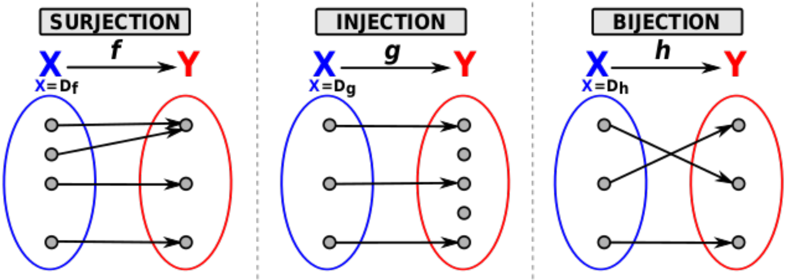
Rappel: fonctions injectives, surjectives, bijectives

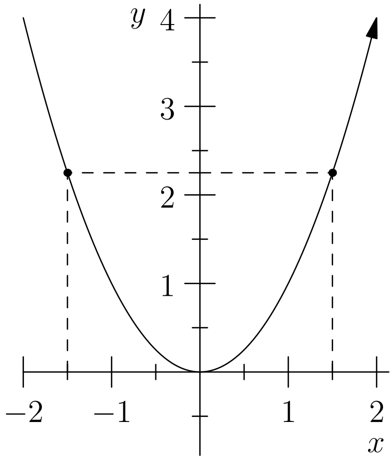
Soit $f : X \to Y$ une fonction.

- f est dite *surjective* si tout élément de Y est l'image d'au moins un élément de X ;
- f est dite *injective* si deux éléments distincts de X ont des images distinctes dans Y ;
- f est dite *bijective* si f est à la fois injective et surjective.



Exemples avec des fonctions réelles

On regarde notre amie la fonction $f : x \mapsto x^2$ (on n'a pas encore précisé entre quels ensembles):



- Si on définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, elle n'est rien du tout: car les réels négatifs ne sont pas dans l'image de f et $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- Si on définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ elle est surjective mais non injective: car tout réel $y \geq 0$ s'écrit comme $y = x^2$ avec $x = \sqrt{y}$. Mais encore une fois, $f(-x) = f(x)$.
- Si enfin on définit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ alors f est surjective et injective, donc bijective. Car si $y \in \mathbb{R}_+$, il existe un unique réel $x \geq 0$ tel que $x^2 = y$: c'est précisément $\sqrt{y}$.

Contenu de la section

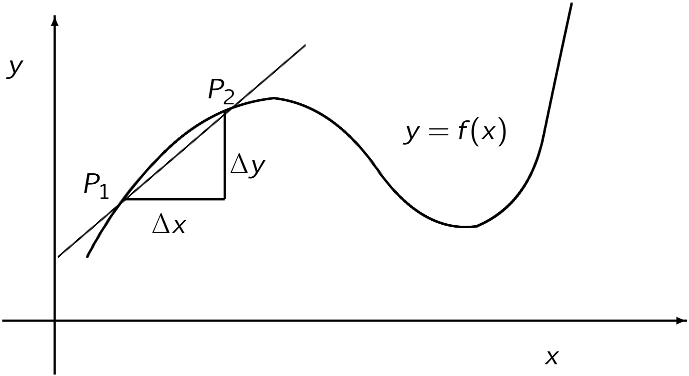
Rappel

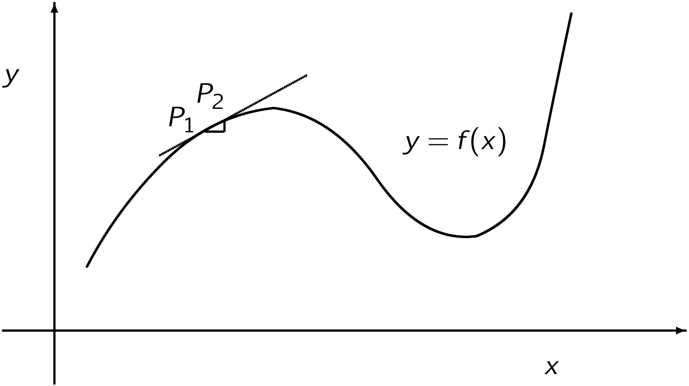
Considérons la droite D du plan passant par les points (x,y) et $(x+\Delta x, y+\Delta y)$, avec $\Delta x \neq 0$. Cette droite possède une pente
$$m := \frac{\Delta y}{\Delta x}$$
qui vaut, lorsque le repère est orthonormé, la tengente de l'angle formé par la droite avec l'horizontale.

Définition

Soit $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, et soit a un point intérieur à A (ce n'est pas une extrémité de A). Si la limite
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
existe dans $\mathbb{R}$, on appelle cette limite le *nombre dérivé de f en a* et on le note $f'(a)$.

Quand cette limite existe, on dit que f est *dérivable* au point a, ou encore que $f'(a)$ existe.


y
P2
y = f(x)
Δy
P1
Δx
x



y
P2
P1
y = f(x)
x

Exemple

Si $f(x) = x^2$, le nombre dérivé de f en a est $2a$

Démonstration.

On remarque que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{(x-a)(x+a)}{x-a} = x + a$$

pour tout $x \neq a$. Dès lors lorsque $x \to a$, la limite vaut bien $2a$. $\square$

On notera donc $f'(a) = 2a$, ou $f'(x) = 2x$.

Remarque

Les deux écritures suivantes sont identiques :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

On a juste posé $h = x - a$, qui tend vers 0 lorsque x tend vers a. On choisira de calculer l'expression la plus simple en fonction du contexte donné.

Étant donnée f une fonction, la notion de dérivabilité ci-dessus donne lieu à une nouvelle fonction, notée f' qui à chaque valeur x pour laquelle f est dérivable associe le nombre dérivé de f en x, c'est-à-dire $f'(x)$. Cette fonction f' est appelée la fonction dérivée de f.

Opérations sur les fonctions dérivables

Résultat

Si c est une constante, et f et g sont des fonctions dérivables, on a

1. $(cf)' = cf'$
2. $(f+g)' = f' + g'$
3. $(fg)' = f'g + fg'$
4. *Sur un domaine où g ne s'annule pas :* $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Nous allons détailler la preuve de 3 (les autres sont dans le syllabus).

Avant de prouver la formule pour le produit, nous aurons besoin du résultat suivant :

Résultat

Si f est dérivable en u, alors f est continue en u.

Démonstration.

On suppose que $\lim_{x\to u} \frac{f(x)-f(u)}{x-u}$ existe et vaut alors le nombre réel $f'(u)$. On écrit alors que, pour tout $x \neq u$:

$$f(x) = \frac{f(x)-f(u)}{x-u}(x-u) + f(u)$$

et donc en passant à la limite :

$$\lim_{x\to u} f(x) = \lim_{x\to u}\left(\frac{f(x)-f(u)}{x-u}(x-u) + f(u)\right) = f'(u)0 + f(u) = f(u).$$

$\square$

Résultat

Si f et g sont des fonctions dérivables en u,
alors $(fg)'(u) = f'(u)g(u) + f(u)g'(u)$

Démonstration.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to u}\frac{(fg)(x)-(fg)(u)}{x-u} &= \lim_{x\to u}\frac{f(x)g(x)-f(u)g(u)}{x-u}\\
&= \lim_{x\to u}\frac{f(x)g(x)-f(x)g(u)+f(x)g(u)-f(u)g(u)}{x-u}\\
&= \lim_{x\to u}\frac{f(x)(g(x)-g(u))+(f(x)-f(u))g(u)}{x-u}\\
&= \lim_{x\to u}\frac{f(x)(g(x)-g(u))}{x-u}+\frac{(f(x)-f(u))g(u)}{x-u}\\
&= \lim_{x\to u} f(x)\frac{g(x)-g(u)}{x-u}+\lim_{x\to u}\frac{(f(x)-f(u))}{x-u}g(u)\\
&= f(u)g'(u)+f'(u)g(u)
\end{aligned}
$$

$\square$

Dérivées de fonctions élémentaires

Résultat

La dérivée de f définie par $f(x) = x$ est la fonction f' telle que $f'(x) = 1$.
En général, on dira simplement « La dérivée de x est 1 ».
(Parfois on précisera « par rapport à x ».)

Démonstration.

$$f'(u) = \lim_{x \to u} \frac{x - u}{x - u} = 1$$

$\square$

Résultat

Soit n un entier naturel. La dérivée de la fonction $x \mapsto x^n$ vaut nx^{n-1}

Essayez de le démontrer! (Indication: faites une récurrence)

Démonstration.

On prouve par récurrence que la proposition

$$P(n)\text{: « La dérivée de } x \mapsto x^n \text{ vaut } nx^{n-1} \text{ »}$$

est vraie pour tout $n \geq 0$.

Initialisation: Si $n = 0$, cela revient à prouver que la dérivée de la fonction constante égale à 1 est la fonction nulle, qui est vrai.

Récurrence: Fixons $n \geq 0$ et supposons que la dérivée de x^n vaut nx^{n-1} pour cette valeur fixée. Alors:

$(x^{n+1})' = (x \cdot x^n)' = (x)'x^n + x(x^n)' = 1 \cdot x^n + x \cdot nx^{n-1} = x^n + nx^n = (n+1)x^n$

ce qui est bien la formule attendue pour $n + 1$. □

Dérivée des fonctions exponentielles

Résultat

Soit $a > 0$ et soit f la fonction $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ donnée par $f(x) = a^x$.
Alors f est dérivable en tout point et $f'(x) = a^x \ln(a)$.

Preuve incomplète.

$$(a^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} a^x \frac{a^h - 1}{h} = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

Il se trouve qu'on a:

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln(a),$$

mais nous ne pouvons pas encore le démontrer actuellement (et nous l'admettons donc pour l'instant) □

Conséquence: comme $\ln(e) = 1$, la dérivée de la fonction exponentielle $\exp(x)$ est elle-même!

Dérivation de fonctions composées

Résultat

Si f et g sont des fonctions et a est intérieur au domaine de $f \circ g$, si g est dérivable en a et f dérivable en $g(a)$, alors

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a).$$

Nous ne le prouverons pas ici.

Exemple

Si $f(x) = \exp(nx)$, c'est la composée de l'exponentielle et de $x \mapsto nx$.
La dérivée de l'exponentielle est elle-même, la dérivée de nx est n, dès lors $f'(x) = n\exp(nx)$.
On peut également écrire $f(x) = (\exp x)^n$, d'où on voit f comme la composée de $t \mapsto t^n$ et de l'exponentielle. La dérivée de t^n par rapport à t est nt^{n-1}, dès lors $f'(x) = n(\exp x)^{n-1} \exp x = n(\exp x)^n$.
Le résultat est évidemment le même.

Résultat

Si $f : A \to B$ est une bijection dérivable en a avec $f'(a) \neq 0$, alors sa réciproque f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Nous ne le prouverons pas non plus ici.

Exemple

La dérivée de $\ln(x)$ vaut $1/x$.

Démonstration.

On sait que ln est la réciproque de exp. Et $\exp'(x) = \exp(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Dès lors:

$$\ln'(x) = \frac{1}{\exp' \ln(x)} = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x}.$$

□

Exemple

La fonction $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \mapsto \ln|x|$ a pour dérivée $\frac{1}{x}$.

Démonstration.

- Pour $x > 0$, c'est simplement $\ln x$;
- pour $x < 0$, c'est $\ln(-x)$, dont la dérivée vaut $\frac{1}{-x}(-x)' = \frac{1}{x}$ également par la règle sur la dérivée d'une composée.

□

Résultat

La dérivée de x^n vaut nx^{n-1} pour tout réel n, $x > 0$.

Démonstration.

On écrit que, pour tout $n \in \mathbb{R}$ et $x > 0$:

$$x^n = \exp(\ln(x^n)) = \exp(n \ln(x))$$

En dérivant cette dernière expression nous obtenons le résultat. $\square$

Contenu de la section

Questions de notations

Dans vos cours vous rencontrerez les notations suivantes pour la dérivée d'une fonction f en un point a :

- $f'(a)$
- $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$

Ou, ayant écrit $y = f(x)$:

- $y'(a)$
- $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(a)$

Dérivées d'ordres successifs

Supposons

- f est dérivable dans un intervalle ouvert $]a,b[$, et
- sa dérivée f' est aussi dérivable dans $]a,b[$,

alors on définit la *dérivée seconde*, notée f'' par :

$$f''(x) = (f')'(x); \qquad x \in \,]a,b[$$

Si f'' admet à son tour une dérivée dans $]a,b[$, on l'appelle *dérivée troisième*, notée f''' ou $f^{\underline{3}}$ et ainsi de suite, c'est-à-dire

$$f^{\underline{(n+1)}} = (f^{\underline{n}})'$$

par récurrence, pour tout n.

Contenu de la section

Contenu de la section

Définition

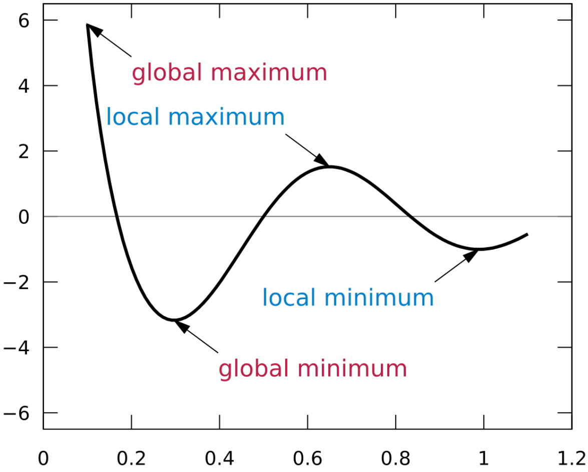
Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction réelle et a un point de son domaine, qu'on note encore $\operatorname{dom} f = A$. Ce point est

- un *minimum* global de f si $f(a) \leq f(x)$ pour tout $x \in \operatorname{dom} f$;
- un *maximum* global de f si $f(a) \geq f(x)$ pour tout $x \in \operatorname{dom} f$;
- un *minimum local* de f s'il existe $\delta > 0$ tel que $f(a) \leq f(x)$ pour tout $x \in \left]a-\delta, a+\delta\right[\cap \operatorname{dom} f$;
- un *maximum local* de f s'il existe $\delta > 0$ tel que $f(a) \geq f(x)$ pour tout $x \in \left]a-\delta, a+\delta\right[\cap \operatorname{dom} f$.

Un *extremum*, qui peut être local ou global, est un point qui est soit un maximum, soit un minimum.

Quand on dit que a est un minimum local de f, on entend que a n'est un minimum que dans une petite région autour de a: si on s'éloigne d'autres minimums (de valeur inférieure!) peuvent apparaître.

Un dessin



Dans ce cas le point de maximum global de f est atteint à l'extrémité du domaine (et non à l'intérieur!).

La dérivées d'une fonction nous permet de détecter les éventuels points d'extremum:

Théorème (Extrema et dérivée)

Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. Si f est dérivable en a (en particulier : a est intérieur au domaine !) et a est un extremum local, alors $f'(a) = 0$.

En d'autres termes: la tangente en un point de maximum ou de minimum intérieur au domaine est horizontale. Comme le montre le dessin précédent, ce n'est plus le cas en général si l'extremum est atteint sur le bord du domaine.

Preuve du résultat « Extréma et dérivée ».

Soit $f : A \to \mathbb{R}$ et a un extremum **intérieur au domaine.** f est dérivable en a donc $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe. Procédons par l'absurde, et imaginons que $f'(a) > 0$ (ça marche pareil pour $f'(a) < 0$). Alors: il existe $\delta > 0$ pour lequel si $x \in]a-\delta, a+\delta[\setminus\{a\}$, l'inégalité $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$ est vraie. En particulier,

- si $a-\delta < x < a$ on a $x-a < 0$, donc $f(x)-f(a) < 0$ c'est-à-dire $f(x) < f(a)$, et
- si $a < x < a+\delta$, on a $x-a > 0$, donc $f(x)-f(a) > 0$ c'est-à-dire $f(x) > f(a)$.

Dès lors: $f(a)$ n'est **ni un minimum local, ni un maximum local.** C'est une contradiction. $\square$

Remarque

On a effectivement utilisé le fait que a est intérieur au domaine de manière cruciale! Voyez-vous où ?

Exemple

- Si $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}$, alors f admet un minimum en $a = 0$, mais a n'est pas intérieur au domaine !
- Si $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto x$, alors f admet un minimum en $a = 0$, mais a n'est pas intérieur au domaine ! Si on prolongeait f aux valeurs négatives le minimum disparaîtrait d'ailleurs.
- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|$, alors f admet un minimum en $a = 0$, mais f n'est pas dérivable en a !
- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$, alors $f'(0) = 0$, mais 0 n'est pas un extrémum !

Le résultat précédent donne donc seulement une condition suffisante: on peut avoir des extremums sans être dérivable (comme $x \mapsto |x|$) et on peut avoir une dérivée nulle sans avoir d'extremum (comme $x \mapsto x^3$). Ça reste un résultat très utile en pratique!

Signe de la limite

Dans la preuve précédente on a utilisé le résultat suivant:

Lemme

Soit $g : A \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. Si la limite $\lim_{x\to a} g(x)$ existe et vaut $L > 0$, alors il existe δ tel que pour tout $x \in]a-\delta, a+\delta[\setminus\{a\}$, l'inégalité $g(x) > 0$ est vérifiée.

Autrement dit: si la limite de g en a est strictement positive, les valeurs de g « suffisamment près de a » sont encore strictement positives.

Démonstration.

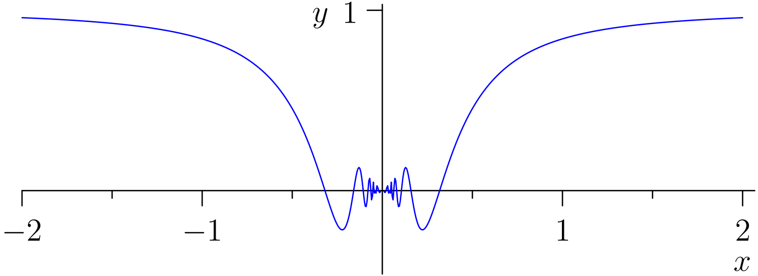
La preuve est laissée en exercice. **Indication:** écrivez la définition rigoureuse de la limite (avec les et les δ) et choisissez la valeur $\epsilon = L$. Qu'est-ce que ça dit sur les valeurs de $g(x)$? $\square$

Remarque

Ce n'est vrai que si la limite est strictement positive! Si g est une fonction réelle pour laquelle $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, il est *possible* que $g(x) < 0$ pour des valeurs de x arbitrairement proches de 0 !

Exemple

Pour $g(x) = x\sin(1/x)$, on a $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$.



Néanmoins, il n'existe pas d'intervalle autour de 0 dans lequel g serait positive: elle oscille indéfiniment en prenant des valeurs de plus en plus petites.

Théorème de Rolle

Ce théorème dit que, sous des conditions naturelles, une fonction dérivable admet toujours un point intérieur de dérivée nulle:

Théorème (Théorème de Rolle)

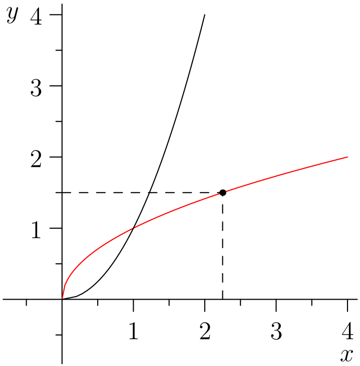
Soit f une fonction réelle continue sur un intervalle $[a,b]$ (avec $a < b$) et dérivable dans $]a,b[$. Si $f(a) = f(b)$, alors il existe un nombre $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration.

f est continue sur l'intervalle **fermé** $[a,b]$, donc admet un minimum $f(u)$ et un maximum $f(v)$ pour certains $u,v \in [a,b]$.
Si u et v sont tous les deux sur les bords (a et b), alors f est constante, puisqu'on suppose $f(a) = f(b)$.
Supposons donc que u ou v est dans $]a,b[$. Disons u (ça serait pareil si c'était v). Mais alors f atteint un minimum en un point intérieur à son domaine (où elle est dérivable), et donc $f'(u) = 0$! □

Un contre-exemple

Attention, dans le théorème de Rolle toutes les hypothèses sont essentielles! Voici par exemple les graphes de $x \mapsto \sqrt{x}$ (en rouge) et $x \mapsto x^2$ (en noir).



Peu importe l'intervalle $[0,a], a > 0$ qu'on choisira, il n'existe pas de point $c \in]0,a[$ où leur dérivée s'annule. Ceci car les valeurs en 0 et en a ne sont pas les mêmes.

Théorème des accroissements finis

Dans le cas où $f(a)$ et $f(b)$ sont différentes (et le théorème de Rolle ne s'applique pas) on peut quand même dire quelque chose:

Théorème (Théorème des accroissements finis)

Soit f continue sur $[a,b]$ et dérivable dans $]a,b[$. Alors il existe un nombre $c \in]a,b[$ tel que

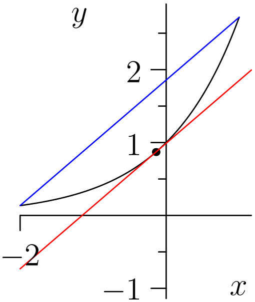
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

On ne donnera pas la preuve ici.

Théorème des accroissements finis: interprétation géométrique

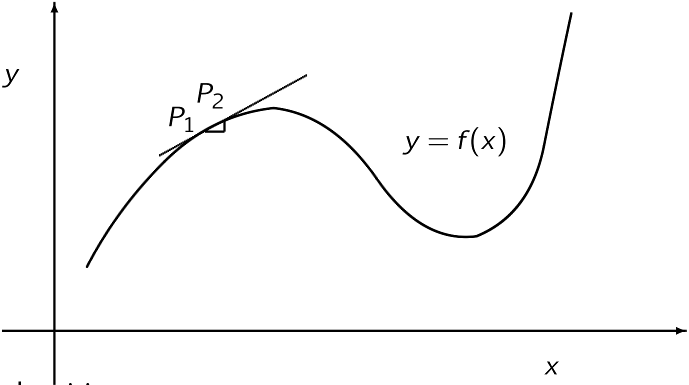
Remarque

Pour paraphraser le résultat précédent : il existe toujours un point du graphe en lequel la tangente est parallèle à la droite liant $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.



Contenu de la section

Nous avons introduit le nombre dérivé comme la pente de la tangente (géométrique) au graphe de la fonction.



Intuitivement,

- si la dérivée est positive, la fonction doit donc « monter » (être localement croissante),
- si la dérivée est négative, la fonction doit donc « descendre » (être localement décroissante).

On va « plus ou moins » montrer ça maintenant. Dans le théorème suivant, « presque tout point » signifiera « en tout point sauf éventuellement un nombre fini ».

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Supposons de plus que f est dérivable en presque tout point de I.

- *Si $f'(x) > 0$ pour presque tout $x \in I$, alors f est strictement croissante sur I;*
- *$f'(x) \geq 0$ pour presque tout $x \in I$ si et seulement si f est croissante sur I.*

Similairement, lorsque $f'(x) \leq 0$, la fonction f est (strictement) décroissante.

Démonstration.

Pour simplifier, dans la preuve nous supposons que f est dérivable partout dans l'intérieur de l'intervalle I.

On prouve uniquement le premier point : si $f'(x) > 0$ pour tout x, alors f est strictement croissante.

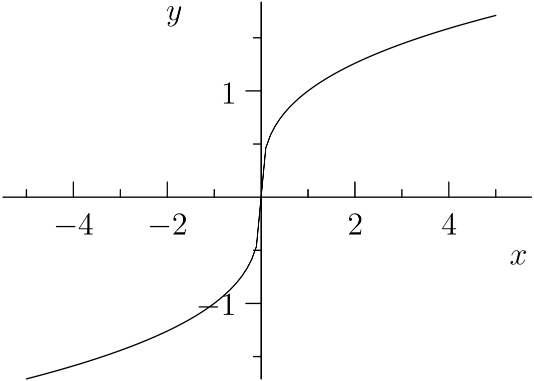
Prenons donc $x < y$. Comme f est continue sur l'intervalle $[x,y]$ et dérivable sur l'ouvert $]x,y[$, on peut appliquer la formule des accroissements finis, et en déduire l'existence de $c \in]x,y[$ avec

$$f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Or $f'(c) > 0$ et $y - x > 0$, dès lors $f(y) > f(x)$ également. C'est-à-dire que f est strictement croissante.

Exemple

La fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée $x \mapsto \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}$, qui est clairement strictement positive, **sauf en** 0 où elle n'existe pas.



En 0, la tangente est verticale, ce qui explique que la dérivée n'existe pas (le taux d'accroissement a une limite infinie).

Un exemple

Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

On remarque que f s'annule en $x = 0$ et nulle part ailleurs.
Sa dérivée vaut

$$f'(x) = \frac{(x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2+1)^2}$$

On en déduit que la dérivée s'annule en $x = \pm 1$, est positive entre ces valeurs et négative en dehors.
f admet donc un minimum en -1 (valeur : $f(-1) = -1/2$)), et un maximum en 1 (valeur : 1/2).
On note de plus que f est une fonction impaire.
Enfin, on note que si $x \to +\infty$, alors $f(x) = \frac{1/x}{1+1/x^2} \to 0/1 = 0$.
Toutes ces informations donnent une idée approximative du graphe.

Contenu de la section

Le théorème suivant est une règle pratique pour calculer certaines limites (formes indéterminées) facilement.

Théorème (Règle de l'Hospital)

Supposons que f et g soient dérivables sur $]a-\delta, a+\delta[$ et $g'(x) \neq 0$ en tout $x \in]a-\delta, a+\delta[$ (sauf peut-être pour $x = a$). Si

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to a} g(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

alors

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Remarque

Le théorème reste valable si $\lim_{x \to a} f(x)$ et $\lim_{x \to a} g(x)$ sont toutes les deux infinies, et également si la limite est prise en $\pm\infty$ au lieu d'être prise en un réel a.

La démonstration est omise.

Exemples

Exemple

- Exemple avec une limite infinie en l'infini :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 \ln(x)}{x^2+1} \overset{\infty}{\underset{\infty}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{2x\ln(x)+x}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\ln(x)+1}{2} = \infty$$

- Exemple avec une limite 0/0 en $a = 1$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x^3+7}-2}{x^3+3x^2-2x-2} \overset{0}{\underset{0}{=}} \lim_{x\to 1} \frac{1/3(x^3+7)^{-2/3}3x^2}{3x^2+6x-2}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x^3+7)^{-2/3}x^2}{3x^2+6x-2}$$

$$= \frac{1/4}{7} = \frac{1}{28}$$

Exemples II

Exemple

- Un exemple sans fraction (elle est cachée!)
$$\lim_{x\to 0} x\ln(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x)}{1/x} = \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0} -x = 0$$
- Une conséquence avec un exposant
$$\lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} \exp\left(\ln(x^x)\right) = \lim_{x\to 0} \exp\left(x\ln(x)\right) = \exp 0 = 1$$