Quelques précisions sur le test du 31 Octobre:

- En amphi Janson (Bâtiment J): ce n'est pas la salle habituelle!
- C'est un QCM.
- Il n'y aura pas de question théorique (mais: connaître le cours sera indispensable pour résoudre les exercices!)
- Le programme du test:
  - **Cours:** Tout ce qui précède le chapitre sur les limites: logique, combinatoire, fonctions réelles, trigonometrie, géométrie (produits scalaire et vectoriel, équations de plans et de droites, etc...)
  - **Exercices:** tout ce que vous ferez jusqu'à la fin de la semaine 6 (cette semaine!) – qui correspond aux cours ci-dessus

Contenu de la section

Rappels

La semaine dernière on a vu:

- Comment dériver des produits, sommes, des fonctions composées et des puissances.
- Si $f : A \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable, ses extremum intérieurs (minimum ou maximum, local ou global, mais toujours en des points intérieurs au domaine) se trouvent en les points où f' s'annule.
- Le théorème de Rolle: si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dérivable avec $f(a) = f(b)$, alors il existe un point de minimum ou maximum intérieur pour f (et donc un point $c \in]a,b[$ où $f(c) = 0$).

Contenu de la section

Théorème des accroissements finis

Dans le cas où $f(a)$ et $f(b)$ sont différents (et le théorème de Rolle ne s'applique pas) on peut quand même dire quelque chose:

Théorème (Théorème des accroissements finis)

Soit f continue sur $[a,b]$ et dérivable dans $]a,b[$. Alors il existe un nombre $c \in]a,b[$ tel que

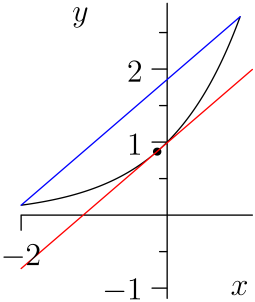
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

On ne donnera pas la preuve ici.

Théorème des accroissements finis: interprétation géométrique

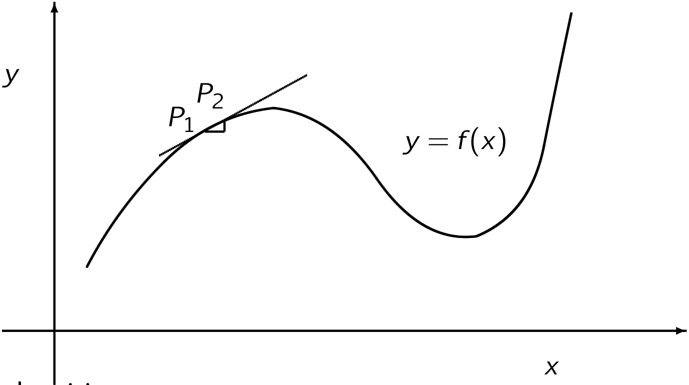
Remarque

Le résultat précédent dit juste: il existe toujours un point du graphe en lequel la tangente est parallèle à la droite liant $(a,f(a))$ et $(b,f(b))$.



Contenu de la section

Nous avons introduit le nombre dérivé comme la pente de la tangente (géométrique) au graphe de la fonction.



Intuitivement,

- si la dérivée est positive, la fonction doit donc « monter » (être localement croissante),
- si la dérivée est négative, la fonction doit donc « descendre » (être localement décroissante).

Énoncé précis

Dans le théorème suivant, « presque tout point » signifiera « en tout point sauf éventuellement un nombre fini ».

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Supposons de plus que f est dérivable en presque tout point de I.

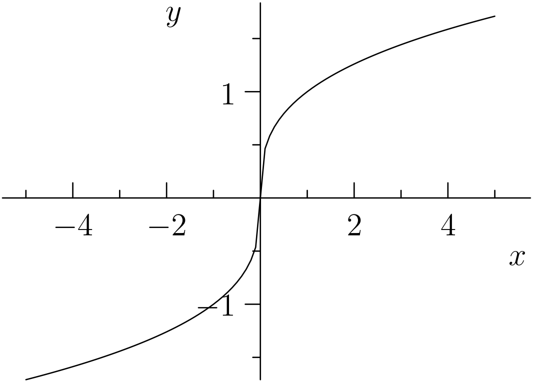
- *Si $f'(x) > 0$ pour presque tout $x \in I$, alors f est strictement croissante sur I;*
- *$f'(x) \geq 0$ pour presque tout $x \in I$ si et seulement si f est croissante sur I.*

Similairement, lorsque $f'(x) \leq 0$, la fonction f est (strictement) décroissante.

On omet la preuve de ce théorème, qui utilise le théorème des accroissements finis.

Exemple

La fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée $x \mapsto \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}$, qui est clairement strictement positive, **sauf en** 0 où elle n'existe pas.



En 0, la tangente est verticale, ce qui explique que la dérivée n'existe pas (le taux d'accroissement a une limite infinie).

Un exemple

Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

On remarque que f s'annule en $x = 0$ et nulle part ailleurs.

Sa dérivée vaut

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 1) - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

On en déduit que la dérivée s'annule en $x = \pm 1$, est positive entre ces valeurs et négative en dehors.

f admet donc un minimum en -1 (valeur : $f(-1) = -1/2$)), et un maximum en 1 (valeur : $1/2$).

On note de plus que f est une fonction impaire.

Enfin, on note que si $x \to +\infty$, alors $f(x) = \frac{1/x}{1+1/x^2} \to 0/1 = 0$.

Toutes ces informations donnent une idée approximative du graphe.

Contenu de la section

Le théorème suivant est une règle pratique pour calculer certaines limites (formes indéterminées) facilement.

Théorème (Règle de l'Hospital)

Supposons que f *et* g *soient dérivables sur* $]a-\delta, a+\delta[$ *et* $g'(x) \neq 0$ *en tout* $x \in]a-\delta, a+\delta[$ *(sauf peut-être pour* $x = a$*). Si*

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to a} g(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

alors

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Remarque

Le théorème reste valable si $\lim_{x \to a} f(x)$ et $\lim_{x \to a} g(x)$ sont toutes les deux infinies, et également si la limite est prise en $\pm\infty$ au lieu d'être prise en un réel a.

La démonstration est omise.

Exemples

Exemple

- Exemple avec une limite infinie en l'infini :
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 \ln(x)}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x\ln(x)+x}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\ln(x)+1}{2} = \infty$$
- Un exemple sans fraction (elle est cachée!)
$$\lim_{x\to 0} x\ln(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x)}{1/x} = \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0} -x = 0$$

Contenu de la section

Contenu de la section

La *dérivée seconde* d'une fonction f en un point a est liée à la concavité en a, c'est-à-dire la tendance qu'ont les tangentes de f d'être

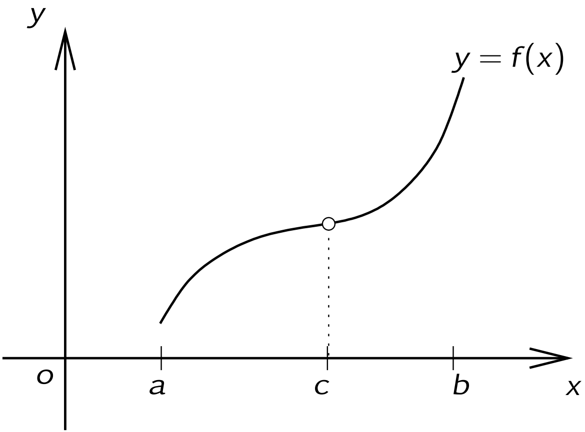
- sous le graphe de f (concavité tournée vers le haut) ou
- au dessus du graphe de f (concavité tournée vers le bas).

Plus précisément:

- Si $f''(a) > 0$, la dérivée est croissante, donc la pente de la tangente a tendance à remonter près de a, donc la concavité en a est tournée vers le haut !
- Inversement, $f''(a) < 0$ indique une concavité tournée vers le bas.

Définition

Lorsque f'' *change* de signe en c (et souvent s'y annule), alors la concavité du graphe de f change en c et on dit que c est un *point d'inflexion* de f.



Sur $[c,b]$ on a $f''(x) > 0$, et sur $[a,c]$ on a $f''(x) < 0$. Et $f''(c) = 0$.

Exemples

Exemple

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3$. Alors $f'(x) = 3x^2$ et $f''(x) = 6x$. Ainsi, la concavité de f est vers le haut sur $]0, +\infty[$ et vers le bas sur $]-\infty, 0[$. Et 0 est point d'inflexion.
- $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \ln(x)$: sa concavité est toujours vers le bas. En effet: $g'(x) = \frac{1}{x}$ et donc
$$g''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0.$$

Contenu de la section

Définition

Une asymptote est une droite de laquelle le graphe d'une fonction donnée « se rapproche ».

On distingue généralement les asymptotes

- « verticales »,
- « horizontales » et
- « obliques ».

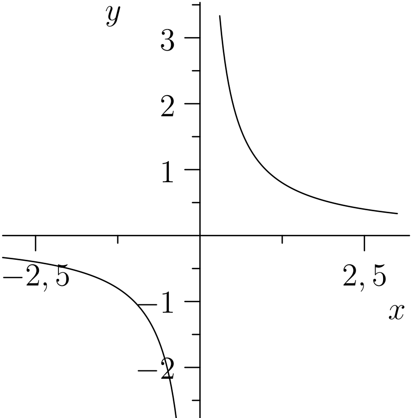
Dans la suite nous considérons une fonction réelle f.

Définition

La droite d'équation $x = a$ est une *asymptote verticale* au graphe de f si

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$$

Exemple



La droite $x = 0$ est asymptote verticale au graphe de $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Définition

La droite d'équation $y = b$ est une *asymptote horizontale* au graphe de f lorsque

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = b$$

Exemple

- La droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale (tant en $+\infty$ qu'en $-\infty$) au graphe de $x \mapsto \frac{1}{x}$
- La droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale (tant en $+\infty$ qu'en $-\infty$) au graphe de $x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$

Asymptote oblique

Définition

La droite d'équation $y = mx + b$ où $m \neq 0$ est une *asymptote oblique* au graphe de f si

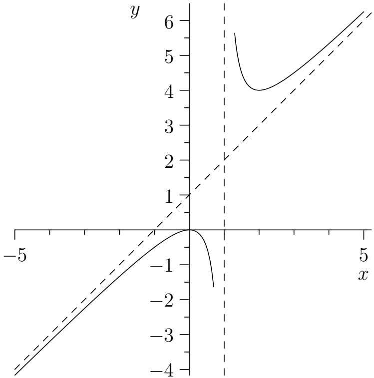
$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to +\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$$

C'est le fait que $m \neq 0$ qui justifie l'adjectif « oblique ». Lorsque $m = 0$, on retrouve le cas d'une asymptote horizontale.

Exemple

La droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique au graphe de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}$$



Question

Prouvez que la droite $y = x + 1$ est asymptote oblique en $\pm\infty$ au graphe de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

Démonstration.

On revient à la définition et on montre que $f(x) - (x+1)$ a pour limite 0 en $\pm\infty$. On calcule:

$$f(x) - (x+1) = \frac{x^2}{x-1} - \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \frac{x^2 - (x^2-1)}{x-1} = \frac{1}{x-1}.$$

Et par les règles usuelles du calcul des limites,

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x-1} = 0.$$

$\square$

Comment déterminer les asymptotes obliques?

La proposition suivante permet de calculer m et b lorsqu'ils existent.

Résultat

La droite $y = mx + b$, où $m \neq 0$, est asymptote oblique au graphe de f pour x tendant vers $+\infty$ si et seulement si

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0 \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx] = b$$

Concrètement: on calcule donc d'abord $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et, si elle est finie et non nulle, on calcule ensuite $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx]$. Les valeurs donnent l'équation des asymptotes.

Les fonctions n′ont pas toujours des asymptotes!

Exemple

Le cas de la fonction ln est subtil car

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

(en application de la règle de l′Hospital), mais

$$\lim_{x\to\infty} \ln x = +\infty.$$

Dès lors il n′y a en réalité pas d′asymptote horizontale, ni oblique !(Par contre il y a bien une asymptote verticale en $x = 0$.)

Contenu de la section

Motivation

On a vu comment les dérivées permettent de prédire les variations d'une fonction et sa concavité. Ce sont des informations globales.

En pratique, il est parfois difficile de calculer précisément les valeurs d'une fonction en un point donné, et on aurait juste besoin de connaître ces valeurs de manière approchée: on voudrait juste des informations locales.

Nous allons voir une manière canonique d'approcher une fonction au voisinage d'un point donné: via les Approximations de Taylor (aussi appelées: développements limités).

Contenu de la section

Définition

f est dérivable en a (intérieur à son domaine) si la limite suivante existe :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

En d'autres termes, il existe un réel, noté $f'(a)$, tel que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) = 0$$

Ce qu'on peut encore écrire:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - \Big[f(a) + f'(a)(x - a)\Big]}{x - a} = 0.$$

En notant $T(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$, cela revient à dire que

$f(x) - T(x)$ est un $o(x - a)$ pour $x \to a$.

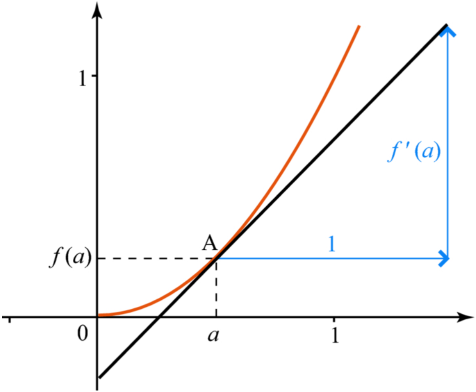
Que représente ce $T(x)$?

Remarque

Si f est dérivable au point a, la droite d'équation

$$\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$

est *la droite tangente au graphe de f au point $(a,f(a))$* ou *droite tangente de f en a*.



$T(x) = f(a)+f'(a)(x-a)$ est donc une fonction polynômiale de degré 1 dont le graphe est simplement la tangente au graphe de f au point $(a,f(a))$.

Polynôme de Taylor d'ordre 1

Le polynôme $T(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ est une bonne approximation de f près de $x = a$: si on note $R(x) = f(x) - T(x)$, on a vu que $R(x)$ tend vers 0 plus vite que $(x - a)$ pour $x \to a$, c'est-à-dire:

$$R(x) = o(x - a) \text{ lorsque } x \to a.$$

Définition

T défini par $T(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ est le *polynôme de Taylor d'ordre* 1 de la fonction f au point a.

T est alors le polynôme d'ordre 1 qui approche le mieux f près de a.

Questions de notations

Quand on écrit $f(x) = T(x) + o(x-a)$ on peut écrire :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$$

ou encore:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h)$$

où le $o(h)$ est pris lorsque $h \to 0$ dans le deuxième cas. On a en fait juste posé $h = x - a$.

Les physiciens écrivent parfois aussi:

$$f(a+\delta a) = f(a) + f'(a)\delta a + o(\delta a)$$

pour indiquer que δa est « une petite variation autour de a ».

Récapitulons

Remarque

- Idée générale : si f est une fonction quelconque on veut l'approcher, le mieux possible, par des fonctions plus simples: des polynômes.
- Si on essaye d'approcher par des polynômes de degré plus élevé, a-t-on une meilleure approximation ? Oui! (on va le voir dans un instant)
- Il n'est pas forcément possible de bien approcher f *partout*, donc on se contentera ici de l'approcher près d'un point a fixé dans le domaine.
- On pourrait aussi approcher f par autre chose que des polynômes, mais on ne le verra pas ici.