# Rappel: limites à gauche et à droite

## Définition

Soit $f : A \to \mathbb{R}$, $A$ intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ ($a$ est dans $A$ ou c'est une extrémité de $A$). On dit que la limite à gauche de $f$ en $a$ existe si:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \ : \forall x \in A, \quad a - \delta < x < a \Longrightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

La limite à droite se définit de la même manière avec $a < x < a + \delta$. Dans le cas où les valeurs de $f(x)$ s'approchent de la limite en restant toujours au-dessus (ou en-dessous) on le notera « avec un plus »:

## Définition

On dit que $\lim_{x \to a} f(x) = L_+$ si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ et $f(x) > L$ pour $x$ proche de $a$.

De la même manière, on peut aussi écrire $\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = L_+$, etc...

### Exemple

La fonction $x \mapsto x$ a une limite nulle en 0. On peut cependant être plus précis et écrire :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} x = 0^- \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} x = 0^+.$$

Avec les règles de calcul étendues ceci donne :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x} = \infty.$$

### Remarque

Lorsque la limite de $f$ en $a$ existe, alors les limites à gauche et à droite existent et valent $\lim_{x \to a} f$.

# Contenu de la section

## Notations de Landau:

# Notation de Landau

Il arrive souvent qu'on ait besoin de comparer des fonctions « sur le long terme ».

## Exemple

Deux populations de bactéries peuvent avoir le même nombre d'individus au début, mais leur nombre va-t-il rester comparable tout le temps ? Les deux nombres vont-ils rester du même ordre de grandeur ?

## Exemple

Si deux algorithmes pour factoriser le nombre $n$ prennent respectivement $f(n)$ et $g(n)$ secondes, comment savoir lequel est le plus rapide lorsque $n$ devient grand ?

Nous allons voir une définition permettant de comparer ces grandeurs.

# Grands O

## Définition

Soient $f,g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Supposons qu'il existe $r \in \mathbb{R}$ et $c > 0$ tels que pour tout $x \in ]r, +\infty[$ on a

$$|f(x)| \leq c \cdot |g(x)|$$

On dit alors « $f$ est un $O(g)$ » (prononcer « $f$ est un grand $O$ de $g$ »).

## Remarque

Cette notion indique que $f/g$ reste borné. Généralement on compare une fonction $f$ intéressante à une fonction $g$ bien connue. On dira aussi que l'ordre de grandeur de $f$ est inférieur à celui de $g$.

## Exemple

- $10x$ est $O(x)$. En effet, si $x > 0$, on a bien $10x \leq cx$ (par exemple $c = 10$ fonctionne).
- Inversement, $x$ est $O(10x)$ car $x \leq c10x$ avec $c = \frac{1}{10}$.
- $\sin(x) + x^2$ est en $O(x^2)$ car $\sin(x) + x^2 \leq 1 + x^2 \leq 2x^2$ si $x \geq 1$.
- $x$ est $O(x^2)$ mais $x^2$ n'est pas $O(x)$.

# Une charactérisation des $O$

### Résultat

*Considérons la limite* $\lim_{x\to\infty} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|$.

- *Si elle existe dans* $\mathbb{R}$, *alors* $f(x)$ *est* $O(g(x))$.
- *Si elle est infinie, alors* $f(x)$ *n'est pas* $O(g(x))$.

Dans le premier cas, si la limite existe, c'est que $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|$ reste borné quand $x$ devient suffisamment grand. Et donc

$$f(x) = O\Big(g(x)\Big).$$

### Exemple

$x^n$ est $O(x^k)$ si et seulement si $n \leq k$. En d'autres termes : $x^n$ est d'un ordre de grandeur inférieur à $x^k$ si et seulement si $n \leq k$.
En effet: on calcule le quotient $\left|\frac{x^n}{x^k}\right| = \left|x^{n-k}\right|$:

- Si $n \leq k$ alors l'exposant $n-k$ est négatif ou nul, donc le quotient tend vers 0 ou 1.
- Si $n > k$, alors l'exposant est strictement positif et donc le quotient tend vers $+\infty$.

# « Petit o »

Une définition similaire est la suivante :

## Définition

Lorsque $\lim_{x\to\infty}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = 0$, on dit alors que $f(x)$ est $o(g(x))$.

## Remarque

- En particulier $f(x)$ est en $O(g(x))$ mais être « peit o » donne plus d'informations (c'est plus fort).
- Si $g(x)$ tend vers 0 et $f(x)$ est un $o(g(x))$, alors $f$ tend vers 0 plus vite que $g$ !

## Exemple

- $x^2$ est un $o(x^3)$ (pour $x \to \infty$)
- $x^3$ n'est pas un $o(x^2)$ (pour $x \to \infty$),

## Définition

Les définitions de $o$ et $O$ se définissent de la même manière lorsque $x$ tend vers $a \in \mathbb{R}$ ou vers $-\infty$. Il faut alors préciser à chaque fois quelle est la limite pour $x$ !

## Exemple

- $x^3$ est un $o(x^2)$ (pour $x \to 0$), car
$$\lim_{x\to 0} \left|\frac{x^3}{x^2}\right| = \lim_{x\to 0} |x| = 0.$$
- $x^2$ n'est pas un $o(x^3)$ (pour $x \to 0$).
- $(x-1)^3$ est $o((x-1)^2)$ (pour $x \to 1$),
- $x - a$ est $o(1)$ quand $x \to a$.

## Remarque

Écrire $f(x) = o(1)$ quand $x \to a$ » (ici $a$ peut être fini ou $\pm\infty$) signifie juste: $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

# Contenu de la section

## Définition

Soit $f : A \to B$ une fonction réelle et $a \in A$. La fonction $f$ est dite *continue au point $a$* si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

## Remarque

Une fonction est continue en $a$ si ses valeurs près de $a$ tendent vers sa valeur en $a$.

## Définition

$f$ est *discontinue au point $a$* si $f$ n'est pas continue au point $a$.

## Définition

$f$ est *continue (sur son domaine)* si elle est continue en chaque point $a$ de son domaine.

## Exemple

Par exemple, la fonction

$$f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$$

est continue car elle est continue en chaque $a \in \mathbb{R}_0 = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Attention, cette fonction n'est pas définie en 0. Donc ça n'a pas de sens de parler de sa continuité en 0!

## Exemple

1. Les fonctions suivantes sont continues :
   - $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$,
   - $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|$ et
   - $i : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ = x \mapsto \sqrt{x}$
2. La fonction
$$j : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{Z} \\ x \neq 0 \mapsto \dfrac{x}{|x|} \\ 0 \mapsto 0 \end{cases}$$
   est discontinue en 0.

**Leitmotiv:** Une fonction est continue si on peut tracer son graphe sans lever le crayon. Ou encore: si son graphe n'a pas de « sauts ».

# Contenu de la section

Soient deux fonctions $f$ et $g$ continues en un point $a$. Soit $c \in \mathbb{R}$ une constante. Alors

$$f + g \text{ est continue en } a$$

$$cf \text{ est continue en } a$$

$$fg \text{ est continue en } a$$

Si, de plus, $g(a) \neq 0$, alors

$$\frac{f}{g} \text{ est continue en } a.$$

## Résultat

*Si $f : A \to B$ et $g : C \to D$, avec $A,B,C,D \subset \mathbb{R}$ et $\operatorname{Im} f \subset C$ (de sorte que la composée $g \circ f$ a du sens), si $f$ est continue en $a$ et $g$ est continue en $f(a)$ alors*

$$g \circ f \text{ est continue en } a.$$

## Remarque

Ces règles de calculs sont des conséquences directes des règles de calculs pour les limites.

# Contenu de la section

# Le théorème des bornes atteintes

## Théorème (Théorème des bornes atteintes)

*Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Alors l'image* $f([a,b])$ *est encore un intervalle fermé: il existe* $u,v$ *deux réels dans* $[a,b]$ *tels que* $f([a,b]) = [f(u),f(v)]$.

## Exemple

L′image de $[0,2\pi]$ par la fonction sinus est $[-1,1]$, qu′on peut effectivement ré-écrire $[\sin(3\pi/2), \sin(\pi/2)]$.

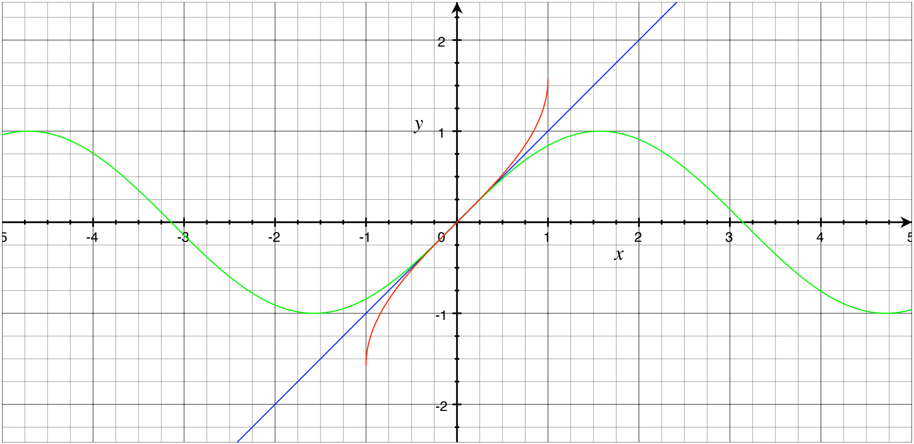



Fig.: Graphe de sin

# Théorème des valeurs intermédiaires

Il est intuitivement clair que si le graphe d'une fonction continue « démarre » en dessous d'une droite horizontale et se termine au dessus de cette droite, il doit croiser la droite quelque part. C'est l'objet du résultat suivant :

## Théorème (Théorème de la valeur intermédiaire.)

*Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$ strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in ]a,b[$ tel que $f(c) = \gamma$.*

Une conséquence frappante est la suivante:

## Résultat

*Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. Alors il existe $c \in ]a,b[$ tel que $f(c) = 0$.*

# Continuité des fonctions réciproques

## Résultat

*Soit $f$ une fonction réelle bijective définie sur un intervalle. Si $f$ est continue en $a$, alors sa réciproque est continue en $f(a)$.*

Attention, ça ne marche plus si $f$ n'est pas définie sur un intervalle! Par exemple si $f$ est définie sur une union d'intervalles. (Un contre-exemple est dans le syllabus).

# Contenu de la section

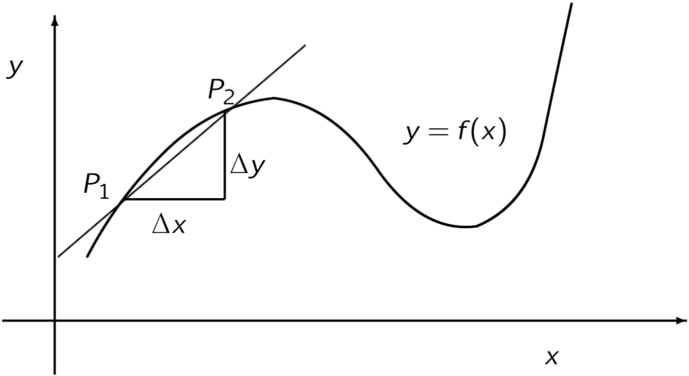
## Rappel

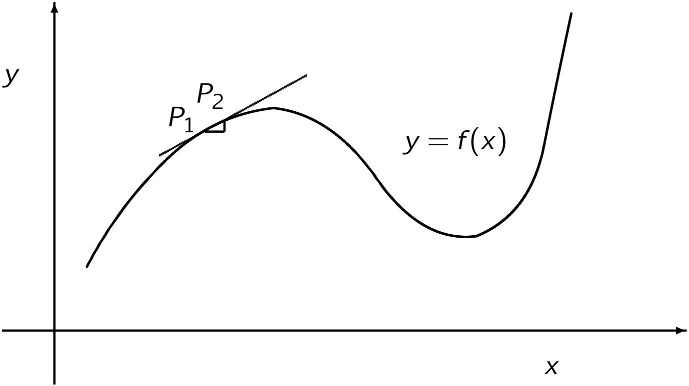
Considérons la droite $D$ du plan passant par les points $(x,y)$ et $(x+\Delta x, y+\Delta y)$, avec $\Delta x \neq 0$. Cette droite possède une pente
$$m := \frac{\Delta y}{\Delta x}$$
qui vaut, lorsque le repère est orthonormé, la tengente de l'angle formé par la droite avec l'horizontale.

## Définition

Soit $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, et soit $a$ un point intérieur à $A$ (ce n'est pas une extrémité de $A$). Si la limite
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
existe dans $\mathbb{R}$, on appelle cette limite le *nombre dérivé de $f$ en $a$* et on le note $f'(a)$.

Quand cette limite existe, on dit que $f$ est *dérivable* au point $a$, ou encore que $f'(a)$ existe.


y
P2
y = f(x)
Δy
P1
Δx
x


y
P2
P1
y = f(x)
x

## Exemple

Si $f(x) = x^2$, le nombre dérivé de $f$ en $a$ est $2a$

## Démonstration.

On remarque que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{(x-a)(x+a)}{x - a} = x + a$$

pour tout $x \neq a$. Dès lors lorsque $x \to a$, la limite vaut bien $2a$. $\square$

On notera donc $f'(a) = 2a$, ou $f'(x) = 2x$.

## Remarque

Les deux écritures suivantes sont identiques :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

On a juste posé $h = x - a$, qui tend vers 0 lorsque $x$ tend vers $a$. On choisira de calculer l'expression la plus simple en fonction du contexte donné.

Étant donnée $f$ une fonction, la notion de dérivabilité ci-dessus donne lieu à une nouvelle fonction, notée $f'$ qui à chaque valeur $x$ pour laquelle $f$ est dérivable associe le nombre dérivé de $f$ en $x$, c'est-à-dire $f'(x)$. Cette fonction $f'$ est appelée la fonction dérivée de $f$.

# Opérations sur les fonctions dérivables

### Résultat

*Si $c$ est une constante, et $f$ et $g$ sont des fonctions dérivables, on a*

1. $(cf)' = cf'$
2. $(f+g)' = f' + g'$
3. $(fg)' = f'g + fg'$
4. *Sur un domaine où $g$ ne s'annule pas :* $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Nous allons détailler les preuves de 1 et 3 (les autres sont dans le syllabus).

## Résultat

*Si $c$ est une constante et $f$ une fonction dérivable, alors $(cf)' = cf'$*

## Démonstration.

Il faut montrer que pour tout $u$ dans le domaine de $f'$, $(cf)'(u) = cf'(u)$. On calcule simplement :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to u} \frac{(cf)(x) - (cf)(u)}{x-u} &= \lim_{x\to u} \frac{cf(x) - cf(u)}{x-u} \\
&= \lim_{x\to u} c\frac{f(x) - f(u)}{x-u} \\
&= c\lim_{x\to u} \frac{f(x) - f(u)}{x-u} \\
&= cf'(u)
\end{aligned}$$

$\square$

Avant de prouver la formule pour le produit, nous aurons besoin du résultat suivant :

## Résultat

*Si $f$ est dérivable en $u$, alors $f$ est continue en $u$.*

## Démonstration.

On suppose que $\lim_{x\to u} \frac{f(x)-f(u)}{x-u}$ existe et vaut alors le nombre réel $f'(u)$. On écrit alors que, pour tout $x \neq u$ :

$$f(x) = \frac{f(x)-f(u)}{x-u}(x-u) + f(u)$$

et donc en passant à la limite :

$$\lim_{x\to u} f(x) = \lim_{x\to u}\left(\frac{f(x)-f(u)}{x-u}(x-u) + f(u)\right) = f'(u)0 + f(u) = f(u).$$

$\square$

## Résultat

*Si $f$ et $g$ sont des fonctions dérivables en $u$,*
*alors* $(fg)'(u) = f'(u)g(u) + f(u)g'(u)$

## Démonstration.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to u} \frac{(fg)(x)-(fg)(u)}{x-u} &= \lim_{x\to u} \frac{f(x)g(x)-f(u)g(u)}{x-u} \\
&= \lim_{x\to u} \frac{f(x)g(x)-f(x)g(u)+f(x)g(u)-f(u)g(u)}{x-u} \\
&= \lim_{x\to u} \frac{f(x)(g(x)-g(u))+(f(x)-f(u))g(u)}{x-u} \\
&= \lim_{x\to u} \frac{f(x)(g(x)-g(u))}{x-u} + \frac{(f(x)-f(u))g(u)}{x-u} \\
&= \lim_{x\to u} f(x)\frac{g(x)-g(u)}{x-u} + \lim_{x\to u} \frac{(f(x)-f(u))}{x-u}g(u) \\
&= f(u)g'(u)+f'(u)g(u)
\end{aligned}$$

$\square$

# Dérivées de fonctions élémentaires

## Résultat

*La dérivée de $f$ définie par $f(x) = x$ est la fonction $f'$ telle que $f'(x) = 1$.*
*En général, on dira simplement « La dérivée de $x$ est $1$ ».*
*( Parfois on précisera « par rapport à $x$ ».)*

## Démonstration.

$$f'(u) = \lim_{x \to u} \frac{x-u}{x-u} = 1$$

$\square$

## Résultat

*Soit $n$ un entier naturel. La dérivée de la fonction $x \mapsto x^n$ vaut $nx^{n-1}$*

## Démonstration.

On prouve par récurrence que la proposition

$$P(n)\text{: « La dérivée de } x \mapsto x^n \text{ vaut } nx^{n-1} \text{ »}$$

est vraie pour tout $n \geq 0$.

**Initialisation:** Si $n = 0$, cela revient à prouver que la dérivée de la fonction nulle est la fonction nulle, qui est vrai.

**Récurrence:** Fixons $n \geq 0$ et supposons que la dérivée de $x^n$ vaut $nx^{n-1}$ pour cette valeur fixée. Alors:

$(x^{n+1})' = (x \cdot x^n)' = (x)'x^n + x(x^n)' = 1 \cdot x^n + x \cdot nx^{n-1} = x^n + nx^n = (n+1)x^n$

ce qui est bien la formule attendue pour $n + 1$. $\square$

# Dérivée des fonctions exponentielles

## Résultat

*Soit $a > 0$ et soit $f$ la fonction $f : \mathbb{R} \to ]0, +\infty[$ donnée par $f(x) = a^x$. Alors $f$ est dérivable en tout point et $f'(x) = a^x \ln(a)$.*

## Preuve incomplète.

$$(a^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} a^x \frac{a^h - 1}{h} = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

Il se trouve qu'on a:

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln(a),$$

mais nous ne pouvons pas encore le démontrer actuellement (et nous l'admettons donc!) $\square$

**Conséquence:** comme $\ln(e) = 1$, la dérivée de la fonction exponentielle $\exp(x)$ est elle-même!

# Dérivation de fonctions composées

## Résultat

*Si $f$ et $g$ sont des fonctions et $a$ est intérieur au domaine de $f \circ g$, si $g$ est dérivable en $a$ et $f$ dérivable en $g(a)$, alors*

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a).$$

Nous ne le prouverons pas ici.

## Exemple

Si $f(x) = \exp(nx)$, c'est la composée de l'exponentielle et de $x \mapsto nx$.
La dérivée de l'exponentielle est elle-même, la dérivée de $nx$ est $n$, dès lors $f'(x) = n \exp(nx)$.
On peut également écrire $f(x) = (\exp x)^n$, d'où on voit $f$ comme la composée de $t \mapsto t^n$ et de l'exponentielle. La dérivée de $t^n$ par rapport à $t$ est $nt^{n-1}$, dès lors $f'(x) = n(\exp x)^{n-1} \exp x = n(\exp x)^n$.
Le résultat est évidemment le même.

## Résultat

*Si $f : A \to B$ est une bijection dérivable en $a$ avec $f'(a) \neq 0$, alors sa réciproque $f^{-1}$ est dérivable en $f(a)$ et*

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

## Démonstration.

Comme $f$ est une bijection dérivable en $a$, elle est également continue en $a$ et son inverse est donc continue en $f(a)$. Dès lors nous avons $\lim_{t\to f(a)} f^{-1}(t) = f^{-1}(f(a)) = a$.On a donc successivement

$$\begin{aligned}\lim_{t\to f(a)} \frac{f^{-1}(t) - f^{-1}(f(a))}{t - f(a)} &= \lim_{x\to a} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(a))}{f(x) - f(a)} = \lim_{x\to a} \frac{x - a}{f(x) - f(a)} \\ &= \frac{1}{f'(a)}.\end{aligned}$$

La première égalité s'obtient par composition des limites en posant $t = f(x)$. La dernière égalité est la définition du nombre dérivé de $f^{-1}$ en $f(a)$. □

## Exemple

La dérivée de $\ln(x)$ vaut $1/x$.

## Démonstration.

On sait que ln est la réciproque de exp. Et $\exp'(x) = \exp(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Dès lors:

$$\ln'(x) = \frac{1}{\exp' \ln(x)} = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x}.$$

□

## Exemple

La fonction $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \mapsto \ln|x|$ a pour dérivée $\frac{1}{x}$.

## Démonstration.

- Pour $x > 0$, c'est simplement $\ln x$ ;
- pour $x < 0$, c'est $\ln(-x)$, dont la dérivée vaut $\frac{1}{-x}(-x)' = \frac{1}{x}$ également par la règle sur la dérivée d'une composée.

□

## Résultat

*La dérivée de $x^n$ vaut $nx^{n-1}$ pour tout réel $n$, $x > 0$.*

## Démonstration.

On écrit que, pour tout $n \in \mathbb{R}$ et $x > 0$:

$$x^n = \exp\left(\ln(x^n)\right) = \exp\left(n \ln(x)\right)$$

En dérivant cette dernière expression nous obtenons le résultat. □

## Exemple

- Nous savons que c'est vrai pour $n$ naturel.
- Pour $n = 1/2$, on peut donner une autre preuve :

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-1/2}\end{aligned}$$

# Contenu de la section

# Questions de notations

Dans vos cours vous rencontrerez les notations suivantes pour la dérivée d'une fonction $f$ en un point $a$ :

- $f'(a)$
- $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$

Ou, ayant écrit $y = f(x)$ :

- $y'(a)$
- $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(a)$

# Dérivées d'ordres successifs

Supposons

- $f$ est dérivable dans un intervalle ouvert $]a,b[$, et
- sa dérivée $f'$ est aussi dérivable dans $]a,b[$,

alors on définit la *dérivée seconde*, notée $f''$ par :

$$f''(x) = (f')'(x); \qquad x \in ]a,b[$$

Si $f''$ admet à son tour une dérivée dans $]a,b[$, on l'appelle *dérivée troisième*, notée $f'''$ ou $f^{\underline{3}}$ et ainsi de suite, c'est-à-dire

$$f^{\underline{(n+1)}} = (f^{\underline{n}})'$$

par récurrence, pour tout $n$.