Contenu de la section

Contenu de la section

1. Primitives
   - Motivation
     - Vitesse et position
     - Équation aux dérivées pour une population
   - Définition
   - Notations

Mouvement d'un mobile

Considérons une droite munie d'un repère cartésien, c'est-à-dire une droite graduée.

Mouvement d'un mobile

Considérons une droite munie d'un repère cartésien, c'est-à-dire une droite graduée.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto f(t)$ une fonction dont la valeur $f(t)$ représente la coordonnée d'un mobile à l'instant t le long de cette droite.

Mouvement d'un mobile

Considérons une droite munie d'un repère cartésien, c'est-à-dire une droite graduée.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto f(t)$ une fonction dont la valeur $f(t)$ représente la coordonnée d'un mobile à l'instant t le long de cette droite.

Exemple

Si on note $f(t)$ la hauteur d'un yoyo au cours du temps, on pourrait modéliser ceci par $f(t) = cos(t)$.

Mouvement d'un mobile

Considérons une droite munie d'un repère cartésien, c'est-à-dire une droite graduée.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto f(t)$ une fonction dont la valeur $f(t)$ représente la coordonnée d'un mobile à l'instant t le long de cette droite.

Exemple

Si on note $f(t)$ la hauteur d'un yoyo au cours du temps, on pourrait modéliser ceci par $f(t) = cos(t)$.

- À l'instant $t = 0$, le mobile est à hauteur 1,

Mouvement d'un mobile

Considérons une droite munie d'un repère cartésien, c'est-à-dire une droite graduée.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto f(t)$ une fonction dont la valeur $f(t)$ représente la coordonnée d'un mobile à l'instant t le long de cette droite.

Exemple

Si on note $f(t)$ la hauteur d'un yoyo au cours du temps, on pourrait modéliser ceci par $f(t) = cos(t)$.

- À l'instant $t = 0$, le mobile est à hauteur 1,
- puis descend pour arriver à hauteur -1,

Mouvement d'un mobile

Considérons une droite munie d'un repère cartésien, c'est-à-dire une droite graduée.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto f(t)$ une fonction dont la valeur $f(t)$ représente la coordonnée d'un mobile à l'instant t le long de cette droite.

Exemple

Si on note $f(t)$ la hauteur d'un yoyo au cours du temps, on pourrait modéliser ceci par $f(t) = cos(t)$.

- À l'instant $t = 0$, le mobile est à hauteur 1,
- puis descend pour arriver à hauteur -1,
- remonte ensuite pour retourner à hauteur 1,

Mouvement d'un mobile

Considérons une droite munie d'un repère cartésien, c'est-à-dire une droite graduée.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto f(t)$ une fonction dont la valeur $f(t)$ représente la coordonnée d'un mobile à l'instant t le long de cette droite.

Exemple

Si on note $f(t)$ la hauteur d'un yoyo au cours du temps, on pourrait modéliser ceci par $f(t) = cos(t)$.

- À l'instant $t = 0$, le mobile est à hauteur 1,
- puis descend pour arriver à hauteur -1,
- remonte ensuite pour retourner à hauteur 1,
- et ainsi de suite...

Mouvement d'un mobile

Considérons une droite munie d'un repère cartésien, c'est-à-dire une droite graduée.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto f(t)$ une fonction dont la valeur $f(t)$ représente la coordonnée d'un mobile à l'instant t le long de cette droite.

Exemple

Si on note $f(t)$ la hauteur d'un yoyo au cours du temps, on pourrait modéliser ceci par $f(t) = cos(t)$.

- À l'instant $t = 0$, le mobile est à hauteur 1,
- puis descend pour arriver à hauteur -1,
- remonte ensuite pour retourner à hauteur 1,
- et ainsi de suite...

Mouvement d'un mobile

Considérons une droite munie d'un repère cartésien, c'est-à-dire une droite graduée.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto f(t)$ une fonction dont la valeur $f(t)$ représente la coordonnée d'un mobile à l'instant t le long de cette droite.

Exemple

Si on note $f(t)$ la hauteur d'un yoyo au cours du temps, on pourrait modéliser ceci par $f(t) = cos(t)$.

- À l'instant $t = 0$, le mobile est à hauteur 1,
- puis descend pour arriver à hauteur -1,
- remonte ensuite pour retourner à hauteur 1,
- et ainsi de suite...

Dans cette situation, la quantité

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

représente la distance parcourue rapportée au temps passé à la parcourir

Mouvement d'un mobile

Considérons une droite munie d'un repère cartésien, c'est-à-dire une droite graduée.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto f(t)$ une fonction dont la valeur $f(t)$ représente la coordonnée d'un mobile à l'instant t le long de cette droite.

Exemple

Si on note $f(t)$ la hauteur d'un yoyo au cours du temps, on pourrait modéliser ceci par $f(t) = cos(t)$.

- À l'instant $t = 0$, le mobile est à hauteur 1,
- puis descend pour arriver à hauteur -1,
- remonte ensuite pour retourner à hauteur 1,
- et ainsi de suite...

Dans cette situation, la quantité

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

représente la distance parcourue rapportée au temps passé à la parcourir : c'est la vitesse moyenne du mobile entre les instants a et b.

Remarque

Notons que le signe de la vitesse moyenne indique le sens du déplacement !

Remarque

Notons que le signe de la vitesse moyenne indique le sens du déplacement !

Lorsque a et b sont de plus en proches, la vitesse moyenne tend vers la quantité

$$\lim_{b\to a} \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(a).$$

Remarque

Notons que le signe de la vitesse moyenne indique le sens du déplacement !

Lorsque a et b sont de plus en proches, la vitesse moyenne tend vers la quantité

$$\lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(a).$$

C'est la *vitesse instantanée* du mobile à l'instant a.

Remarque

Notons que le signe de la vitesse moyenne indique le sens du déplacement !

Lorsque a et b sont de plus en proches, la vitesse moyenne tend vers la quantité

$$\lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(a).$$

C'est la *vitesse instantanée* du mobile à l'instant a.

La vitesse instantanée est la dérivée de la position par rapport au temps.

Remarque

Notons que le signe de la vitesse moyenne indique le sens du déplacement !

Lorsque a et b sont de plus en proches, la vitesse moyenne tend vers la quantité

$$\lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(a).$$

C'est la *vitesse instantanée* du mobile à l'instant a.

> La vitesse instantanée est la dérivée de la position par rapport au temps.

Remarque

Connaissant la vitesse instantanée en chaque instant, comment retrouver la position ?

Remarque

Notons que le signe de la vitesse moyenne indique le sens du déplacement !

Lorsque a et b sont de plus en proches, la vitesse moyenne tend vers la quantité

$$\lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(a).$$

C'est la *vitesse instantanée* du mobile à l'instant a.

La vitesse instantanée est la dérivée de la position par rapport au temps.

Remarque

Connaissant la vitesse instantanée en chaque instant, comment retrouver la position ? Il faudrait, connaissant la dérivée d'une fonction, être capable de retrouver la fonction elle-même.

1 Primitives

- Motivation
  - Vitesse et position
  - Équation aux dérivées pour une population
- Définition
- Notations

Évolution d'une population

Question

On considère une population de bactéries au cours du temps, et on note $p(t)$ le nombre de bactéries à l'instant t.

Évolution d'une population

Question

On considère une population de bactéries au cours du temps, et on note $p(t)$ le nombre de bactéries à l'instant t. On suppose que le taux de croissance de ces bactéries est lié à deux facteurs : le nombre de bactéries, et les ressources disponibles.

Évolution d'une population

Question

On considère une population de bactéries au cours du temps, et on note $p(t)$ le nombre de bactéries à l'instant t. On suppose que le taux de croissance de ces bactéries est lié à deux facteurs : le nombre de bactéries, et les ressources disponibles. On peut modéliser cela par l'équation

$$p'(t) = p(t)(K - p(t))$$

où K représente les ressources disponibles.

Évolution d'une population

Question

On considère une population de bactéries au cours du temps, et on note $p(t)$ le nombre de bactéries à l'instant t. On suppose que le taux de croissance de ces bactéries est lié à deux facteurs : le nombre de bactéries, et les ressources disponibles. On peut modéliser cela par l'équation

$$p'(t) = p(t)(K - p(t))$$

où K représente les ressources disponibles.

Quelles sont les fonctions qui vérifient cette équation pour toute valeur de t ?

Évolution d'une population

Question

On considère une population de bactéries au cours du temps, et on note $p(t)$ le nombre de bactéries à l'instant t. On suppose que le taux de croissance de ces bactéries est lié à deux facteurs : le nombre de bactéries, et les ressources disponibles. On peut modéliser cela par l'équation

$$p'(t) = p(t)(K - p(t))$$

où K représente les ressources disponibles.

Quelles sont les fonctions qui vérifient cette équation pour toute valeur de t ?

Remarque

Une telle équation est une équation différentielle (elle lie la fonction à sa propre dérivée).

Évolution d'une population

Question

On considère une population de bactéries au cours du temps, et on note $p(t)$ le nombre de bactéries à l'instant t. On suppose que le taux de croissance de ces bactéries est lié à deux facteurs : le nombre de bactéries, et les ressources disponibles. On peut modéliser cela par l'équation

$$p'(t) = p(t)(K - p(t))$$

où K représente les ressources disponibles.

Quelles sont les fonctions qui vérifient cette équation pour toute valeur de t ?

Remarque

Une telle équation est une équation différentielle (elle lie la fonction à sa propre dérivée). On les étudiera plus tard dans le cours.

Réponse

Supposons que le nombre d'individus ne retombe jamais à 0 ($p(t) > 0$) et ne dépasse jamais les ressources disponibles ($p(t) \neq K$).

Réponse

Supposons que le nombre d'individus ne retombe jamais à 0 ($p(t) > 0$) et ne dépasse jamais les ressources disponibles ($p(t) \neq K$). Alors l'équation $p'(t) = p(t)(K - p(t))$ devient :

Réponse

Supposons que le nombre d'individus ne retombe jamais à 0 ($p(t) > 0$) et ne dépasse jamais les ressources disponibles ($p(t) \neq K$). Alors l'équation $p'(t) = p(t)(K - p(t))$ devient :

$$\frac{p'(t)}{p(t)(K - p(t))} = 1$$

Réponse

Supposons que le nombre d'individus ne retombe jamais à 0 ($p(t) > 0$) et ne dépasse jamais les ressources disponibles ($p(t) \neq K$). Alors l'équation $p'(t) = p(t)(K - p(t))$ devient :

$$\frac{p'(t)}{p(t)(K - p(t))} = 1$$

Notons $f(x) = \frac{1}{x(K-x)}$. Alors l'équation se ré-écrit :

Réponse

Supposons que le nombre d'individus ne retombe jamais à 0 ($p(t) > 0$) et ne dépasse jamais les ressources disponibles ($p(t) \neq K$). Alors l'équation $p'(t) = p(t)(K - p(t))$ devient :

$$\frac{p'(t)}{p(t)(K - p(t))} = 1$$

Notons $f(x) = \frac{1}{x(K-x)}$. Alors l'équation se ré-écrit :

$$f(p(t))p'(t) = 1$$

Réponse

Supposons que le nombre d'individus ne retombe jamais à 0 ($p(t) > 0$) et ne dépasse jamais les ressources disponibles ($p(t) \neq K$). Alors l'équation $p'(t) = p(t)(K - p(t))$ devient :

$$\frac{p'(t)}{p(t)(K - p(t))} = 1$$

Notons $f(x) = \frac{1}{x(K-x)}$. Alors l'équation se ré-écrit :

$$f(p(t))p'(t) = 1$$

C'est une dérivée de fonctions composées!

Réponse

Supposons que le nombre d'individus ne retombe jamais à 0 ($p(t) > 0$) et ne dépasse jamais les ressources disponibles ($p(t) \neq K$). Alors l'équation $p'(t) = p(t)(K - p(t))$ devient :

$$\frac{p'(t)}{p(t)(K - p(t))} = 1$$

Notons $f(x) = \frac{1}{x(K-x)}$. Alors l'équation se ré-écrit :

$$f(p(t))p'(t) = 1$$

C'est une dérivée de fonctions composées! En effet, si on note F une fonction telle que $F' = f$ (on admet pour l'instant qu'elle existe!),

Réponse

Supposons que le nombre d'individus ne retombe jamais à 0 ($p(t) > 0$) et ne dépasse jamais les ressources disponibles ($p(t) \neq K$). Alors l'équation $p'(t) = p(t)(K - p(t))$ devient :

$$\frac{p'(t)}{p(t)(K - p(t))} = 1$$

Notons $f(x) = \frac{1}{x(K-x)}$. Alors l'équation se ré-écrit :

$$f(p(t))p'(t) = 1$$

C'est une dérivée de fonctions composées! En effet, si on note F une fonction telle que $F' = f$ (on admet pour l'instant qu'elle existe!), cette équation se réécrit comme:

$$(F(p(t)))' = 1.$$

Réponse

Supposons que le nombre d'individus ne retombe jamais à 0 ($p(t) > 0$) et ne dépasse jamais les ressources disponibles ($p(t) \neq K$). Alors l'équation $p'(t) = p(t)(K - p(t))$ devient :

$$\frac{p'(t)}{p(t)(K - p(t))} = 1$$

Notons $f(x) = \frac{1}{x(K-x)}$. Alors l'équation se ré-écrit :

$$f(p(t))p'(t) = 1$$

C'est une dérivée de fonctions composées! En effet, si on note F une fonction telle que $F' = f$ (on admet pour l'instant qu'elle existe!), cette équation se réécrit comme:

$$(F(p(t)))' = 1.$$

Le probème est donc encore, connaissant la dérivée f, de retrouver l'expression de la fonction F.

Contenu de la section

Primitive: definitions

Définition

Soit f une fonction réelle.

Primitive: definitions

Définition

Soit f une fonction réelle. Une *primitive de f* est une fonction F dérivable sur le domaine de f et telle que :

$$F'(x) = f(x)$$

Primitive: definitions

Définition

Soit f une fonction réelle. Une *primitive de f* est une fonction F dérivable sur le domaine de f et telle que :

$$F'(x) = f(x)$$

Remarque

Si F est une primitive de f sur I alors pour toute constante C, la fonction $F + C$ est aussi une primitive de f sur I.

Primitive: definitions

Définition

Soit f une fonction réelle. Une *primitive de f* est une fonction F dérivable sur le domaine de f et telle que :

$$F'(x) = f(x)$$

Remarque

Si F est une primitive de f sur I alors pour toute constante C, la fonction $F + C$ est aussi une primitive de f sur I. Car $(F + C)' = F' = f$.

Primitive: definitions

Définition

Soit f une fonction réelle. Une *primitive de f* est une fonction F dérivable sur le domaine de f et telle que :

$$F'(x) = f(x)$$

Remarque

Si F est une primitive de f sur I alors pour toute constante C, la fonction $F + C$ est aussi une primitive de f sur I. Car $(F + C)' = F' = f$.

Exemple

- La fonction $x \mapsto x^2$ est **une** primitive de $2x$ sur $\mathbb{R}$.

Primitive: definitions

Définition

Soit f une fonction réelle. Une *primitive de f* est une fonction F dérivable sur le domaine de f et telle que :

$$F'(x) = f(x)$$

Remarque

Si F est une primitive de f sur I alors pour toute constante C, la fonction $F + C$ est aussi une primitive de f sur I. Car $(F + C)' = F' = f$.

Exemple

- La fonction $x \mapsto x^2$ est **une** primitive de $2x$ sur $\mathbb{R}$. Car $(x^2)' = 2x$.

Primitive: definitions

Définition

Soit f une fonction réelle. Une *primitive de f* est une fonction F dérivable sur le domaine de f et telle que :

$$F'(x) = f(x)$$

Remarque

Si F est une primitive de f sur I alors pour toute constante C, la fonction $F + C$ est aussi une primitive de f sur I. Car $(F + C)' = F' = f$.

Exemple

- La fonction $x \mapsto x^2$ est **une** primitive de $2x$ sur $\mathbb{R}$. Car $(x^2)' = 2x$. La fonction $x \mapsto x^2 + 7$ aussi.

Primitive: definitions

Définition

Soit f une fonction réelle. Une *primitive de f* est une fonction F dérivable sur le domaine de f et telle que :

$$F'(x) = f(x)$$

Remarque

Si F est une primitive de f sur I alors pour toute constante C, la fonction $F + C$ est aussi une primitive de f sur I. Car $(F + C)' = F' = f$.

Exemple

- La fonction $x \mapsto x^2$ est **une** primitive de $2x$ sur $\mathbb{R}$. Car $(x^2)' = 2x$. La fonction $x \mapsto x^2 + 7$ aussi.
- La fonction ln est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$.

Primitive: definitions

Définition

Soit f une fonction réelle. Une *primitive de f* est une fonction F dérivable sur le domaine de f et telle que :

$$F'(x) = f(x)$$

Remarque

Si F est une primitive de f sur I alors pour toute constante C, la fonction $F + C$ est aussi une primitive de f sur I. Car $(F + C)' = F' = f$.

Exemple

- La fonction $x \mapsto x^2$ est **une** primitive de $2x$ sur $\mathbb{R}$. Car $(x^2)' = 2x$. La fonction $x \mapsto x^2 + 7$ aussi.
- La fonction ln est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$. Car $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$.

En général il existe une infinité de primitives, mais elles diffèrent toutes d'une constante:

En général il existe une infinité de primitives, mais elles diffèrent toutes d'une constante:

Résultat

Si F et G sont deux primitives de f sur un même intervalle ouvert I,

En général il existe une infinité de primitives, mais elles diffèrent toutes d'une constante:

Résultat

Si F et G sont deux primitives de f sur un même intervalle ouvert I, alors il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $G(x) = F(x) + C$ pour tout x dans I.

En général il existe une infinité de primitives, mais elles diffèrent toutes d'une constante:

Résultat

Si F et G sont deux primitives de f sur un même intervalle ouvert I, alors il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $G(x) = F(x) + C$ pour tout x dans I.

Définition

Les constantes apparaissant de la sorte s'appellent parfois *constante d'intégration*.

En général il existe une infinité de primitives, mais elles diffèrent toutes d'une constante:

Résultat

Si F et G sont deux primitives de f sur un même intervalle ouvert I, alors il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $G(x) = F(x) + C$ pour tout x dans I.

Définition

Les constantes apparaissant de la sorte s'appellent parfois *constante d'intégration.*

Remarque

Si on connait *une* primitive d'une fonction définie sur un intervalle, alors on les connait *toutes*:

En général il existe une infinité de primitives, mais elles diffèrent toutes d'une constante:

Résultat

Si F et G sont deux primitives de f sur un même intervalle ouvert I, alors il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $G(x) = F(x) + C$ pour tout x dans I.

Définition

Les constantes apparaissant de la sorte s'appellent parfois *constante d'intégration.*

Remarque

Si on connait *une* primitive d'une fonction définie sur un intervalle, alors on les connait *toutes*: Il suffit d'ajouter une constante quelconque.

Remarque

Si f est définie sur plusieurs intervalles distincts alors chaque « morceau » du domaine a sa propre constante d'intégration.

Remarque

Si f est définie sur plusieurs intervalles distincts alors chaque « morceau » du domaine a sa propre constante d'intégration.

Exemple

Une primitive de $\frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ est $\ln(|x|)$.

Remarque

Si f est définie sur plusieurs intervalles distincts alors chaque « morceau » du domaine a sa propre constante d'intégration.

Exemple

Une primitive de $\frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ est $\ln(|x|)$. Mais le domaine n'est pas un intervalle !

Remarque

Si f est définie sur plusieurs intervalles distincts alors chaque « morceau » du domaine a sa propre constante d'intégration.

Exemple

Une primitive de $\frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ est $\ln(|x|)$. Mais le domaine n'est pas un intervalle ! Il y a donc une constante d'intégration par intervalle: les primitives de

$$f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$$

Remarque

Si f est définie sur plusieurs intervalles distincts alors chaque « morceau » du domaine a sa propre constante d'intégration.

Exemple

Une primitive de $\frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ est $\ln(|x|)$. Mais le domaine n'est pas un intervalle ! Il y a donc une constante d'intégration par intervalle: les primitives de

$$f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$$

sont toutes les fonctions $F : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}$ telles que

Remarque

Si f est définie sur plusieurs intervalles distincts alors chaque « morceau » du domaine a sa propre constante d'intégration.

Exemple

Une primitive de $\frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ est $\ln(|x|)$. Mais le domaine n'est pas un intervalle ! Il y a donc une constante d'intégration par intervalle: les primitives de

$$f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$$

sont toutes les fonctions $F : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}$ telles que

$$F(x) = \begin{cases} \ln(x) + C_1 & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x) + C_2 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Contenu de la section

Notations

Si f est une fonction, on notera $\int f$ ses primitives.

Notations

Si f est une fonction, on notera $\int f$ ses primitives. C'est-à-dire $\int f$ représente toute fonction vérifiant $(\int f)' = f$.

Notations

Si f est une fonction, on notera $\int f$ ses primitives. C'est-à-dire $\int f$ représente toute fonction vérifiant $(\int f)' = f$.
On notera parfois aussi :

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Notations

Si f est une fonction, on notera $\int f$ ses primitives. C'est-à-dire $\int f$ représente toute fonction vérifiant $(\int f)' = f$.
On notera parfois aussi :

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Si F est une primitive de f, on dit aussi que F est une *intégrale indéfinie* de f.

Notations

Si f est une fonction, on notera $\int f$ ses primitives. C'est-à-dire $\int f$ représente toute fonction vérifiant $(\int f)' = f$.
On notera parfois aussi :

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Si F est une primitive de f, on dit aussi que F est une *intégrale indéfinie* de f.

Dans l'expression $\int f$ (ou $\int f(x)\,\mathrm{d}x$), f est appelée l'intégrande de la primitive.

Contenu de la section

Contenu de la section

Trouver une primitive d'une fonction est l'opération qui inverse la dérivation.

Trouver une primitive d'une fonction est l'opération qui inverse la dérivation. On a le schéma suivant pour une fonction f et sa primitive F :

$$F + C \xrightarrow{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}} f \qquad\qquad F + C \xleftarrow{\int \mathrm{d}x} f.$$

Trouver une primitive d'une fonction est l'opération qui inverse la dérivation. On a le schéma suivant pour une fonction f et sa primitive F :

$$F + C \xrightarrow{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}} f \qquad\qquad F + C \xleftarrow{\int \mathrm{d}x} f.$$

On verra aujourd'hui et au prochain cours plein de techniques permettant de calculer l'expression des primitives d'une fonction donnée.

Chaque règle de dérivation donne lieu à une formule utilisable pour la recherche de primitive.

Exemple

La fonction $f(x) = x^2$ admet comme primitive, car

Chaque règle de dérivation donne lieu à une formule utilisable pour la recherche de primitive.

Exemple

La fonction $f(x) = x^2$ admet $F(x) = \frac{x^3}{3}$ comme primitive, car

Chaque règle de dérivation donne lieu à une formule utilisable pour la recherche de primitive.

Exemple

La fonction $f(x) = x^2$ admet $F(x) = \frac{x^3}{3}$ comme primitive, car

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)'$$

Chaque règle de dérivation donne lieu à une formule utilisable pour la recherche de primitive.

Exemple

La fonction $f(x) = x^2$ admet $F(x) = \frac{x^3}{3}$ comme primitive, car

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{1}{3}\left(x^3\right)'$$

Chaque règle de dérivation donne lieu à une formule utilisable pour la recherche de primitive.

Exemple

La fonction $f(x) = x^2$ admet $F(x) = \frac{x^3}{3}$ comme primitive, car

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{1}{3}\left(x^3\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2$$

Chaque règle de dérivation donne lieu à une formule utilisable pour la recherche de primitive.

Exemple

La fonction $f(x) = x^2$ admet $F(x) = \frac{x^3}{3}$ comme primitive, car

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{1}{3}\left(x^3\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2 = f(x)$$

Chaque règle de dérivation donne lieu à une formule utilisable pour la recherche de primitive.

Exemple

La fonction $f(x) = x^2$ admet $F(x) = \frac{x^3}{3}$ comme primitive, car

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{1}{3}\left(x^3\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2 = f(x)$$

Donc on peut écrire

$$\int x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + C.$$

Chaque règle de dérivation donne lieu à une formule utilisable pour la recherche de primitive.

Exemple

La fonction $f(x) = x^2$ admet $F(x) = \frac{x^3}{3}$ comme primitive, car

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{1}{3}\left(x^3\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2 = f(x)$$

Donc on peut écrire

$$\int x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + C.$$

Le $+C$ est une façon d'écrire qu'on a toutes les primitives de x^2.

Une question

Question

Lorsque $a \neq -1$, calculer $\int x^a \, dx$.

Une question

Question

Lorsque $a \neq -1$, calculer $\int x^a \, dx$.

Démonstration.

Lorsque $a \neq -1$, on a:

Une question

Question

Lorsque $a \neq -1$, calculer $\int x^a \, dx$.

Démonstration.

Lorsque $a \neq -1$, on a:

$$\int x^a = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C.$$

Une question

Question

Lorsque $a \neq -1$, calculer $\int x^a \, dx$.

Démonstration.

Lorsque $a \neq -1$, on a:

$$\int x^a = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C.$$

Car la dérivée de $\frac{x^{a+1}}{a+1} + C$ pour $a \neq -1$ vaut x^a:

$$\left(\frac{x^{a+1}}{a+1} + C\right)' =$$

Une question

Question

Lorsque $a \neq -1$, calculer $\int x^a \, \mathrm{d}x$.

Démonstration.

Lorsque $a \neq -1$, on a:

$$\int x^a = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C.$$

Car la dérivée de $\frac{x^{a+1}}{a+1} + C$ pour $a \neq -1$ vaut x^a:

$$\left(\frac{x^{a+1}}{a+1} + C\right)' = \left(\frac{x^{a+1}}{a+1}\right)' =$$

Une question

Question

Lorsque $a \neq -1$, calculer $\int x^a \, dx$.

Démonstration.

Lorsque $a \neq -1$, on a:

$$\int x^a = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C.$$

Car la dérivée de $\frac{x^{a+1}}{a+1} + C$ pour $a \neq -1$ vaut x^a:

$$\left(\frac{x^{a+1}}{a+1} + C\right)' = \left(\frac{x^{a+1}}{a+1}\right)' = \frac{a+1}{a+1} x^{a+1-1} =$$

Une question

Question

Lorsque $a \neq -1$, calculer $\int x^a \, dx$.

Démonstration.

Lorsque $a \neq -1$, on a:

$$\int x^a = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C.$$

Car la dérivée de $\frac{x^{a+1}}{a+1} + C$ pour $a \neq -1$ vaut x^a:

$$\left(\frac{x^{a+1}}{a+1} + C\right)' = \left(\frac{x^{a+1}}{a+1}\right)' = \frac{a+1}{a+1} x^{a+1-1} = x^a.$$

□

Une mise en garde

Remarque

La recherche de primitive est une opération bien plus complexe que la dérivation !

Une mise en garde

Remarque

La recherche de primitive est une opération bien plus complexe que la dérivation !

Étant donné une « formule » (somme, produit et composées de fonctions dont la dérivée est connue), on peut toujours la dériver et obtenir une nouvelle « formule » via les règles de dérivation.

Une mise en garde

Remarque

La recherche de primitive est une opération bien plus complexe que la dérivation !

Étant donné une « formule » (somme, produit et composées de fonctions dont la dérivée est connue), on peut toujours la dériver et obtenir une nouvelle « formule » via les règles de dérivation.

Mais il n'est pas toujours possible de faire cela avec la primitivisation !

Une mise en garde

Remarque

La recherche de primitive est une opération bien plus complexe que la dérivation !

Étant donné une « formule » (somme, produit et composées de fonctions dont la dérivée est connue), on peut toujours la dériver et obtenir une nouvelle « formule » via les règles de dérivation.

Mais il n'est pas toujours possible de faire cela avec la primitivisation !

On va voir maintenant des cas précis dans lesquels des règles s'appliquent.

Contenu de la section

En réécrivant les formules de dérivation qu'on avait vues, on obtient les formules d'intégration immédiate suivantes.

En réécrivant les formules de dérivation qu'on avait vues, on obtient les formules d'intégration immédiate suivantes.

$$\int x^a \, \mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad a \neq -1, \quad x \in \mathbb{R}_0^+$$

En réécrivant les formules de dérivation qu'on avait vues, on obtient les formules d'intégration immédiate suivantes.

$$\int x^a \,\mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad a \neq -1, \quad x \in \mathbb{R}_0^+$$

$$\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln|x| + C \qquad x \in \mathbb{R}_0 = \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

En réécrivant les formules de dérivation qu'on avait vues, on obtient les formules d'intégration immédiate suivantes.

$$\int x^a \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad a \neq -1, \quad x \in \mathbb{R}_0^+$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C \qquad x \in \mathbb{R}_0 = \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C \quad x \in \mathbb{R}$$

En réécrivant les formules de dérivation qu'on avait vues, on obtient les formules d'intégration immédiate suivantes.

$$\int x^a \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \qquad a \neq -1, \quad x \in \mathbb{R}_0^+$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C \qquad x \in \mathbb{R}_0 = \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C \qquad x \in \mathbb{R}$$

En réécrivant les formules de dérivation qu'on avait vues, on obtient les formules d'intégration immédiate suivantes.

$$\int x^a \, \mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \qquad a \neq -1, \quad x \in \mathbb{R}_0^+$$

$$\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln|x| + C \qquad x \in \mathbb{R}_0 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + C \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + C \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\int \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C \qquad x \in \mathbb{R}$$

En réécrivant les formules de dérivation qu'on avait vues, on obtient les formules d'intégration immédiate suivantes.

$$\int x^a \, \mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \qquad a \neq -1, \quad x \in \mathbb{R}_0^+$$

$$\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln|x| + C \qquad x \in \mathbb{R}_0 = \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

$$\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + C \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + C \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\int \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C \qquad x \in \mathbb{R}$$

Dans tous ces exemples, on a écrit une seule constante d'intégration C, même dans les cas où il y a plusieurs constantes d'intégration (une par « morceau » du domaine).

En réécrivant les formules de dérivation qu'on avait vues, on obtient les formules d'intégration immédiate suivantes.

$$\int x^a \,\mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \qquad a \neq -1, \quad x \in \mathbb{R}_0^+$$

$$\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln|x| + C \qquad x \in \mathbb{R}_0 = \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

$$\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + C \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + C \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C \qquad x \in \mathbb{R}$$

Dans tous ces exemples, on a écrit une seule constante d'intégration C, même dans les cas où il y a plusieurs constantes d'intégration (une par « morceau » du domaine). Ces formules sont à connaître par coeur, car elles sont constamment utilisées pour calculer des primitives!

Contenu de la section

Sinus et cosinus hyperbolique

Nous introduisons maintenant deux fonctions qui nous seront utiles dans nos recherches de primitives :

Sinus et cosinus hyperbolique

Nous introduisons maintenant deux fonctions qui nous seront utiles dans nos recherches de primitives :

- Le cosinus hyperbolique ch : $\mathbb{R} \to [1,\infty[$: $x \mapsto \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Sinus et cosinus hyperbolique

Nous introduisons maintenant deux fonctions qui nous seront utiles dans nos recherches de primitives :

- Le cosinus hyperbolique ch : $\mathbb{R} \to [1,\infty[$: $x \mapsto \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
- Le sinus hyperbolique sh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $x \mapsto \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Sinus et cosinus hyperbolique

Nous introduisons maintenant deux fonctions qui nous seront utiles dans nos recherches de primitives :

- Le cosinus hyperbolique ch : $\mathbb{R} \to [1,\infty[$: $x \mapsto \operatorname{ch} x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$
- Le sinus hyperbolique sh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $x \mapsto \operatorname{sh} x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$

Ces fonctions ont les propriétés suivantes. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

Sinus et cosinus hyperbolique

Nous introduisons maintenant deux fonctions qui nous seront utiles dans nos recherches de primitives :

- Le cosinus hyperbolique $\mathrm{ch} : \mathbb{R} \to [1,\infty[: x \mapsto \mathrm{ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
- Le sinus hyperbolique $\mathrm{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \mathrm{sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Ces fonctions ont les propriétés suivantes. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$$

Sinus et cosinus hyperbolique

Nous introduisons maintenant deux fonctions qui nous seront utiles dans nos recherches de primitives :

- Le cosinus hyperbolique $\mathrm{ch} : \mathbb{R} \to [1, \infty[: x \mapsto \mathrm{ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
- Le sinus hyperbolique $\mathrm{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \mathrm{sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Ces fonctions ont les propriétés suivantes. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$$

$$\mathrm{ch}(-x) = \mathrm{ch}\, x \qquad (\mathrm{ch} \text{ est paire})$$

Sinus et cosinus hyperbolique

Nous introduisons maintenant deux fonctions qui nous seront utiles dans nos recherches de primitives :

- Le cosinus hyperbolique $\operatorname{ch} : \mathbb{R} \to [1,\infty[: x \mapsto \operatorname{ch} x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$
- Le sinus hyperbolique $\operatorname{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \operatorname{sh} x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$

Ces fonctions ont les propriétés suivantes. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

$$\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x \qquad (\operatorname{ch} \text{ est paire})$$

$$\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x \qquad (\operatorname{sh} \text{ est impaire})$$

Sinus et cosinus hyperbolique

Nous introduisons maintenant deux fonctions qui nous seront utiles dans nos recherches de primitives :

- Le cosinus hyperbolique $\operatorname{ch} : \mathbb{R} \to [1,\infty[: x \mapsto \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
- Le sinus hyperbolique $\operatorname{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Ces fonctions ont les propriétés suivantes. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(-x) &= \operatorname{ch} x && (\operatorname{ch} \text{ est paire}) \\ \operatorname{sh}(-x) &= -\operatorname{sh} x && (\operatorname{sh} \text{ est impaire}) \\ (\operatorname{ch} x)' &= \operatorname{sh} x \end{aligned}$$

Sinus et cosinus hyperbolique

Nous introduisons maintenant deux fonctions qui nous seront utiles dans nos recherches de primitives :

- Le cosinus hyperbolique $\mathrm{ch} : \mathbb{R} \to [1,\infty[: x \mapsto \mathrm{ch}\, x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$
- Le sinus hyperbolique $\mathrm{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \mathrm{sh}\, x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$

Ces fonctions ont les propriétés suivantes. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x &= 1 \\
\mathrm{ch}(-x) &= \mathrm{ch}\, x \qquad (\mathrm{ch} \text{ est paire}) \\
\mathrm{sh}(-x) &= -\mathrm{sh}\, x \quad (\mathrm{sh} \text{ est impaire}) \\
(\mathrm{ch}\, x)' &= \mathrm{sh}\, x \\
(\mathrm{sh}\, x)' &= \mathrm{ch}\, x.
\end{aligned}$$

Sinus et cosinus hyperbolique

Nous introduisons maintenant deux fonctions qui nous seront utiles dans nos recherches de primitives :

- Le cosinus hyperbolique $\mathrm{ch} : \mathbb{R} \to [1,\infty[: x \mapsto \mathrm{ch}\, x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$
- Le sinus hyperbolique $\mathrm{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \mathrm{sh}\, x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$

Ces fonctions ont les propriétés suivantes. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{ch}^2\, x - \mathrm{sh}^2\, x &= 1 \\
\mathrm{ch}(-x) &= \mathrm{ch}\, x \qquad (\mathrm{ch} \text{ est paire}) \\
\mathrm{sh}(-x) &= -\mathrm{sh}\, x \quad (\mathrm{sh} \text{ est impaire}) \\
(\mathrm{ch}\, x)' &= \mathrm{sh}\, x \\
(\mathrm{sh}\, x)' &= \mathrm{ch}\, x.
\end{aligned}
$$

Leurs propriétés ressemblent à celles des fonctions sin et cos (d′ où leur nom).

Sinus et cosinus hyperbolique

Nous introduisons maintenant deux fonctions qui nous seront utiles dans nos recherches de primitives :

- Le cosinus hyperbolique $\operatorname{ch} : \mathbb{R} \to [1,\infty[: x \mapsto \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
- Le sinus hyperbolique $\operatorname{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

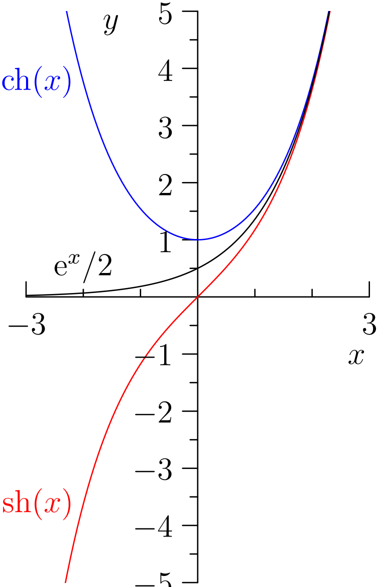
Ces fonctions ont les propriétés suivantes. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x &= 1 \\ \operatorname{ch}(-x) &= \operatorname{ch} x \qquad (\operatorname{ch} \text{ est paire}) \\ \operatorname{sh}(-x) &= -\operatorname{sh} x \quad (\operatorname{sh} \text{ est impaire}) \\ (\operatorname{ch} x)' &= \operatorname{sh} x \\ (\operatorname{sh} x)' &= \operatorname{ch} x. \end{aligned}$$

Leurs propriétés ressemblent à celles des fonctions sin et cos (d′ où leur nom). Attention, les formules sont légèrement différentes de celles de la trigonométrie classique !

Les graphes de ces fonctions :

Les graphes de ces fonctions :



Exercice (À faire chez vous)

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Montrer les formules précédentes et les faits suivants :

Exercice (À faire chez vous)

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Montrer les formules précédentes et les faits suivants :

1. ch est strictement positive sur $\mathbb{R}$,

Exercice (À faire chez vous)

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Montrer les formules précédentes et les faits suivants :

1. ch est strictement positive sur $\mathbb{R}$,
2. sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (et s'annule en 0), et

Exercice (À faire chez vous)

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Montrer les formules précédentes et les faits suivants :

1. ch est strictement positive sur $\mathbb{R}$,
2. sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (et s'annule en 0), et
3. ch est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et

Exercice (À faire chez vous)

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Montrer les formules précédentes et les faits suivants :

1. ch est strictement positive sur $\mathbb{R}$,
2. sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (et s'annule en 0), et
3. ch est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et
4. ch est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice (À faire chez vous)

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Montrer les formules précédentes et les faits suivants :

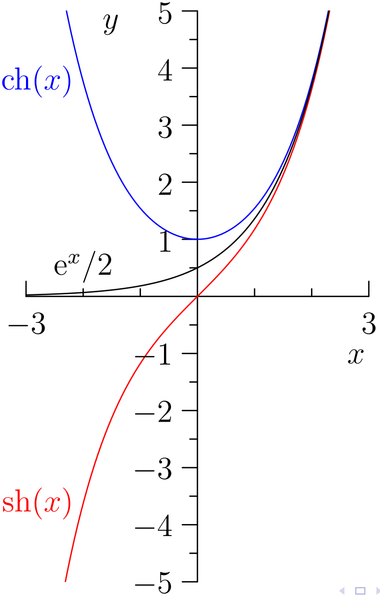
1. ch est strictement positive sur $\mathbb{R}$,
2. sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (et s'annule en 0), et
3. ch est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et
4. ch est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice (À faire chez vous aussi)

On peut déduire de tout cela les faits suivants :

- sh est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et
- ch (restreinte à $\mathbb{R}^+$) une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $[1, +\infty[$.

sh est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et ch (restreinte à $\mathbb{R}^+$) est une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $[1,+\infty[$:



Les fonctions cosinus et sinus hyperbolique admettent donc des réciproques :

$$\mathrm{ch}^{-1} := \operatorname{argch} : [1, +\infty[\to \mathbb{R}^{+} : x \mapsto \operatorname{argch} x$$

$$\mathrm{sh}^{-1} := \operatorname{argsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \operatorname{argsh} x.$$

Les fonctions cosinus et sinus hyperbolique admettent donc des réciproques :

$$\mathrm{ch}^{-1} := \operatorname{argch} : [1, +\infty[\to \mathbb{R}^+ : x \mapsto \operatorname{argch} x$$
$$\mathrm{sh}^{-1} := \operatorname{argsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \operatorname{argsh} x.$$

Résultat

Les dérivées des fonction argch *et* argsh *sont données par les formules suivantes:*

Les fonctions cosinus et sinus hyperbolique admettent donc des réciproques :

$$\mathrm{ch}^{-1} := \operatorname{argch} : [1, +\infty[\to \mathbb{R}^+ : x \mapsto \operatorname{argch} x$$
$$\mathrm{sh}^{-1} := \operatorname{argsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \operatorname{argsh} x.$$

Résultat

Les dérivées des fonction argch *et* argsh *sont données par les formules suivantes:*

- *pour tout* $x \in]1, +\infty[$,

$$(\operatorname{argch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Les fonctions cosinus et sinus hyperbolique admettent donc des réciproques :

$$\text{ch}^{-1} := \operatorname{argch} : [1, +\infty[\to \mathbb{R}^+ : x \mapsto \operatorname{argch} x$$
$$\text{sh}^{-1} := \operatorname{argsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \operatorname{argsh} x.$$

Résultat

Les dérivées des fonction argch *et* argsh *sont données par les formules suivantes:*

- *pour tout* $x \in]1, +\infty[$,
$$(\operatorname{argch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$
- *pour tout* $x \in \mathbb{R}$,
$$(\operatorname{argsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Les fonctions cosinus et sinus hyperbolique admettent donc des réciproques :

$$\mathrm{ch}^{-1} := \operatorname{argch} : [1, +\infty[\to \mathbb{R}^+ : x \mapsto \operatorname{argch} x$$
$$\mathrm{sh}^{-1} := \operatorname{argsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \operatorname{argsh} x.$$

Résultat

Les dérivées des fonction argch *et* argsh *sont données par les formules suivantes:*

- *pour tout* $x \in]1, +\infty[$,
$$(\operatorname{argch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$
- *pour tout* $x \in \mathbb{R}$,
$$(\operatorname{argsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Nous admettons cette proposition ici.

De tout ce qui précède nous obtenons les formules d'intégrations suivantes :

$$\int \operatorname{ch} x \, \mathrm{d}x = \operatorname{sh}(x) + C \qquad x \in \mathbb{R}$$

De tout ce qui précède nous obtenons les formules d'intégrations suivantes :

$$\int \operatorname{ch} x \, \mathrm{d}x = \operatorname{sh}(x) + C \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\int \operatorname{sh} x \, \mathrm{d}x = \operatorname{ch}(x) + C \qquad x \in \mathbb{R}$$

De tout ce qui précède nous obtenons les formules d'intégrations suivantes :

$$\int \operatorname{ch} x \, \mathrm{d}x = \operatorname{sh}(x) + C \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\int \operatorname{sh} x \, \mathrm{d}x = \operatorname{ch}(x) + C \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \, \mathrm{d}x = \operatorname{argch}(x) + C \qquad x \in \,]1, \infty[$$

De tout ce qui précède nous obtenons les formules d'intégrations suivantes :

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{ch} x \, dx &= \operatorname{sh}(x) + C & x \in \mathbb{R} \\
\int \operatorname{sh} x \, dx &= \operatorname{ch}(x) + C & x \in \mathbb{R} \\
\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \, dx &= \operatorname{argch}(x) + C & x \in]1,\infty[\\
\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \, dx &= \operatorname{argsh}(x) + C & x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Contenu de la section

La règle de dérivation d'une somme, $(f+g)' = f' + g'$, donne lieu à :

La règle de dérivation d'une somme, $(f+g)' = f' + g'$, donne lieu à :

$$\int (f+g) = \int f + \int g$$

pour toutes fonctions f et g.

La règle de dérivation d'une somme, $(f+g)' = f' + g'$, donne lieu à :

$$\int (f+g) = \int f + \int g$$

pour toutes fonctions f et g.

La règle de dérivation d'une fonction multipliée par une constante c, $(c \cdot f)' = c \cdot f'$, donne lieu à :

La règle de dérivation d'une somme, $(f+g)' = f' + g'$, donne lieu à :

$$\int (f+g) = \int f + \int g$$

pour toutes fonctions f et g.

La règle de dérivation d'une fonction multipliée par une constante c, $(c \cdot f)' = c \cdot f'$, donne lieu à :

$$\int cf = c \int f$$

pour toute fonction f et tout réel c.

La règle de dérivation d'une somme, $(f+g)' = f' + g'$, donne lieu à :

$$\int (f+g) = \int f + \int g$$

pour toutes fonctions f et g.

La règle de dérivation d'une fonction multipliée par une constante c, $(c \cdot f)' = c \cdot f'$, donne lieu à :

$$\int cf = c \int f$$

pour toute fonction f et tout réel c.

On peut résumer les deux règles précédentes sous la forme :

$$\int (a\,f + b\,g) = a \int f + b \int g$$

pour des fonctions f,g et des réels a,b.

La règle de dérivation d'une somme, $(f+g)' = f' + g'$, donne lieu à :

$$\int (f+g) = \int f + \int g$$

pour toutes fonctions f et g.

La règle de dérivation d'une fonction multipliée par une constante c, $(c \cdot f)' = c \cdot f'$, donne lieu à :

$$\int cf = c \int f$$

pour toute fonction f et tout réel c.

On peut résumer les deux règles précédentes sous la forme :

$$\int (a\,f + b\,g) = a \int f + b \int g$$

pour des fonctions f,g et des réels a,b. C'est une propriété dite de linéarité.

Question

Calculez $\int (x^2 + x^3 + \sqrt{x})\,\mathrm{d}x$ en utilisant la propriété de linéarité.

Question

Calculez $\int (x^2 + x^3 + \sqrt{x})\,\mathrm{d}x$ en utilisant la propriété de linéarité.

Démonstration.

$$\int (x^2 + x^3 + \sqrt{x})\,\mathrm{d}x = \int x^2\,\mathrm{d}x + \int x^3\,\mathrm{d}x + \int x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$

- Par linéarité

□

Question

Calculez $\int (x^2 + x^3 + \sqrt{x})\,\mathrm{d}x$ en utilisant la propriété de linéarité.

Démonstration.

$$\begin{aligned}\int (x^2 + x^3 + \sqrt{x})\,\mathrm{d}x &= \int x^2\,\mathrm{d}x + \int x^3\,\mathrm{d}x + \int x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^{3/2}}{3/2} + C\end{aligned}$$

- Par linéarité
- Par le calcul des primitives des fonctions puissances.

$\square$

Question

Calculez $\int (x^2 + x^3 + \sqrt{x})\,\mathrm{d}x$ en utilisant la propriété de linéarité.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\int (x^2 + x^3 + \sqrt{x})\,\mathrm{d}x &= \int x^2\,\mathrm{d}x + \int x^3\,\mathrm{d}x + \int x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^{3/2}}{3/2} + C \\
&= \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + C
\end{aligned}$$

- Par linéarité
- Par le calcul des primitives des fonctions puissances.

□

Exemple

$$\int \left(\mathrm{e}^x - \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x =$$

Exemple

$$\int \left(\mathrm{e}^x - \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x - \int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x$$
$$=$$

Exemple

$$\begin{aligned}\int\left(\mathrm{e}^x - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x &= \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\ &= \mathrm{e}^x - \ln|x| + C \qquad\qquad (x \in \mathbb{R}_0)\end{aligned}$$

Contenu de la section

Changement de variables et fonctions composées

La règle de dérivation des fonctions composées est :

$$(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Ceci nous fournit la règle de « Primitivisation par changement de variable ».

$$\int g'(f(x))f'(x)\,\mathrm{d}x = g(f(x)) + C.$$

Changement de variables et fonctions composées

La règle de dérivation des fonctions composées est :

$$(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Ceci nous fournit la règle de « Primitivisation par changement de variable ».

$$\int g'(f(x))f'(x)\,\mathrm{d}x = g(f(x)) + C.$$

En pratique il n'est en général pas facile de voir que l'intégrand peut se mettre sous la forme $g'(f(x))f'(x)$.

Changement de variables et fonctions composées

La règle de dérivation des fonctions composées est :

$$(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Ceci nous fournit la règle de « Primitivisation par changement de variable ».

$$\int g'(f(x))f'(x)\,\mathrm{d}x = g(f(x)) + C.$$

En pratique il n'est en général pas facile de voir que l'intégrand peut se mettre sous la forme $g'(f(x))f'(x)$. Mais on s'en sort d'une autre manière.

Si on écrit $h = g'$, de sorte que $g = \int h$, on peut reformuler ça de la manière suivante:

Si on écrit $h = g'$, de sorte que $g = \int h$, on peut reformuler ça de la manière suivante:

$$\int h(f(x)) \cdot f'(x) \, \mathrm{d}x = \int_{|u=f(x)} h(u) \, \mathrm{d}u$$

et

Si on écrit $h = g'$, de sorte que $g = \int h$, on peut reformuler ça de la manière suivante:

$$\int h(f(x)) \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\big|u=f(x)} h(u)\,\mathrm{d}u$$

et

$$\int h(u)\,\mathrm{d}u = \int_{\big|x=f^{-1}(u)} h(f(x))f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Si on écrit $h = g'$, de sorte que $g = \int h$, on peut reformuler ça de la manière suivante:

$$\int h(f(x)) \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\big|u=f(x)} h(u)\,\mathrm{d}u$$

et

$$\int h(u)\,\mathrm{d}u = \int_{\big|x=f^{-1}(u)} h(f(x))f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ici la barre verticale indique qu'après avoir calculé la primitive de h par rapport à une variable u, on remplace u par $f(x)$ (première formule) ou x par $f^{-1}(u)$ (seconde formule) dans l'expression obtenue.

En pratique

- En pratique, on écrira le changement de variable en définissant une nouvelle variable: $u = f(x)$.

En pratique

- En pratique, on écrira le changement de variable en définissant une nouvelle variable: $u = f(x)$.
- En dérivant formellement on obtient:

$$\mathrm{d}u = f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

En pratique

- En pratique, on écrira le changement de variable en définissant une nouvelle variable: $u = f(x)$.
- En dérivant formellement on obtient:
$$du = f'(x)\,dx.$$
- Cette égalité $du = f'(x)\,dx$ n'a pas vraiment de sens, mais c'est un moyen mnémotechnique efficace pour ne pas se tromper avec les nouvelles variables dans un changement de variable.

Un exemple concret

Exemple

On veut calculer:

$$\int 3x^2(x^3+5)^9\,\mathrm{d}x$$

Un exemple concret

Exemple

On veut calculer:

$$\int 3x^2(x^3+5)^9\,\mathrm{d}x$$

On pose $u = x^3 + 5$.

Un exemple concret

Exemple

On veut calculer:

$$\int 3x^2(x^3+5)^9\,\mathrm{d}x$$

On pose $u = x^3 + 5$. On calcule alors: $\mathrm{d}u = 3x^2\,\mathrm{d}x$.

Un exemple concret

Exemple

On veut calculer:

$$\int 3x^2(x^3+5)^9 \,\mathrm{d}x$$

On pose $u = x^3 + 5.$ On calcule alors: $\mathrm{d}u = 3x^2 \,\mathrm{d}x.$ Et donc

$$\int 3x^2(x^3+5)^9 \,\mathrm{d}x =$$

Un exemple concret

Exemple

On veut calculer:

$$\int 3x^2(x^3+5)^9\,\mathrm{d}x$$

On pose $u = x^3 + 5$. On calcule alors: $\mathrm{d}u = 3x^2\,\mathrm{d}x$. Et donc

$$\int 3x^2(x^3+5)^9\,\mathrm{d}x = \int \underbrace{(x^3+5)^9}_{=u^9} \cdot \underbrace{3x^2\,\mathrm{d}x}_{=\mathrm{d}u} =$$

Un exemple concret

Exemple

On veut calculer:

$$\int 3x^2(x^3+5)^9\,\mathrm{d}x$$

On pose $u = x^3 + 5$. On calcule alors: $\mathrm{d}u = 3x^2\,\mathrm{d}x$. Et donc

$$\int 3x^2(x^3+5)^9\,\mathrm{d}x = \int \underbrace{(x^3+5)^9}_{=u^9} \cdot \underbrace{3x^2\,\mathrm{d}x}_{=\mathrm{d}u} = \int u^9\,\mathrm{d}u$$

Un exemple concret

Exemple

On veut calculer:

$$\int 3x^2(x^3+5)^9\,\mathrm{d}x$$

On pose $u = x^3 + 5$. On calcule alors: $\mathrm{d}u = 3x^2\,\mathrm{d}x$. Et donc

$$\int 3x^2(x^3+5)^9\,\mathrm{d}x = \int \underbrace{(x^3+5)^9}_{=u^9} \cdot \underbrace{3x^2\,\mathrm{d}x}_{=\mathrm{d}u} = \int u^9\,\mathrm{d}u$$

On calcule maintenant une primitive de u^9 pour la nouvelle variable u avec la règle des puissances:

$$\int u^9\,\mathrm{d}u =$$

Un exemple concret

Exemple

On veut calculer:

$$\int 3x^2(x^3+5)^9\,\mathrm{d}x$$

On pose $u = x^3 + 5$. On calcule alors: $\mathrm{d}u = 3x^2\,\mathrm{d}x$. Et donc

$$\int 3x^2(x^3+5)^9\,\mathrm{d}x = \int \underbrace{(x^3+5)^9}_{=u^9} \cdot \underbrace{3x^2\,\mathrm{d}x}_{=\mathrm{d}u} = \int u^9\,\mathrm{d}u$$

On calcule maintenant une primitive de u^9 pour la nouvelle variable u avec la règle des puissances:

$$\int u^9\,\mathrm{d}u = \frac{u^{10}}{10} + C.$$

Un exemple concret

Exemple

On veut calculer:

$$\int 3x^2(x^3+5)^9\,\mathrm{d}x$$

On pose $u = x^3 + 5$. On calcule alors: $\mathrm{d}u = 3x^2\,\mathrm{d}x$. Et donc

$$\int 3x^2(x^3+5)^9\,\mathrm{d}x = \int \underbrace{(x^3+5)^9}_{=u^9} \cdot \underbrace{3x^2\,\mathrm{d}x}_{=\mathrm{d}u} = \int u^9\,\mathrm{d}u$$

On calcule maintenant une primitive de u^9 pour la nouvelle variable u avec la règle des puissances:

$$\int u^9\,\mathrm{d}u = \frac{u^{10}}{10} + C.$$

Il reste alors à remplacer $u(x)$ par son expression explicite en x, pour arriver à

Un exemple concret

Exemple

On veut calculer:

$$\int 3x^2(x^3+5)^9\,\mathrm{d}x$$

On pose $u = x^3 + 5$. On calcule alors: $\mathrm{d}u = 3x^2\,\mathrm{d}x$. Et donc

$$\int 3x^2(x^3+5)^9\,\mathrm{d}x = \int \underbrace{(x^3+5)^9}_{=u^9} \cdot \underbrace{3x^2\,\mathrm{d}x}_{=\mathrm{d}u} = \int u^9\,\mathrm{d}u$$

On calcule maintenant une primitive de u^9 pour la nouvelle variable u avec la règle des puissances:

$$\int u^9\,\mathrm{d}u = \frac{u^{10}}{10} + C.$$

Il reste alors à remplacer $u(x)$ par son expression explicite en x, pour arriver à

$$\int 3x^2(x^3+5)^9\,\mathrm{d}x =$$

Un exemple concret

Exemple

On veut calculer:

$$\int 3x^2(x^3+5)^9\,\mathrm{d}x$$

On pose $u = x^3 + 5$. On calcule alors: $\mathrm{d}u = 3x^2\,\mathrm{d}x$. Et donc

$$\int 3x^2(x^3+5)^9\,\mathrm{d}x = \int \underbrace{(x^3+5)^9}_{=u^9} \cdot \underbrace{3x^2\,\mathrm{d}x}_{=\mathrm{d}u} = \int u^9\,\mathrm{d}u$$

On calcule maintenant une primitive de u^9 pour la nouvelle variable u avec la règle des puissances:

$$\int u^9\,\mathrm{d}u = \frac{u^{10}}{10} + C.$$

Il reste alors à remplacer $u(x)$ par son expression explicite en x, pour arriver à

$$\int 3x^2(x^3+5)^9\,\mathrm{d}x = \int u^9\,\mathrm{d}u =$$

Un exemple concret

Exemple

On veut calculer:

$$\int 3x^2(x^3+5)^9 \,\mathrm{d}x$$

On pose $u = x^3 + 5$. On calcule alors: $\mathrm{d}u = 3x^2 \,\mathrm{d}x$. Et donc

$$\int 3x^2(x^3+5)^9 \,\mathrm{d}x = \int \underbrace{(x^3+5)^9}_{=u^9} \cdot \underbrace{3x^2 \,\mathrm{d}x}_{=\mathrm{d}u} = \int u^9 \,\mathrm{d}u$$

On calcule maintenant une primitive de u^9 pour la nouvelle variable u avec la règle des puissances:

$$\int u^9 \,\mathrm{d}u = \frac{u^{10}}{10} + C.$$

Il reste alors à remplacer $u(x)$ par son expression explicite en x, pour arriver à

$$\int 3x^2(x^3+5)^9 \,\mathrm{d}x = \int u^9 \,\mathrm{d}u = \frac{u^{10}}{10} + C =$$

Un exemple concret

Exemple

On veut calculer:

$$\int 3x^2(x^3+5)^9\,\mathrm{d}x$$

On pose $u = x^3 + 5$. On calcule alors: $\mathrm{d}u = 3x^2\,\mathrm{d}x$. Et donc

$$\int 3x^2(x^3+5)^9\,\mathrm{d}x = \int \underbrace{(x^3+5)^9}_{=u^9} \cdot \underbrace{3x^2\,\mathrm{d}x}_{=\mathrm{d}u} = \int u^9\,\mathrm{d}u$$

On calcule maintenant une primitive de u^9 pour la nouvelle variable u avec la règle des puissances:

$$\int u^9\,\mathrm{d}u = \frac{u^{10}}{10} + C.$$

Il reste alors à remplacer $u(x)$ par son expression explicite en x, pour arriver à

$$\int 3x^2(x^3+5)^9\,\mathrm{d}x = \int u^9\,\mathrm{d}u = \frac{u^{10}}{10} + C = \frac{(x^3+5)^{10}}{10} + C.$$

Un exemple concret

Exemple

On veut calculer:

$$\int 3x^2(x^3+5)^9\,\mathrm{d}x$$

On pose $u = x^3 + 5$. On calcule alors: $\mathrm{d}u = 3x^2\,\mathrm{d}x$. Et donc

$$\int 3x^2(x^3+5)^9\,\mathrm{d}x = \int \underbrace{(x^3+5)^9}_{=u^9} \cdot \underbrace{3x^2\,\mathrm{d}x}_{=\mathrm{d}u} = \int u^9\,\mathrm{d}u$$

On calcule maintenant une primitive de u^9 pour la nouvelle variable u avec la règle des puissances:

$$\int u^9\,\mathrm{d}u = \frac{u^{10}}{10} + C.$$

Il reste alors à remplacer $u(x)$ par son expression explicite en x, pour arriver à

$$\int 3x^2(x^3+5)^9\,\mathrm{d}x = \int u^9\,\mathrm{d}u = \frac{u^{10}}{10} + C = \frac{(x^3+5)^{10}}{10} + C.$$

On vérifiera le calcul en dérivant le membre de droite!