Informations sur le test de Mercredi 31 Octobre

Vous devez IMPÉRATIVEMENT vous munir de

- Votre carte d'étudiant ET carte d'identité
- Un stylo noir et des feuilles de papier

GSM, ordinateurs, calculatrices sont interdits.

Certains d'entre vous ont eu 8 séances de TP, d'autres 7. L'énoncé du test en tient compte.

Information: Guidance en mathématiques

Il existe à l'ULB un service de **Guidance en mathématiques.** Il sert à

- Répondre à vos question
  - Sur le cours de math F112
  - Sur les pré-requis du cours
- Vous ré-expliquer la matière du cours
- Vous guider dans les exercices du cours.

Les horaires et d'autres informations sur la guidance en maths se trouvent:

- Sur l'UV: chercher MATH Y029-Guidance en mathématique
- Sur GeHol: MATH Y029

Contenu de la section

Contenu de la section

Définition

f est dérivable en a (intérieur à son domaine) si la limite suivante existe :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

En d'autres termes, s'il existe un réel, noté $f'(a)$, tel que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) = 0$$

Ce qu'on peut encore écrire:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - \left[f(a) + f'(a)(x - a)\right]}{x - a} = 0.$$

En notant $T(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$, cela revient à dire que

$f(x) - T(x)$ est un $o(x - a)$ pour $x \to a$.

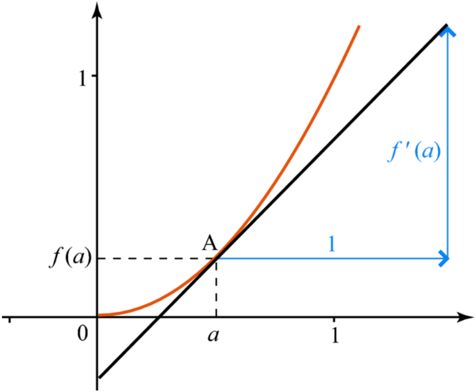
Que représente ce $T(x)$?

Remarque

Si f est dérivable au point a, la droite d'équation

$$\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$

est *la droite tangente au graphe de f au point* $(a,f(a))$ ou *droite tangente de f en a*.



$T(x) = f(a)+f'(a)(x-a)$ est donc une fonction polynômiale de degré (au plus) 1 dont le graphe est simplement la tangente au graphe de f au point $(a,f(a))$.

Polynôme de Taylor d'ordre 1

Le polynôme $T(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ est une bonne approximation de f près de $x = a$: si on note $R(x) = f(x) - T(x)$, on a vu que $R(x)$ tend vers 0 plus vite que $(x - a)$ pour $x \to a$, c'est-à-dire:

$$R(x) = o(x - a) \text{ lorsque } x \to a.$$

Définition

T défini par $T(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ est le *polynôme de Taylor d'ordre* 1 de la fonction f au point a.

T est alors le polynôme de degré (au plus) 1 qui approche le mieux f près de a.

Récapitulons

Remarque

- Idée générale : si f est une fonction quelconque on veut l'approcher, le mieux possible, par des fonctions plus simples: des polynômes.
- Si on essaye d'approcher par des polynômes de degré plus élevé, a-t-on une meilleure approximation ? Oui! (on va le voir dans un instant)
- Il n'est pas forcément possible de bien approcher f *partout*, donc on se contentera ici de l'approcher près d'un point a fixé dans le domaine.

Contenu de la section

But: de meilleures approximations

Nous voulons de meilleures approximations, c'est-à-dire que nous cherchons une fonction T_2 telle que

$$f(x) - T_2 \text{ tend vers 0 plus vite que } (x-a)^2$$

Pourquoi ce $(x-a)^2$ est une meilleure approximation? Parce que $(x-a)^2$ est bien plus petit que $(x-a)$ près de a: c'est ce qu'on avait écrit sous la forme:

$$(x-a)^2 = o(x-a) \text{ lorsque } x \to a.$$

(Ce qui est vrai car $\lim_{x\to a} \frac{(x-a)^2}{x-a} = 0$.)

Que choisir pour T_2? Réponse : Un polynôme d'ordre 2 bien choisi, le polynôme de taylor d'ordre 2 de f en a.

Polynôme de Taylor d'ordre 2

Définition

Le polynôme de Taylor d'ordre 2 de f en a est donné par:

$$T_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2.$$

C'est l'unique polynôme de degré (au plus) 2 dont les dérivées première et secondes en a coïncident avec celles de f. En effet:

$$T_2'(x) = f'(a) + f''(a)(x-a) \quad \text{donc } T_2'(a) = f'(a)$$

Et ensuite:

$$T_2''(x) = f''(a) \quad \text{donc } T_2''(a) = f''(a).$$

Un exemple

Question

Soit la fonction $f(x) = x^2$ définie sur $\mathbb{R}$. Déterminer son polynôme de Taylor d'ordre 2 en $a = 0$ et en $a = 1$.

On cherche à déterminer le polynôme de Taylor d'ordre 2 de f en $a = 0$ ou 1. On calcule alors:

$$f'(x) = 2x, \quad f''(x) = 2.$$

Donc

$$f'(0) = 0, \quad f''(0) = 2 \quad \text{et} \quad f'(1) = 2, \quad f''(1) = 2.$$

Le polynôme de Taylor de f à l'ordre 2 en 0 est donc

$$T_{2,0}(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} = x^2.$$

Celui en 1 est alors:

$$\begin{aligned} T(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + f''(1)\frac{(x-1)^2}{2!} \\ &= 1 + 2(x-1) + (x-1)^2. \end{aligned}$$

Questions de précision

Le fait d'approcher f par T_2 au voisinage de a se base sur les idées suivantes:

- Un polynôme est beaucoup plus simple à calculer qu'une fonction quelconque!
- Le polynôme T_2 est proche de f à l'ordre 2 au voisinage de a: ceci signifie que $f - T_2$,$(f - T_2)'$ et $(f - T_2)''$ tendent vers 0 lorsque $x \to a$. Et donc que
$$f(x) - T_2(x) = o\Big((x-a)^2\Big).$$
- Est-ce qu'on pourrait obtenir de cette manière n'importe quelle précision? Oui!

Polynôme de Taylor d'ordre n

Définition

Le polynôme de Taylor d'ordre n de f en a est T_n

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} f^{\underline{k}}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + \cdots + f^{\underline{n}}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} \end{aligned}$$

où $f^{\underline{k}}$ désigne la dérivée k-ème de f.

Remarque

T_n est à chaque fois obtenu avec une petite correction par rapport à T_{n-1}. Et les dérivées de f et de T_n en a coïncident jusqu'à l'ordre n:

$$(T_n - f)(a) = 0, (T_n - f)'(a) = 0, (T_n - f)''(a) = 0, \ldots, (T_n - f)^{\underline{n}}(a) = 0.$$

La fonction $T_n - f$ est donc « très plate » au voisinage de a. C'est d'ailleurs la motivation pour choisir T_n de cette forme!

Un autre exemple: la fonction sin

Écrivons le polynôme de Taylor de $f(x) = \sin x$ autour de $a = 0$ **à l'ordre** 4.

$$f'(x) = \cos x \qquad f''(x) = -\sin x \qquad f^{\underline{3}}(x) = -\cos x \qquad f^{\underline{4}}(x) = \sin x$$

Dès lors :

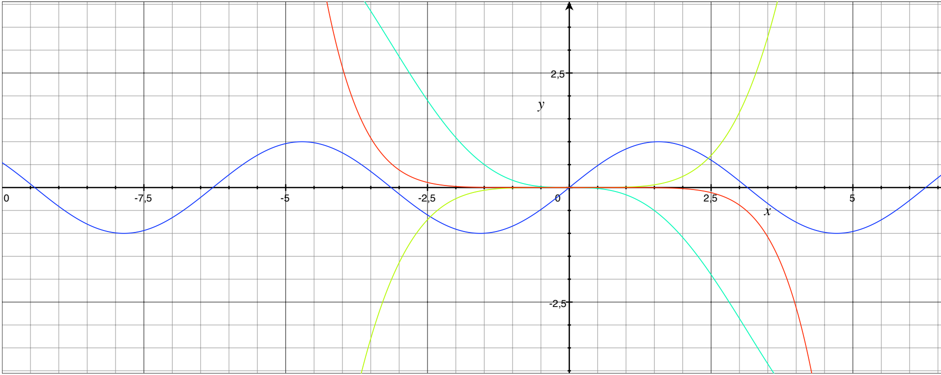
$$f(0) = 0 \qquad f'(0) = 1 \qquad f''(0) = 0 \qquad f^{\underline{3}}(0) = -1 \qquad f^{\underline{4}}(0) = 0$$

Et donc nous avons :

$$\begin{aligned}
T_0(x) &= 0 \\
T_1(x) &= 0 + 1 \cdot x = x \\
T_2(x) &= 0 + 1 \cdot x + 0 = x \\
T_3(x) &= 0 + 1 \cdot x + 0 + (-1) \cdot \frac{x^3}{3!} = x - \frac{x^3}{6} \\
T_4(x) &= 0 + 1 \cdot x + 0 + (-1) \cdot \frac{x^3}{3!} + 0 = x - \frac{x^3}{6}
\end{aligned}$$

Une illustration

Voyons maintenant à quoi ressemble la fonction de reste $R_n = f - T_n$ pour différentes valeurs de n :



Encore un exemple: la fonction ln

Prenons maintenant $f(x) = \ln x$ et $a = 1$.

$$f'(x) = x^{-1} \qquad f''(x) = -x^{-2} \qquad f'''(x) = 2x^{-3} \qquad f''''(x) = -6x^{-4}$$

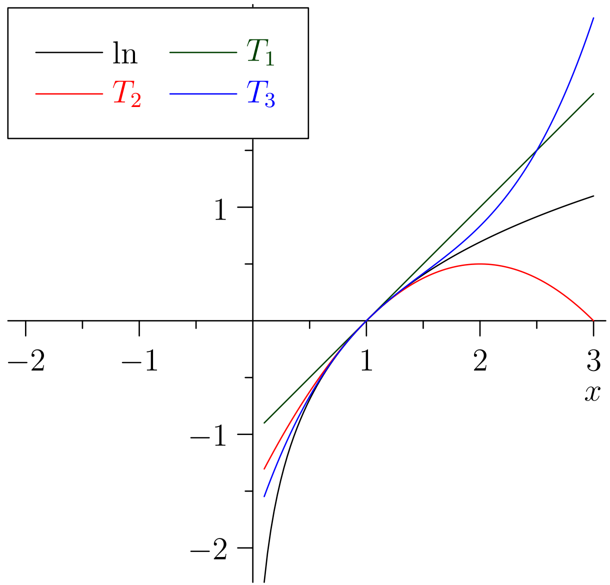
Évaluons maintenant les dérivées de f en $a = 1$:

$$f(1) = 0 \qquad f'(1) = 1 \qquad f''(1) = -1 \qquad f'''(1) = 2 \qquad f'''''(1) = -6$$

Les polynômes de Taylor de $f(x) = \ln x$ en $a = 1$ sont donc :

$$T_1(x) = 0 + 1 \cdot (x-1) = x - 1,$$

$$\begin{aligned} T_2(x) &= 0 + 1 \cdot (x-1) - 1\frac{(x-1)^2}{2} \\ &= x - 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2, \\ T_3(x) &= 0 + 1 \cdot (x-1) - 1\frac{(x-1)^2}{2} + 2\frac{(x-1)^3}{6} \\ &= x - 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3. \end{aligned}$$


ln
T_1
T_2
T_3
1
−1
−2
−2
−1
1
2
3
x

Et pour un ordre quelconque $n \in \mathbb{N}$?

En calculant les dérivées de $f(x) = \ln(x)$ on devine une formule générale pour $f^{\underline{k}}(x)$, valable pour $k \geqslant 1$:

$$f^{\underline{k}}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!\, x^{-k}.$$

On en déduit la formule suivante pour le polynôme de Taylor d'ordre n de ln, valable pour tout entier $n \geq 1$:

$$T_n(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + \cdots \pm \frac{1}{n}(x-1)^n.$$

(Essayez de démontrer cette formule!)

Contenu de la section

Théorème de Taylor

Le théorème suivant exprime que le polynôme de Taylor est la meilleure approximation polynomiale de f près de a :

Théorème

Supposons que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est n fois dérivable en a, où n est un entier $n \geq 1$. Le polynôme de Taylor T_n est l'unique polynôme de degré inférieur à n vérifiant:

$$f(x) - T_n(x) = o\Big((x-a)^n\Big) \quad \textit{lorsque } x \to a.$$

Nous omettons la preuve de ce théorème.

C'est la meilleure, mais quelle est sa précision?

Calcul précis du reste

Prenons x proche de a. Comment évaluer le reste

$$R_n(x) := f(x) - T_n(x)?$$

Théorème (Formule du reste de Lagrange)

Supposons que f est dérivable $(n+1)$-fois dans un intervalle $I =]a-\delta, a+\delta[$ et soit $T_{a,n}$ son polynôme de Taylor d'ordre n en a . Alors pour chaque $x \in I$, il existe un réel t entre a et x tel que :

$$f(x) - T_{a,n}(x) = f^{\underline{n+1}}(t) \cdot \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

(t dépend donc de x !). C'est-à-dire:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + f^{\underline{n}}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + f^{\underline{n+1}}(t) \cdot \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

pour un t entre a et x.

Très concrètement: ce théorème sert à estimer précisément l'erreur commise quand on approche f par les polynômes de Taylor!

Exemple d'utilisation du théorème

Pour $f(x) = \ln x$ et $a = 1$. Objectif: calculer $\ln(2)$. On écrit en développement de Taylor de $\ln 2$ à un ordre quelconque:

$$\ln 2 = T_n(2) + R_n(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + R_n(2).$$

Par le théorème précédent on sait qu'il existe un nombre réel t entre $a = 1$ et $x = 2$ tel que

$$R_n(2) = \frac{(-1)^n}{n+1} t^{-n-1}.$$

Remarque

t est positif et donc le signe de l'erreur est $(-1)^n$.

- n est pair $\Longrightarrow T_n$ approche $\ln 2$ par en-dessous ;
- n est impair $\Longrightarrow$ on approche $\ln 2$ par au-dessus.

La quantité $|R_n(2)|$ décroît avec t: dans le pire des cas $(t = 1)$ l'erreur absolue vaut alors $\frac{1}{n+1}$. On peut donc écrire : $|R_n(2)| < \frac{1}{n+1}$.

Un exemple où le calcul est plus précis

Exemple

Dans le cas de $f(x) = \sin(x)$ et $a = 0$, on peut calculer $f(1)$ avec une bonne précision très rapidement. Le reste s'écrit

$$R_n(x) = f^{\underline{n+1}}(t) \cdot \frac{(1-0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

pour un certain t entre 0 et 1. Mais cette fois $f^{\underline{n+1}}(t)$ est toujours inférieur à 1 en valeur absolue (car les dérivées successives de sin sont cos, $-$sin, $-$cos, sin, etc.). On en déduit

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!}$$

ce qui diminue très rapidement : $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \frac{1}{720}, \frac{1}{5040}$, il suffit donc de quelques termes pour obtenir une précision de plusieurs décimales.