandeur inférieur à x^k si et seulement si $n \leq k$.
En effet: on calcule le quotient $\left|\frac{x^n}{x^k}\right| = \left|x^{n-k}\right|$:

- Si $n \leq k$ alors l'exposant $n - k$ est négatif ou nul, donc le quotient tend vers 0 ou 1.

Exemple

x^n est $O(x^k)$ si et seulement si $n \leq k$. En d'autres termes : x^n est d'un ordre de grandeur inférieur à x^k si et seulement si $n \leq k$.

En effet: on calcule le quotient $\left|\frac{x^n}{x^k}\right| = \left|x^{n-k}\right|$:

- Si $n \leq k$ alors l'exposant $n - k$ est négatif ou nul, donc le quotient tend vers 0 ou 1.
- Si $n > k$, alors l'exposant est strictement positif et donc le quotient tend vers $+\infty$.

« Petit o »

Une définition similaire est la suivante :

Définition

Lorsque $\lim_{x\to\infty}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = 0$, on dit alors que $f(x)$ est $o(g(x))$.

« Petit o »

Une définition similaire est la suivante :

Définition

Lorsque $\lim_{x\to\infty}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = 0$, on dit alors que $f(x)$ est $o(g(x))$.

Remarque

- En particulier $f(x)$ est en $O(g(x))$ mais être « peit o » donne plus d'informations (c'est plus fort).

Exemple

« Petit o »

Une définition similaire est la suivante :

Définition

Lorsque $\lim_{x\to\infty}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = 0$, on dit alors que $f(x)$ est $o(g(x))$.

Remarque

- En particulier $f(x)$ est en $O(g(x))$ mais être « peit o » donne plus d'informations (c'est plus fort).
- Si $g(x)$ tend vers 0 et $f(x)$ est un $o(g(x))$, alors f tend vers 0 plus vite que g !

Exemple

« Petit o »

Une définition similaire est la suivante :

Définition

Lorsque $\lim_{x\to\infty}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = 0$, on dit alors que $f(x)$ est $o(g(x))$.

Remarque

- En particulier $f(x)$ est en $O(g(x))$ mais être « peit o » donne plus d'informations (c'est plus fort).
- Si $g(x)$ tend vers 0 et $f(x)$ est un $o(g(x))$, alors f tend vers 0 plus vite que g !

Exemple

- x^2 est un $o(x^3)$ (pour $x \to \infty$)

« Petit o »

Une définition similaire est la suivante :

Définition

Lorsque $\lim_{x\to\infty}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = 0$, on dit alors que $f(x)$ est $o(g(x))$.

Remarque

- En particulier $f(x)$ est en $O(g(x))$ mais être « peit o » donne plus d'informations (c'est plus fort).
- Si $g(x)$ tend vers 0 et $f(x)$ est un $o(g(x))$, alors f tend vers 0 plus vite que g !

Exemple

- x^2 est un $o(x^3)$ (pour $x \to \infty$)
- x^3 n'est pas un $o(x^2)$ (pour $x \to \infty$),

Définition

Les définitions de o et O se définissent de la même manière lorsque x tend vers $a \in \mathbb{R}$ ou vers $-\infty$.

Définition

Les définitions de o et O se définissent de la même manière lorsque x tend vers $a \in \mathbb{R}$ ou vers $-\infty$. Il faut alors préciser à chaque fois quelle est la limite pour x !

Définition

Les définitions de o et O se définissent de la même manière lorsque x tend vers $a \in \mathbb{R}$ ou vers $-\infty$. Il faut alors préciser à chaque fois quelle est la limite pour x !

Exemple

- x^3 est un $o(x^2)$ (pour $x \to 0$),

Définition

Les définitions de o et O se définissent de la même manière lorsque x tend vers $a \in \mathbb{R}$ ou vers $-\infty$. Il faut alors préciser à chaque fois quelle est la limite pour x !

Exemple

- x^3 est un $o(x^2)$ (pour $x \to 0$),

Définition

Les définitions de o et O se définissent de la même manière lorsque x tend vers $a \in \mathbb{R}$ ou vers $-\infty$. Il faut alors préciser à chaque fois quelle est la limite pour x !

Exemple

- x^3 est un $o(x^2)$ (pour $x \to 0$), car
$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{x^3}{x^2}\right| = \lim_{x\to 0}|x| = 0.$$

Définition

Les définitions de o et O se définissent de la même manière lorsque x tend vers $a \in \mathbb{R}$ ou vers $-\infty$. Il faut alors préciser à chaque fois quelle est la limite pour x !

Exemple

- x^3 est un $o(x^2)$ (pour $x \to 0$), car
$$\lim_{x\to 0} \left|\frac{x^3}{x^2}\right| = \lim_{x\to 0} |x| = 0.$$
- x^2 n'est pas un $o(x^3)$ (pour $x \to 0$).

Remarque

Écrire $f(x) = o(1)$ quand $x \to a$ » (ici a peut être fini ou $\pm\infty$) signifie juste:

Définition

Les définitions de o et O se définissent de la même manière lorsque x tend vers $a \in \mathbb{R}$ ou vers $-\infty$. Il faut alors préciser à chaque fois quelle est la limite pour x !

Exemple

- x^3 est un $o(x^2)$ (pour $x \to 0$), car
$$\lim_{x \to 0} \left| \frac{x^3}{x^2} \right| = \lim_{x \to 0} |x| = 0.$$
- x^2 n'est pas un $o(x^3)$ (pour $x \to 0$).
- $(x-1)^3$ est $o((x-1)^2)$ (pour $x \to 1$),

Remarque

Écrire $f(x) = o(1)$ quand $x \to a$ » (ici a peut être fini ou $\pm\infty$) signifie juste:

Définition

Les définitions de o et O se définissent de la même manière lorsque x tend vers $a \in \mathbb{R}$ ou vers $-\infty$. Il faut alors préciser à chaque fois quelle est la limite pour x !

Exemple

- x^3 est un $o(x^2)$ (pour $x \to 0$), car
$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{x^3}{x^2}\right| = \lim_{x\to 0}|x| = 0.$$
- x^2 n'est pas un $o(x^3)$ (pour $x \to 0$).
- $(x-1)^3$ est $o((x-1)^2)$ (pour $x \to 1$),
- $x - a$ est $o(1)$ quand $x \to a$.

Remarque

Écrire $f(x) = o(1)$ quand $x \to a$ » (ici a peut être fini ou $\pm\infty$) signifie juste:

Définition

Les définitions de o et O se définissent de la même manière lorsque x tend vers $a \in \mathbb{R}$ ou vers $-\infty$. Il faut alors préciser à chaque fois quelle est la limite pour x !

Exemple

- x^3 est un $o(x^2)$ (pour $x \to 0$), car
$$\lim_{x \to 0} \left| \frac{x^3}{x^2} \right| = \lim_{x \to 0} |x| = 0.$$
- x^2 n'est pas un $o(x^3)$ (pour $x \to 0$).
- $(x-1)^3$ est $o((x-1)^2)$ (pour $x \to 1$),
- $x - a$ est $o(1)$ quand $x \to a$.

Remarque

Écrire $f(x) = o(1)$ quand $x \to a$ » (ici a peut être fini ou $\pm\infty$) signifie juste:

Définition

Les définitions de o et O se définissent de la même manière lorsque x tend vers $a \in \mathbb{R}$ ou vers $-\infty$. Il faut alors préciser à chaque fois quelle est la limite pour x !

Exemple

- x^3 est un $o(x^2)$ (pour $x \to 0$), car
$$\lim_{x\to 0} \left|\frac{x^3}{x^2}\right| = \lim_{x\to 0} |x| = 0.$$
- x^2 n'est pas un $o(x^3)$ (pour $x \to 0$).
- $(x-1)^3$ est $o((x-1)^2)$ (pour $x \to 1$),
- $x - a$ est $o(1)$ quand $x \to a$.

Remarque

Écrire $f(x) = o(1)$ quand $x \to a$ » (ici a peut être fini ou $\pm\infty$) signifie juste: $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

Contenu de la section

Définition

Soit $f : A \longrightarrow B$ une fonction réelle et $a \in A$. La fonction f est dite *continue au point a* si

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = f(a)$$

Définition

Soit $f : A \longrightarrow B$ une fonction réelle et $a \in A$. La fonction f est dite *continue au point a* si

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = f(a)$$

Remarque

Une fonction est continue en a si ses valeurs près de a tendent vers sa valeur en a.

Définition

Soit $f : A \to B$ une fonction réelle et $a \in A$. La fonction f est dite *continue au point a* si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Remarque

Une fonction est continue en a si ses valeurs près de a tendent vers sa valeur en a.

Définition

f est *discontinue au point a* si f n'est pas continue au point a.

Définition

Soit $f : A \to B$ une fonction réelle et $a \in A$. La fonction f est dite *continue au point a* si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Remarque

Une fonction est continue en a si ses valeurs près de a tendent vers sa valeur en a.

Définition

f est *discontinue au point a* si f n'est pas continue au point a.

Définition

f est *continue (sur son domaine)* si elle est continue en chaque point a de son domaine.

Exemple

Par exemple, la fonction

$$f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$$

est continue car elle est continue en chaque $a \in \mathbb{R}_0 = \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

Exemple

Par exemple, la fonction

$$f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$$

est continue car elle est continue en chaque $a \in \mathbb{R}_0 = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Attention, cette fonction n'est pas définie en 0.

Exemple

Par exemple, la fonction

$$f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$$

est continue car elle est continue en chaque $a \in \mathbb{R}_0 = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Attention, cette fonction n'est pas définie en 0. Donc ça n'a pas de sens de parler de sa continuité en 0!

Exemple

1. Les fonctions suivantes sont continues :

Exemple

1. Les fonctions suivantes sont continues :
    - $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$,

Exemple

1. Les fonctions suivantes sont continues :
   - $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$,
   - $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|$ et

Exemple

1. Les fonctions suivantes sont continues :
   - $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$,
   - $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|$ et
   - $i : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ = x \mapsto \sqrt{x}$

Exemple

1. Les fonctions suivantes sont continues :
   - $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$,
   - $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|$ et
   - $i : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ = x \mapsto \sqrt{x}$
2. La fonction

$$j : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{Z} \\ x \neq 0 \mapsto \dfrac{x}{|x|} \\ 0 \mapsto 0 \end{cases}$$

   est discontinue en 0.

Exemple

1. Les fonctions suivantes sont continues :
   - $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$,
   - $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|$ et
   - $i : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ = x \mapsto \sqrt{x}$
2. La fonction

$$j : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{Z} \\ x \neq 0 \mapsto \dfrac{x}{|x|} \\ 0 \mapsto 0 \end{cases}$$

   est discontinue en 0.

Exemple

1. Les fonctions suivantes sont continues :
   - $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$,
   - $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|$ et
   - $i : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ = x \mapsto \sqrt{x}$
2. La fonction
$$j : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{Z} \\ x \neq 0 \mapsto \dfrac{x}{|x|} \\ 0 \mapsto 0 \end{cases}$$
   est discontinue en 0.

Leitmotiv: Une fonction est continue si on peut tracer son graphe sans lever le crayon.

Exemple

1. Les fonctions suivantes sont continues :
   - $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$,
   - $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|$ et
   - $i : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ = x \mapsto \sqrt{x}$
2. La fonction

$$j : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{Z} \\ x \neq 0 \mapsto \dfrac{x}{|x|} \\ 0 \mapsto 0 \end{cases}$$

est discontinue en 0.

Leitmotiv: Une fonction est continue si on peut tracer son graphe sans lever le crayon. Ou encore: si son graphe n'a pas de « sauts ».

Contenu de la section

Soient deux fonctions f et g continues en un point a. Soit $c \in \mathbb{R}$ une constante. Alors

$$f + g \text{ est continue en } a$$
$$cf \text{ est continue en } a$$
$$fg \text{ est continue en } a$$

Soient deux fonctions f et g continues en un point a. Soit $c \in \mathbb{R}$ une constante. Alors

$$f + g \text{ est continue en } a$$

$$cf \text{ est continue en } a$$

$$fg \text{ est continue en } a$$

Si, de plus, $g(a) \neq 0$, alors

$$\frac{f}{g} \text{ est continue en } a.$$

Résultat

Si $f : A \to B$ *et* $g : C \to D$*, avec* $A, B, C, D \subset \mathbb{R}$ *et* $\operatorname{Im} f \subset C$ *(de sorte que la composée* $g \circ f$ *a du sens), si* f *est continue en* a *et* g *est continue en* $f(a)$ *alors*

$$g \circ f \text{ est continue en } a.$$

Résultat

Si $f : A \to B$ *et* $g : C \to D$*, avec* $A,B,C,D \subset \mathbb{R}$ *et* $\operatorname{Im} f \subset C$ *(de sorte que la composée* $g \circ f$ *a du sens), si* f *est continue en* a *et* g *est continue en* $f(a)$ *alors*

$$g \circ f \text{ est continue en } a.$$

Remarque

Ces règles de calculs sont des conséquences directes des règles de calculs pour les limites.

Contenu de la section

Le théorème des bornes atteintes

Théorème (Théorème des bornes atteintes)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

Le théorème des bornes atteintes

Théorème (Théorème des bornes atteintes)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors l'image $f([a,b])$ est encore un intervalle fermé:

Le théorème des bornes atteintes

Théorème (Théorème des bornes atteintes)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors l'image $f([a,b])$ est encore un intervalle fermé: il existe u,v deux réels dans $[a,b]$ tels que $f([a,b]) = [f(u),f(v)]$.

Exemple

L'image de $[0,2\pi]$ par la fonction sinus est $[-1,1]$, qu'on peut effectivement ré-écrire $[\sin(3\pi/2), \sin(\pi/2)]$.

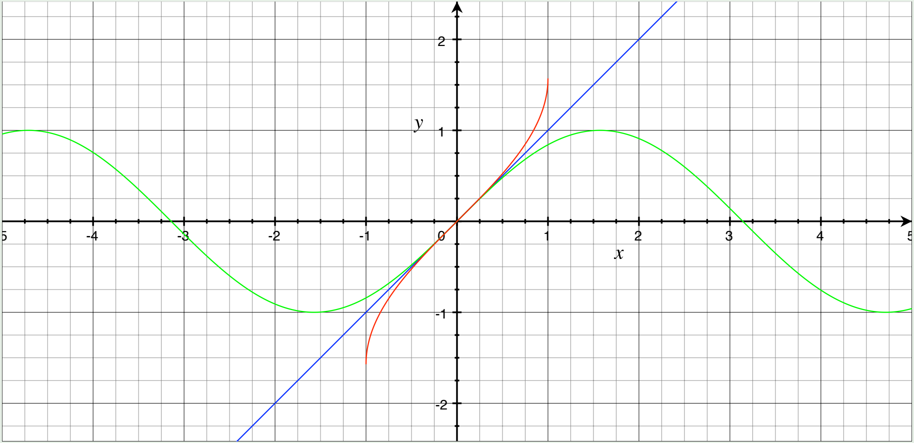


FIG.: Graphe de sin

Théorème des valeurs intermédiaires

Il est intuitivement clair que si le graphe d'une fonction continue « démarre » en dessous d'une droite horizontale et se termine au dessus de cette droite, il doit croiser la droite quelque part. C'est l'objet du résultat suivant

Théorème des valeurs intermédiaires

Il est intuitivement clair que si le graphe d'une fonction continue « démarre » en dessous d'une droite horizontale et se termine au dessus de cette droite, il doit croiser la droite quelque part. C'est l'objet du résultat suivant :

Théorème (Théorème de la valeur intermédiaire.)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$ strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = \gamma$.

Théorème des valeurs intermédiaires

Il est intuitivement clair que si le graphe d'une fonction continue « démarre » en dessous d'une droite horizontale et se termine au dessus de cette droite, il doit croiser la droite quelque part. C'est l'objet du résultat suivant :

Théorème (Théorème de la valeur intermédiaire.)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$ strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in \,]a,b[$ tel que $f(c) = \gamma$.

Une conséquence frappante est la suivante:

Théorème des valeurs intermédiaires

Il est intuitivement clair que si le graphe d'une fonction continue « démarre » en dessous d'une droite horizontale et se termine au dessus de cette droite, il doit croiser la droite quelque part. C'est l'objet du résultat suivant :

Théorème (Théorème de la valeur intermédiaire.)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$ strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = \gamma$.

Une conséquence frappante est la suivante:

Résultat

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = 0$.

Continuité des fonctions réciproques

Résultat

Soit f une fonction réelle bijective définie sur un intervalle. Si f est continue en a, alors sa réciproque est continue en $f(a)$.

Continuité des fonctions réciproques

Résultat

Soit f une fonction réelle bijective définie sur un intervalle. Si f est continue en a, alors sa réciproque est continue en $f(a)$.

Attention, ça ne marche plus si f n'est pas définie sur un intervalle! Par exemple si f est définie sur une union d'intervalles. (Un contre-exemple est dans le syllabus).

Contenu de la section

Rappel

Considérons la droite D du plan passant par les points (x,y) et $(x+\Delta x, y+\Delta y)$, avec $\Delta x \neq 0$. Cette droite possède une pente

$$m := \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

qui vaut, lorsque le repère est orthonormé, la tengente de l'angle formé par la droite avec l'horizontale.

Rappel

Considérons la droite D du plan passant par les points (x,y) et $(x+\Delta x, y+\Delta y)$, avec $\Delta x \neq 0$. Cette droite possède une pente

$$m := \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

qui vaut, lorsque le repère est orthonormé, la tengente de l'angle formé par la droite avec l'horizontale.

Définition

Soit $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, et soit a un point intérieur à A (ce n'est pas une extrémité de A). Si la limite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe dans $\mathbb{R}$, on appelle cette limite le *nombre dérivé de f en a* et on le note $f'(a)$.

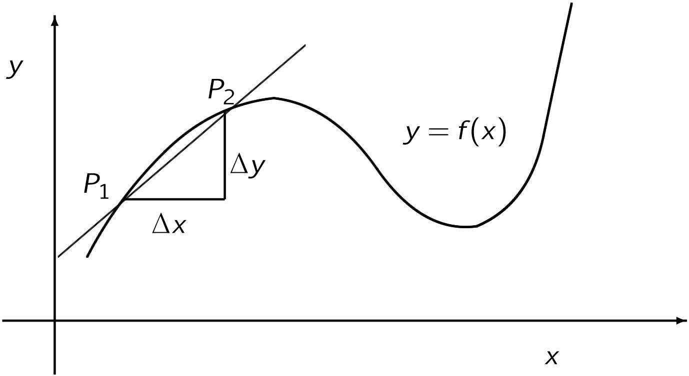
Rappel

Considérons la droite D du plan passant par les points (x,y) et $(x+\Delta x, y+\Delta y)$, avec $\Delta x \neq 0$. Cette droite possède une pente
$$m := \frac{\Delta y}{\Delta x}$$
qui vaut, lorsque le repère est orthonormé, la tengente de l'angle formé par la droite avec l'horizontale.

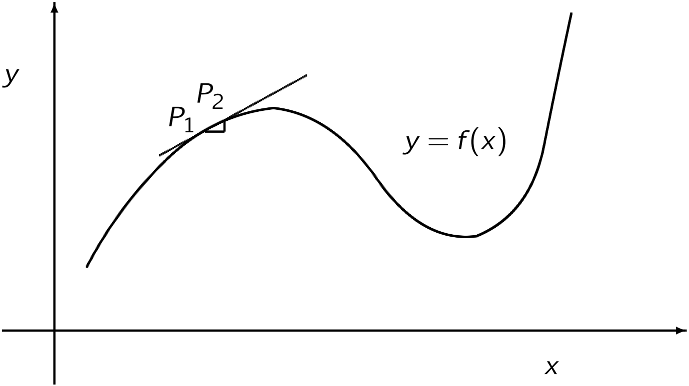
Définition

Soit $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, et soit a un point intérieur à A (ce n'est pas une extrémité de A). Si la limite
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
existe dans $\mathbb{R}$, on appelle cette limite le *nombre dérivé de f en a* et on le note $f'(a)$.

Quand cette limite existe, on dit que f est *dérivable* au point a, ou encore que $f'(a)$ existe.



y
P_2
$y = f(x)$
Δy
P_1
Δx
x


y
P_2
P_1
$y = f(x)$
x

Exemple

Si $f(x) = x^2$, le nombre dérivé de f en a est $2a$

Exemple

Si $f(x) = x^2$, le nombre dérivé de f en a est $2a$

Démonstration.

On remarque que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} =$$

Exemple

Si $f(x) = x^2$, le nombre dérivé de f en a est $2a$

Démonstration.

On remarque que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^2 - a^2}{x - a} =$$

Exemple

Si $f(x) = x^2$, le nombre dérivé de f en a est $2a$

Démonstration.

On remarque que
$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{x^2-a^2}{x-a} = \frac{(x-a)(x+a)}{x-a} = x+a$$
pour tout $x \neq a$.

Exemple

Si $f(x) = x^2$, le nombre dérivé de f en a est $2a$

Démonstration.

On remarque que
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{(x-a)(x+a)}{x-a} = x + a$$
pour tout $x \neq a$. Dès lors lorsque $x \to a$, la limite vaut bien $2a$. $\square$

On notera donc $f'(a) = 2a$, ou $f'(x) = 2x$.

Remarque

Les deux écritures suivantes sont identiques :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Remarque

Les deux écritures suivantes sont identiques :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

On a juste posé $h = x - a$, qui tend vers 0 lorsque x tend vers a.

Remarque

Les deux écritures suivantes sont identiques :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

On a juste posé $h = x - a$, qui tend vers 0 lorsque x tend vers a. On choisira de calculer l'expression la plus simple en fonction du contexte donné.

Remarque

Les deux écritures suivantes sont identiques :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

On a juste posé $h = x - a$, qui tend vers 0 lorsque x tend vers a. On choisira de calculer l'expression la plus simple en fonction du contexte donné.

Étant donnée f une fonction, la notion de dérivabilité ci-dessus donne lieu à une nouvelle fonction, notée f' qui à chaque valeur x pour laquelle f est dérivable associe le nombre dérivé de f en x, c'est-à-dire $f'(x)$. Cette fonction f' est appelée la fonction dérivée de f.

Opérations sur les fonctions dérivables

Résultat

Si c est une constante, et f et g sont des fonctions dérivables, on a

1. $(cf)' = cf'$

Opérations sur les fonctions dérivables

Résultat

Si c est une constante, et f et g sont des fonctions dérivables, on a

1. $(cf)' = cf'$
2. $(f+g)' = f' + g'$

Opérations sur les fonctions dérivables

Résultat

Si c est une constante, et f et g sont des fonctions dérivables, on a

1. $(cf)' = cf'$
2. $(f+g)' = f' + g'$
3. $(fg)' = f'g + fg'$

Opérations sur les fonctions dérivables

Résultat

Si c est une constante, et f et g sont des fonctions dérivables, on a

1. $(cf)' = cf'$
2. $(f+g)' = f' + g'$
3. $(fg)' = f'g + fg'$
4. *Sur un domaine où g ne s'annule pas :* $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Opérations sur les fonctions dérivables

Résultat

Si c est une constante, et f et g sont des fonctions dérivables, on a

1. $(cf)' = cf'$
2. $(f+g)' = f' + g'$
3. $(fg)' = f'g + fg'$
4. *Sur un domaine où g ne s'annule pas :* $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Nous allons détailler les preuves de 1 et 3 (les autres sont dans le syllabus).

Résultat

Si c est une constante et f une fonction dérivable, alors $(cf)' = cf'$

Résultat

Si c est une constante et f une fonction dérivable, alors $(cf)' = cf'$

Démonstration.

Il faut montrer que pour tout u dans le domaine de f',
$(cf)'(u) = cf'(u)$.

Résultat

Si c est une constante et f une fonction dérivable, alors $(cf)' = cf'$

Démonstration.

Il faut montrer que pour tout u dans le domaine de f', $(cf)'(u) = cf'(u)$. On calcule simplement :

$$\lim_{x \to u} \frac{(cf)(x) - (cf)(u)}{x - u} =$$

Résultat

Si c est une constante et f une fonction dérivable, alors $(cf)' = cf'$

Démonstration.

Il faut montrer que pour tout u dans le domaine de f', $(cf)'(u) = cf'(u)$. On calcule simplement :

$$\lim_{x \to u} \frac{(cf)(x) - (cf)(u)}{x - u} = \lim_{x \to u} \frac{cf(x) - cf(u)}{x - u}$$

Résultat

Si c est une constante et f une fonction dérivable, alors $(cf)' = cf'$

Démonstration.

Il faut montrer que pour tout u dans le domaine de f', $(cf)'(u) = cf'(u)$. On calcule simplement :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to u} \frac{(cf)(x)-(cf)(u)}{x-u} &= \lim_{x\to u} \frac{cf(x)-cf(u)}{x-u} \\ &= \lim_{x\to u} c\frac{f(x)-f(u)}{x-u}\end{aligned}$$

Résultat

Si c est une constante et f une fonction dérivable, alors $(cf)' = cf'$

Démonstration.

Il faut montrer que pour tout u dans le domaine de f', $(cf)'(u) = cf'(u)$. On calcule simplement :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to u} \frac{(cf)(x)-(cf)(u)}{x-u} &= \lim_{x\to u} \frac{cf(x)-cf(u)}{x-u} \\
&= \lim_{x\to u} c\frac{f(x)-f(u)}{x-u} \\
&= c\lim_{x\to u} \frac{f(x)-f(u)}{x-u}
\end{aligned}$$

Résultat

Si c est une constante et f une fonction dérivable, alors $(cf)' = cf'$

Démonstration.

Il faut montrer que pour tout u dans le domaine de f', $(cf)'(u) = cf'(u)$. On calcule simplement :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to u} \frac{(cf)(x)-(cf)(u)}{x-u} &= \lim_{x\to u} \frac{cf(x)-cf(u)}{x-u} \\
&= \lim_{x\to u} c\,\frac{f(x)-f(u)}{x-u} \\
&= c \lim_{x\to u} \frac{f(x)-f(u)}{x-u} \\
&= cf'(u)
\end{aligned}$$

□

Avant de prouver la formule pour le produit, nous aurons besoin du résultat suivant :

Résultat

Si f est dérivable en u, alors f est continue en u.

Avant de prouver la formule pour le produit, nous aurons besoin du résultat suivant :

Résultat

Si f est dérivable en u, alors f est continue en u.

Démonstration.

On suppose que $\lim_{x\to u} \frac{f(x)-f(u)}{x-u}$ existe et vaut alors le nombre réel $f'(u)$. On écrit alors que, pour tout $x \neq u$:

Avant de prouver la formule pour le produit, nous aurons besoin du résultat suivant :

Résultat

Si f est dérivable en u, alors f est continue en u.

Démonstration.

On suppose que $\lim_{x\to u} \frac{f(x)-f(u)}{x-u}$ existe et vaut alors le nombre réel $f'(u)$. On écrit alors que, pour tout $x \neq u$:

$$f(x) = \frac{f(x) - f(u)}{x - u}(x - u) + f(u)$$

Avant de prouver la formule pour le produit, nous aurons besoin du résultat suivant :

Résultat

Si f est dérivable en u, alors f est continue en u.

Démonstration.

On suppose que $\lim_{x\to u} \frac{f(x)-f(u)}{x-u}$ existe et vaut alors le nombre réel $f'(u)$. On écrit alors que, pour tout $x \neq u$:

$$f(x) = \frac{f(x)-f(u)}{x-u}(x-u) + f(u)$$

et donc en passant à la limite :

$$\lim_{x\to u} f(x) = \lim_{x\to u}\left(\frac{f(x)-f(u)}{x-u}(x-u) + f(u)\right) = f'(u)0 + f(u) = f(u).$$

□

Résultat

Si f et g sont des fonctions dérivables en u,
alors $(fg)'(u) = f'(u)g(u) + f(u)g'(u)$

Résultat

Si f et g sont des fonctions dérivables en u,
alors $(fg)'(u) = f'(u)g(u) + f(u)g'(u)$

Démonstration.

$$\lim_{x \to u} \frac{(fg)(x) - (fg)(u)}{x - u} =$$

Résultat

Si f et g sont des fonctions dérivables en u,
alors $(fg)'(u) = f'(u)g(u) + f(u)g'(u)$

Démonstration.

$$\lim_{x \to u} \frac{(fg)(x) - (fg)(u)}{x - u} = \lim_{x \to u} \frac{f(x)g(x) - f(u)g(u)}{x - u}$$

$$=$$

Résultat

Si f et g sont des fonctions dérivables en u,
alors $(fg)'(u) = f'(u)g(u) + f(u)g'(u)$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to u} \frac{(fg)(x)-(fg)(u)}{x-u} &= \lim_{x\to u} \frac{f(x)g(x)-f(u)g(u)}{x-u} \\
&= \lim_{x\to u} \frac{f(x)g(x)-f(x)g(u)+f(x)g(u)-f(u)g(u)}{x-u} \\
&=
\end{aligned}$$

Résultat

Si f et g sont des fonctions dérivables en u,
alors $(fg)'(u) = f'(u)g(u) + f(u)g'(u)$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to u} \frac{(fg)(x) - (fg)(u)}{x-u} &= \lim_{x \to u} \frac{f(x)g(x) - f(u)g(u)}{x-u} \\
&= \lim_{x \to u} \frac{f(x)g(x) - f(x)g(u) + f(x)g(u) - f(u)g(u)}{x-u} \\
&= \lim_{x \to u} \frac{f(x)(g(x)-g(u)) + (f(x)-f(u))g(u)}{x-u} \\
&=
\end{aligned}$$

Résultat

Si f et g sont des fonctions dérivables en u,
alors $(fg)'(u) = f'(u)g(u) + f(u)g'(u)$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to u} \frac{(fg)(x)-(fg)(u)}{x-u} &= \lim_{x\to u} \frac{f(x)g(x)-f(u)g(u)}{x-u} \\
&= \lim_{x\to u} \frac{f(x)g(x)-f(x)g(u)+f(x)g(u)-f(u)g(u)}{x-u} \\
&= \lim_{x\to u} \frac{f(x)(g(x)-g(u))+(f(x)-f(u))g(u)}{x-u} \\
&= \lim_{x\to u} \frac{f(x)(g(x)-g(u))}{x-u} + \frac{(f(x)-f(u))g(u)}{x-u} \\
&=
\end{aligned}$$

Résultat

Si f et g sont des fonctions dérivables en u,
alors $(fg)'(u) = f'(u)g(u) + f(u)g'(u)$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to u} \frac{(fg)(x) - (fg)(u)}{x-u} &= \lim_{x \to u} \frac{f(x)g(x) - f(u)g(u)}{x-u} \\
&= \lim_{x \to u} \frac{f(x)g(x) - f(x)g(u) + f(x)g(u) - f(u)g(u)}{x-u} \\
&= \lim_{x \to u} \frac{f(x)(g(x) - g(u)) + (f(x) - f(u))g(u)}{x-u} \\
&= \lim_{x \to u} \frac{f(x)(g(x) - g(u))}{x-u} + \frac{(f(x) - f(u))g(u)}{x-u} \\
&= \lim_{x \to u} f(x)\frac{g(x) - g(u)}{x-u} + \lim_{x \to u} \frac{(f(x) - f(u))}{x-u} g(u) \\
&=
\end{aligned}$$

Résultat

Si f et g sont des fonctions dérivables en u,
alors $(fg)'(u) = f'(u)g(u) + f(u)g'(u)$

Démonstration.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to u} \frac{(fg)(x)-(fg)(u)}{x-u} &= \lim_{x\to u} \frac{f(x)g(x)-f(u)g(u)}{x-u} \\
&= \lim_{x\to u} \frac{f(x)g(x)-f(x)g(u)+f(x)g(u)-f(u)g(u)}{x-u} \\
&= \lim_{x\to u} \frac{f(x)(g(x)-g(u))+(f(x)-f(u))g(u)}{x-u} \\
&= \lim_{x\to u} \frac{f(x)(g(x)-g(u))}{x-u} + \frac{(f(x)-f(u))g(u)}{x-u} \\
&= \lim_{x\to u} f(x)\frac{g(x)-g(u)}{x-u} + \lim_{x\to u} \frac{(f(x)-f(u))}{x-u}g(u) \\
&= f(u)g'(u)+f'(u)g(u)
\end{aligned}
$$

□

Dérivées de fonctions élémentaires

Résultat

La dérivée de f définie par $f(x) = x$ est la fonction f' telle que $f'(x) = 1$.

Dérivées de fonctions élémentaires

Résultat

La dérivée de f définie par $f(x) = x$ est la fonction f' telle que $f'(x) = 1$.
En général, on dira simplement « La dérivée de x est 1 ».

Dérivées de fonctions élémentaires

Résultat

La dérivée de f définie par $f(x) = x$ est la fonction f' telle que $f'(x) = 1$.
En général, on dira simplement « La dérivée de x est 1 ».
(Parfois on précisera « par rapport à x ».)

Dérivées de fonctions élémentaires

Résultat

La dérivée de f définie par $f(x) = x$ est la fonction f' telle que $f'(x) = 1$. En général, on dira simplement « La dérivée de x est 1 ». (Parfois on précisera « par rapport à x ».)

Démonstration.

$$f'(u) = \lim_{x \to u} \frac{x - u}{x - u} = 1$$

$\square$

Résultat

Soit n un entier naturel. La dérivée de la fonction $x \mapsto x^n$ vaut nx^{n-1}

Résultat

Soit n un entier naturel. La dérivée de la fonction $x \mapsto x^n$ vaut nx^{n-1}

Démonstration.

On prouve par récurrence que la proposition

$$P(n) : \text{« La dérivée de } x \mapsto x^n \text{ vaut } nx^{n-1} \text{ »}$$

est vraie pour tout $n \geq 0$.

Résultat

Soit n un entier naturel. La dérivée de la fonction $x \mapsto x^n$ vaut nx^{n-1}

Démonstration.

On prouve par récurrence que la proposition

$$P(n)\colon \text{« La dérivée de } x \mapsto x^n \text{ vaut } nx^{n-1} \text{ »}$$

est vraie pour tout $n \geq 0$.

Initialisation: Si $n = 0$, cela revient à prouver que la dérivée de la fonction nulle est la fonction nulle, qui est vrai.

Résultat

Soit n un entier naturel. La dérivée de la fonction $x \mapsto x^n$ vaut nx^{n-1}

Démonstration.

On prouve par récurrence que la proposition

$$P(n)\text{: « La dérivée de } x \mapsto x^n \text{ vaut } nx^{n-1} \text{ »}$$

est vraie pour tout $n \geq 0$.

Initialisation: Si $n = 0$, cela revient à prouver que la dérivée de la fonction nulle est la fonction nulle, qui est vrai.

Récurrence: Fixons $n \geq 0$ et supposons que la dérivée de x^n vaut nx^{n-1} pour cette valeur fixée.

Résultat

Soit n un entier naturel. La dérivée de la fonction $x \mapsto x^n$ vaut nx^{n-1}

Démonstration.

On prouve par récurrence que la proposition

$$P(n)\text{: « La dérivée de } x \mapsto x^n \text{ vaut } nx^{n-1} \text{ »}$$

est vraie pour tout $n \geq 0$.

Initialisation: Si $n = 0$, cela revient à prouver que la dérivée de la fonction nulle est la fonction nulle, qui est vrai.

Récurrence: Fixons $n \geq 0$ et supposons que la dérivée de x^n vaut nx^{n-1} pour cette valeur fixée. Alors:

$(x^{n+1})'$

Résultat

Soit n un entier naturel. La dérivée de la fonction $x \mapsto x^n$ vaut nx^{n-1}

Démonstration.

On prouve par récurrence que la proposition

$$P(n)\text{: « La dérivée de } x \mapsto x^n \text{ vaut } nx^{n-1} \text{ »}$$

est vraie pour tout $n \geq 0$.

Initialisation: Si $n = 0$, cela revient à prouver que la dérivée de la fonction nulle est la fonction nulle, qui est vrai.

Récurrence: Fixons $n \geq 0$ et supposons que la dérivée de x^n vaut nx^{n-1} pour cette valeur fixée. Alors:

$(x^{n+1})' = (x \cdot x^n)'$

Résultat

Soit n un entier naturel. La dérivée de la fonction $x \mapsto x^n$ vaut nx^{n-1}

Démonstration.

On prouve par récurrence que la proposition

$$P(n)\text{: « La dérivée de } x \mapsto x^n \text{ vaut } nx^{n-1} \text{ »}$$

est vraie pour tout $n \geq 0$.

Initialisation: Si $n = 0$, cela revient à prouver que la dérivée de la fonction nulle est la fonction nulle, qui est vrai.

Récurrence: Fixons $n \geq 0$ et supposons que la dérivée de x^n vaut nx^{n-1} pour cette valeur fixée. Alors:

$(x^{n+1})' = (x \cdot x^n)' = (x)'x^n + x(x^n)'$

Résultat

Soit n un entier naturel. La dérivée de la fonction $x \mapsto x^n$ vaut nx^{n-1}

Démonstration.

On prouve par récurrence que la proposition

$$P(n): \text{« La dérivée de } x \mapsto x^n \text{ vaut } nx^{n-1} \text{ »}$$

est vraie pour tout $n \geq 0$.

Initialisation: Si $n = 0$, cela revient à prouver que la dérivée de la fonction nulle est la fonction nulle, qui est vrai.

Récurrence: Fixons $n \geq 0$ et supposons que la dérivée de x^n vaut nx^{n-1} pour cette valeur fixée. Alors:

$$(x^{n+1})' = (x \cdot x^n)' = (x)'x^n + x(x^n)' = 1 \cdot x^n + x \cdot nx^{n-1} = x^n + nx^n = (n+1)x^n$$

Résultat

Soit n un entier naturel. La dérivée de la fonction $x \mapsto x^n$ vaut nx^{n-1}

Démonstration.

On prouve par récurrence que la proposition

$$P(n)\text{: « La dérivée de } x \mapsto x^n \text{ vaut } nx^{n-1} \text{ »}$$

est vraie pour tout $n \geq 0$.

Initialisation: Si $n = 0$, cela revient à prouver que la dérivée de la fonction nulle est la fonction nulle, qui est vrai.

Récurrence: Fixons $n \geq 0$ et supposons que la dérivée de x^n vaut nx^{n-1} pour cette valeur fixée. Alors:

$$(x^{n+1})' = (x \cdot x^n)' = (x)'x^n + x(x^n)' = 1 \cdot x^n + x \cdot nx^{n-1} = x^n + nx^n = (n+1)x^n$$

ce qui est bien la formule attendue pour $n + 1$. □

Dérivée des fonctions exponentielles

Résultat

Soit $a > 0$ *et soit* f *la fonction* $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ *donnée par* $f(x) = a^x$.
Alors f *est dérivable en tout point et* $f'(x) = a^x \ln(a)$.

Dérivée des fonctions exponentielles

Résultat

Soit $a > 0$ *et soit* f *la fonction* $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ *donnée par* $f(x) = a^x$.
Alors f *est dérivable en tout point et* $f'(x) = a^x \ln(a)$.

Preuve incomplète.

Dérivée des fonctions exponentielles

Résultat

Soit $a > 0$ *et soit* f *la fonction* $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ *donnée par* $f(x) = a^x$*.*
Alors f *est dérivable en tout point et* $f'(x) = a^x \ln(a)$*.*

Preuve incomplète.

$$(a^x)' =$$

Dérivée des fonctions exponentielles

Résultat

Soit $a > 0$ et soit f la fonction $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ donnée par $f(x) = a^x$. Alors f est dérivable en tout point et $f'(x) = a^x \ln(a)$.

Preuve incomplète.

$$(a^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} =$$

Dérivée des fonctions exponentielles

Résultat

Soit $a > 0$ *et soit* f *la fonction* $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ *donnée par* $f(x) = a^x$.
Alors f *est dérivable en tout point et* $f'(x) = a^x \ln(a)$.

Preuve incomplète.

$$(a^x)' = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \to 0} a^x \frac{a^h - 1}{h} =$$

Dérivée des fonctions exponentielles

Résultat

Soit $a > 0$ *et soit* f *la fonction* $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ *donnée par* $f(x) = a^x$.
Alors f *est dérivable en tout point et* $f'(x) = a^x \ln(a)$.

Preuve incomplète.

$$(a^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} a^x \frac{a^h - 1}{h} = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

Dérivée des fonctions exponentielles

Résultat

Soit $a > 0$ et soit f la fonction $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ donnée par $f(x) = a^x$. Alors f est dérivable en tout point et $f'(x) = a^x \ln(a)$.

Preuve incomplète.

$$(a^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} a^x \frac{a^h - 1}{h} = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

Il se trouve qu'on a:

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln(a),$$

mais nous ne pouvons pas encore le démontrer actuellement (et nous l'admettons donc!) $\square$

Dérivée des fonctions exponentielles

Résultat

Soit $a > 0$ et soit f la fonction $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ donnée par $f(x) = a^x$. Alors f est dérivable en tout point et $f'(x) = a^x \ln(a)$.

Preuve incomplète.

$$(a^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} a^x \frac{a^h - 1}{h} = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

Il se trouve qu'on a:

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln(a),$$

mais nous ne pouvons pas encore le démontrer actuellement (et nous l'admettons donc!) □

Conséquence: comme $\ln(e) = 1$, la dérivée de la fonction exponentielle $\exp(x)$ est elle-même!

Dérivation de fonctions composées

Résultat

Si f *et* g *sont des fonctions et* a *est intérieur au domaine de* $f \circ g$

Dérivation de fonctions composées

Résultat

Si f et g sont des fonctions et a est intérieur au domaine de $f \circ g$, si g est dérivable en a et f dérivable en $g(a)$

Dérivation de fonctions composées

Résultat

Si f et g sont des fonctions et a est intérieur au domaine de $f \circ g$, si g est dérivable en a et f dérivable en $g(a)$, alors

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a).$$

Dérivation de fonctions composées

Résultat

Si f et g sont des fonctions et a est intérieur au domaine de $f \circ g$, si g est dérivable en a et f dérivable en $g(a)$, alors

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a).$$

Nous ne le prouverons pas ici.

Exemple

Si $f(x) = \exp(nx)$, c'est la composée de l'exponentielle et de $x \mapsto nx$. La dérivée de l'exponentielle est elle-même, la dérivée de nx est n, dès lors $f'(x) = n \exp(nx)$.

Dérivation de fonctions composées

Résultat

Si f et g sont des fonctions et a est intérieur au domaine de $f \circ g$, si g est dérivable en a et f dérivable en $g(a)$, alors

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a).$$

Nous ne le prouverons pas ici.

Exemple

Si $f(x) = \exp(nx)$, c'est la composée de l'exponentielle et de $x \mapsto nx$. La dérivée de l'exponentielle est elle-même, la dérivée de nx est n, dès lors $f'(x) = n\exp(nx)$.
On peut également écrire $f(x) = (\exp x)^n$, d'où on voit f comme la composée de $t \mapsto t^n$ et de l'exponentielle. La dérivée de t^n par rapport à t est nt^{n-1}, dès lors $f'(x) = n(\exp x)^{n-1} \exp x = n(\exp x)^n$.

Dérivation de fonctions composées

Résultat

Si f et g sont des fonctions et a est intérieur au domaine de $f \circ g$, si g est dérivable en a et f dérivable en $g(a)$, alors

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a).$$

Nous ne le prouverons pas ici.

Exemple

Si $f(x) = \exp(nx)$, c'est la composée de l'exponentielle et de $x \mapsto nx$.
La dérivée de l'exponentielle est elle-même, la dérivée de nx est n, dès lors $f'(x) = n\exp(nx)$.
On peut également écrire $f(x) = (\exp x)^n$, d'où on voit f comme la composée de $t \mapsto t^n$ et de l'exponentielle. La dérivée de t^n par rapport à t est nt^{n-1}, dès lors $f'(x) = n(\exp x)^{n-1}\exp x = n(\exp x)^n$.
Le résultat est évidemment le même.

Résultat

Si $f : A \to B$ est une bijection dérivable en a avec $f'(a) \neq 0$, alors sa réciproque f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Résultat

Si $f : A \to B$ est une bijection dérivable en a avec $f'(a) \neq 0$, alors sa réciproque f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Démonstration.

Comme f est une bijection dérivable en a, elle est également continue en a et son inverse est donc continue en $f(a)$.

Résultat

Si $f : A \to B$ est une bijection dérivable en a avec $f'(a) \neq 0$, alors sa réciproque f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Démonstration.

Comme f est une bijection dérivable en a, elle est également continue en a et son inverse est donc continue en $f(a)$. Dès lors nous avons $\lim_{t \to f(a)} f^{-1}(t) = f^{-1}(f(a)) = a$.

Résultat

Si $f : A \to B$ est une bijection dérivable en a avec $f'(a) \neq 0$, alors sa réciproque f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Démonstration.

Comme f est une bijection dérivable en a, elle est également continue en a et son inverse est donc continue en $f(a)$. Dès lors nous avons $\lim_{t \to f(a)} f^{-1}(t) = f^{-1}(f(a)) = a$.On a donc successivement

$$\lim_{t \to f(a)} \frac{f^{-1}(t) - f^{-1}(f(a))}{t - f(a)} =$$

Résultat

Si $f : A \to B$ est une bijection dérivable en a avec $f'(a) \neq 0$, alors sa réciproque f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Démonstration.

Comme f est une bijection dérivable en a, elle est également continue en a et son inverse est donc continue en $f(a)$. Dès lors nous avons $\lim_{t\to f(a)} f^{-1}(t) = f^{-1}(f(a)) = a$.On a donc successivement

$$\lim_{t\to f(a)} \frac{f^{-1}(t) - f^{-1}(f(a))}{t - f(a)} = \lim_{x\to a} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(a))}{f(x) - f(a)} =$$

Résultat

Si $f : A \to B$ est une bijection dérivable en a avec $f'(a) \neq 0$, alors sa réciproque f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Démonstration.

Comme f est une bijection dérivable en a, elle est également continue en a et son inverse est donc continue en $f(a)$. Dès lors nous avons $\lim_{t\to f(a)} f^{-1}(t) = f^{-1}(f(a)) = a$.On a donc successivement

$$\lim_{t\to f(a)} \frac{f^{-1}(t) - f^{-1}(f(a))}{t - f(a)} = \lim_{x\to a} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(a))}{f(x) - f(a)} = \lim_{x\to a} \frac{x - a}{f(x) - f(a)}$$

$$=$$

Résultat

Si $f : A \to B$ est une bijection dérivable en a avec $f'(a) \neq 0$, alors sa réciproque f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Démonstration.

Comme f est une bijection dérivable en a, elle est également continue en a et son inverse est donc continue en $f(a)$. Dès lors nous avons $\lim_{t\to f(a)} f^{-1}(t) = f^{-1}(f(a)) = a$.On a donc successivement

$$\begin{aligned}\lim_{t\to f(a)} \frac{f^{-1}(t) - f^{-1}(f(a))}{t - f(a)} &= \lim_{x\to a} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(a))}{f(x) - f(a)} = \lim_{x\to a} \frac{x - a}{f(x) - f(a)}\\ &= \frac{1}{f'(a)}.\end{aligned}$$

Résultat

Si $f : A \to B$ est une bijection dérivable en a avec $f'(a) \neq 0$, alors sa réciproque f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Démonstration.

Comme f est une bijection dérivable en a, elle est également continue en a et son inverse est donc continue en $f(a)$. Dès lors nous avons $\lim_{t \to f(a)} f^{-1}(t) = f^{-1}(f(a)) = a$.On a donc successivement

$$\lim_{t \to f(a)} \frac{f^{-1}(t) - f^{-1}(f(a))}{t - f(a)} = \lim_{x \to a} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(a))}{f(x) - f(a)} = \lim_{x \to a} \frac{x - a}{f(x) - f(a)}$$

$$= \frac{1}{f'(a)}.$$

Résultat

Si $f : A \to B$ est une bijection dérivable en a avec $f'(a) \neq 0$, alors sa réciproque f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Démonstration.

Comme f est une bijection dérivable en a, elle est également continue en a et son inverse est donc continue en $f(a)$. Dès lors nous avons $\lim_{t\to f(a)} f^{-1}(t) = f^{-1}(f(a)) = a$.On a donc successivement

$$\lim_{t\to f(a)} \frac{f^{-1}(t) - f^{-1}(f(a))}{t - f(a)} = \lim_{x\to a} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(a))}{f(x) - f(a)} = \lim_{x\to a} \frac{x-a}{f(x)-f(a)}$$

$$= \frac{1}{f'(a)}.$$

La première égalité s'obtient par composition des limites en posant $t = f(x)$.

Résultat

Si $f : A \to B$ est une bijection dérivable en a avec $f'(a) \neq 0$, alors sa réciproque f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Démonstration.

Comme f est une bijection dérivable en a, elle est également continue en a et son inverse est donc continue en $f(a)$. Dès lors nous avons $\lim_{t\to f(a)} f^{-1}(t) = f^{-1}(f(a)) = a$.On a donc successivement

$$\lim_{t\to f(a)} \frac{f^{-1}(t) - f^{-1}(f(a))}{t - f(a)} = \lim_{x\to a} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(a))}{f(x) - f(a)} = \lim_{x\to a} \frac{x-a}{f(x)-f(a)}$$
$$= \frac{1}{f'(a)}.$$

La première égalité s'obtient par composition des limites en posant $t = f(x)$. La dernière égalité est la définition du nombre dérivé de f^{-1} en $f(a)$. $\square$

Exemple

La dérivée de $\ln(x)$ vaut $1/x$.

Exemple

La dérivée de $\ln(x)$ vaut $1/x$.

Démonstration.

On sait que ln est la réciproque de exp. Et $\exp'(x) = \exp(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exemple

La dérivée de $\ln(x)$ vaut $1/x$.

Démonstration.

On sait que ln est la réciproque de exp. Et $\exp'(x) = \exp(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Dès lors:

$$\ln'(x) = \frac{1}{\exp' \ln(x)}$$

Exemple

La dérivée de $\ln(x)$ vaut $1/x$.

Démonstration.

On sait que ln est la réciproque de exp. Et $\exp'(x) = \exp(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Dès lors:

$$\ln'(x) = \frac{1}{\exp' \ln(x)} = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x}.$$

$\square$

Exemple

La dérivée de $\ln(x)$ vaut $1/x$.

Démonstration.

On sait que ln est la réciproque de exp. Et $\exp'(x) = \exp(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Dès lors:

$$\ln'(x) = \frac{1}{\exp' \ln(x)} = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x}.$$

$\square$

Exemple

La fonction $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \mapsto \ln |x|$ a pour dérivée $\frac{1}{x}$.

Exemple

La dérivée de $\ln(x)$ vaut $1/x$.

Démonstration.

On sait que ln est la réciproque de exp. Et $\exp'(x) = \exp(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Dès lors:

$$\ln'(x) = \frac{1}{\exp' \ln(x)} = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x}.$$

$\square$

Exemple

La fonction $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \mapsto \ln|x|$ a pour dérivée $\frac{1}{x}$.

Démonstration.

- Pour $x > 0$, c'est simplement $\ln x$;

Exemple

La dérivée de $\ln(x)$ vaut $1/x$.

Démonstration.

On sait que ln est la réciproque de exp. Et $\exp'(x) = \exp(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Dès lors:

$$\ln'(x) = \frac{1}{\exp' \ln(x)} = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x}.$$

□

Exemple

La fonction $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \mapsto \ln|x|$ a pour dérivée $\frac{1}{x}$.

Démonstration.

- Pour $x > 0$, c'est simplement $\ln x$;
- pour $x < 0$, c'est $\ln(-x)$,

Exemple

La dérivée de $\ln(x)$ vaut $1/x$.

Démonstration.

On sait que ln est la réciproque de exp. Et $\exp'(x) = \exp(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Dès lors:

$$\ln'(x) = \frac{1}{\exp' \ln(x)} = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x}.$$

$\square$

Exemple

La fonction $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \mapsto \ln|x|$ a pour dérivée $\frac{1}{x}$.

Démonstration.

- Pour $x > 0$, c'est simplement $\ln x$;
- pour $x < 0$, c'est $\ln(-x)$, dont la dérivée vaut $\frac{1}{-x}(-x)' = \frac{1}{x}$ également par la règle sur la dérivée d'une composée.

$\square$

Résultat

La dérivée de x^n *vaut* nx^{n-1} *pour tout réel* n, $x > 0$.

Résultat

La dérivée de x^n *vaut* nx^{n-1} *pour tout réel* n, $x > 0$.

Démonstration.

On écrit que, pour tout $n \in \mathbb{R}$ et $x > 0$:

$$x^n = \exp\left(\ln(x^n)\right) = \exp\left(n \ln(x)\right)$$

En dérivant cette dernière expression nous obtenons le résultat. $\square$

Résultat

La dérivée de x^n vaut nx^{n-1} pour tout réel n, $x > 0$.

Démonstration.

On écrit que, pour tout $n \in \mathbb{R}$ et $x > 0$:

$$x^n = \exp(\ln(x^n)) = \exp(n\ln(x))$$

En dérivant cette dernière expression nous obtenons le résultat. $\square$

Exemple

- Nous savons que c'est vrai pour n naturel.

Résultat

La dérivée de x^n vaut nx^{n-1} pour tout réel n, $x > 0$.

Démonstration.

On écrit que, pour tout $n \in \mathbb{R}$ et $x > 0$:

$$x^n = \exp(\ln(x^n)) = \exp(n\ln(x))$$

En dérivant cette dernière expression nous obtenons le résultat. $\square$

Exemple

- Nous savons que c'est vrai pour n naturel.
- Pour $n = 1/2$, on peut donner une autre preuve :
  $$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

Résultat

La dérivée de x^n vaut nx^{n-1} pour tout réel n, $x > 0$.

Démonstration.

On écrit que, pour tout $n \in \mathbb{R}$ et $x > 0$:

$$x^n = \exp(\ln(x^n)) = \exp(n \ln(x))$$

En dérivant cette dernière expression nous obtenons le résultat. $\square$

Exemple

- Nous savons que c'est vrai pour n naturel.
- Pour $n = 1/2$, on peut donner une autre preuve :
  $$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

Résultat

La dérivée de x^n *vaut* nx^{n-1} *pour tout réel* n*,* $x > 0$*.*

Démonstration.

On écrit que, pour tout $n \in \mathbb{R}$ et $x > 0$:

$$x^n = \exp\left(\ln(x^n)\right) = \exp\left(n \ln(x)\right)$$

En dérivant cette dernière expression nous obtenons le résultat. $\square$

Exemple

- Nous savons que c'est vrai pour n naturel.
- Pour $n = 1/2$, on peut donner une autre preuve :

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

Résultat

La dérivée de x^n vaut nx^{n-1} pour tout réel n, $x > 0$.

Démonstration.

On écrit que, pour tout $n \in \mathbb{R}$ et $x > 0$:

$$x^n = \exp(\ln(x^n)) = \exp(n \ln(x))$$

En dérivant cette dernière expression nous obtenons le résultat. $\square$

Exemple

- Nous savons que c'est vrai pour n naturel.
- Pour $n = 1/2$, on peut donner une autre preuve :

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \end{aligned}$$

Résultat

La dérivée de x^n vaut nx^{n-1} pour tout réel n, $x > 0$.

Démonstration.

On écrit que, pour tout $n \in \mathbb{R}$ et $x > 0$:

$$x^n = \exp\left(\ln(x^n)\right) = \exp\left(n\ln(x)\right)$$

En dérivant cette dernière expression nous obtenons le résultat. $\square$

Exemple

- Nous savons que c'est vrai pour n naturel.
- Pour $n = 1/2$, on peut donner une autre preuve :

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-1/2}
\end{aligned}$$

Contenu de la section

3. Dérivées
   - Dérivée seconde, troisième, etc. . .

Questions de notations

Dans vos cours vous rencontrerez les notations suivantes pour la dérivée d'une fonction f en un point a :

- $f'(a)$

Questions de notations

Dans vos cours vous rencontrerez les notations suivantes pour la dérivée d'une fonction f en un point a :

- $f'(a)$
- $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$

Questions de notations

Dans vos cours vous rencontrerez les notations suivantes pour la dérivée d'une fonction f en un point a :

- $f'(a)$
- $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$

Questions de notations

Dans vos cours vous rencontrerez les notations suivantes pour la dérivée d'une fonction f en un point a :

- $f'(a)$
- $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$

Ou, ayant écrit $y = f(x)$:

- $y'(a)$

Questions de notations

Dans vos cours vous rencontrerez les notations suivantes pour la dérivée d'une fonction f en un point a :

- $f'(a)$
- $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$

Ou, ayant écrit $y = f(x)$:

- $y'(a)$
- $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(a)$

Dérivées d'ordres successifs

Supposons

Dérivées d'ordres successifs

Supposons

- f est dérivable dans un intervalle ouvert $]a,b[$, et

Dérivées d'ordres successifs

Supposons

- f est dérivable dans un intervalle ouvert $]a,b[$, et
- sa dérivée f' est aussi dérivable dans $]a,b[$,

Dérivées d'ordres successifs

Supposons

- f est dérivable dans un intervalle ouvert $]a,b[$, et
- sa dérivée f' est aussi dérivable dans $]a,b[$,

Dérivées d'ordres successifs

Supposons

- f est dérivable dans un intervalle ouvert $]a,b[$, et
- sa dérivée f' est aussi dérivable dans $]a,b[$,

alors on définit la *dérivée seconde*, notée f'' par :

$$f''(x) = (f')'(x); \qquad x \in]a,b[$$

Dérivées d'ordres successifs

Supposons

- f est dérivable dans un intervalle ouvert $]a,b[$, et
- sa dérivée f' est aussi dérivable dans $]a,b[$,

alors on définit la *dérivée seconde*, notée f'' par :

$$f''(x) = (f')'(x); \qquad x \in]a,b[$$

Si f'' admet à son tour une dérivée dans $]a,b[$, on l'appelle *dérivée troisième*, notée f''' ou $f^{\underline{3}}$ et ainsi de suite, c'est-à-dire

$$f^{\underline{(n+1)}} = (f^{\underline{n}})'$$

par récurrence, pour tout n.