Contenu de la section

Contenu de la section

Retour sur le problème de la dernière fois: position à partir de la vitesse

On considère un mobile qui se déplace verticalement et dont la hauteur au temps t est notée $x(t)$.

Retour sur le problème de la dernière fois: position à partir de la vitesse

On considère un mobile qui se déplace verticalement et dont la hauteur au temps t est notée $x(t)$. On cherche $x(t)$, connaissant juste sa vitesse à l'instant t qui est donnée par

Retour sur le problème de la dernière fois: position à partir de la vitesse

On considère un mobile qui se déplace verticalement et dont la hauteur au temps t est notée $x(t)$. On cherche $x(t)$, connaissant juste sa vitesse à l'instant t qui est donnée par

$$v(t) = \sin(t) + t.$$

Retour sur le problème de la dernière fois: position à partir de la vitesse

On considère un mobile qui se déplace verticalement et dont la hauteur au temps t est notée $x(t)$. On cherche $x(t)$, connaissant juste sa vitesse à l'instant t qui est donnée par

$$v(t) = \sin(t) + t.$$

La vitesse est par définition la dérivée de la position: $x'(t) = v(t)$.

Retour sur le problème de la dernière fois: position à partir de la vitesse

On considère un mobile qui se déplace verticalement et dont la hauteur au temps t est notée $x(t)$. On cherche $x(t)$, connaissant juste sa vitesse à l'instant t qui est donnée par

$$v(t) = \sin(t) + t.$$

La vitesse est par définition la dérivée de la position: $x'(t) = v(t)$. C'est-à-dire:

$$x(t) = \int v(t)\,\mathrm{d}t = \int (\sin(t) + t)\,\mathrm{d}t = -\cos(t) + \frac{t^2}{2} + C$$

Retour sur le problème de la dernière fois: position à partir de la vitesse

On considère un mobile qui se déplace verticalement et dont la hauteur au temps t est notée $x(t)$. On cherche $x(t)$, connaissant juste sa vitesse à l'instant t qui est donnée par

$$v(t) = \sin(t) + t.$$

La vitesse est par définition la dérivée de la position: $x'(t) = v(t)$. C'est-à-dire:

$$x(t) = \int v(t)\,\mathrm{d}t = \int (\sin(t) + t)\,\mathrm{d}t = -\cos(t) + \frac{t^2}{2} + C$$

On suppose qu'à l'instant $t = 0$ le mobile est à une hauteur nulle: $x(0) = 0$.

Retour sur le problème de la dernière fois: position à partir de la vitesse

On considère un mobile qui se déplace verticalement et dont la hauteur au temps t est notée $x(t)$. On cherche $x(t)$, connaissant juste sa vitesse à l'instant t qui est donnée par

$$v(t) = \sin(t) + t.$$

La vitesse est par définition la dérivée de la position: $x'(t) = v(t)$. C'est-à-dire:

$$x(t) = \int v(t)\,dt = \int (\sin(t) + t)\,dt = -\cos(t) + \frac{t^2}{2} + C$$

On suppose qu'à l'instant $t = 0$ le mobile est à une hauteur nulle: $x(0) = 0$. Ceci va nous permettre de déterminer la valeur de la constante C, donc de la primitive qui convient.

Retour sur le problème de la dernière fois: position à partir de la vitesse

On considère un mobile qui se déplace verticalement et dont la hauteur au temps t est notée $x(t)$. On cherche $x(t)$, connaissant juste sa vitesse à l'instant t qui est donnée par

$$v(t) = \sin(t) + t.$$

La vitesse est par définition la dérivée de la position: $x'(t) = v(t)$. C'est-à-dire:

$$x(t) = \int v(t)\,\mathrm{d}t = \int (\sin(t) + t)\,\mathrm{d}t = -\cos(t) + \frac{t^2}{2} + C$$

On suppose qu'à l'instant $t = 0$ le mobile est à une hauteur nulle: $x(0) = 0$. Ceci va nous permettre de déterminer la valeur de la constante C, donc de la primitive qui convient.

En évaluant $x(t)$ en $t = 0$, ceci signifie que $-1 + C = 0$,

Retour sur le problème de la dernière fois: position à partir de la vitesse

On considère un mobile qui se déplace verticalement et dont la hauteur au temps t est notée $x(t)$. On cherche $x(t)$, connaissant juste sa vitesse à l'instant t qui est donnée par

$$v(t) = \sin(t) + t.$$

La vitesse est par définition la dérivée de la position: $x'(t) = v(t)$. C'est-à-dire:

$$x(t) = \int v(t)\,\mathrm{d}t = \int (\sin(t) + t)\,\mathrm{d}t = -\cos(t) + \frac{t^2}{2} + C$$

On suppose qu'à l'instant $t = 0$ le mobile est à une hauteur nulle: $x(0) = 0$. Ceci va nous permettre de déterminer la valeur de la constante C, donc de la primitive qui convient.
En évaluant $x(t)$ en $t = 0$, ceci signifie que $-1 + C = 0$, c'est-à-dire:

$$x(t) = 1 - \cos(t) + \frac{t^2}{2}$$

Contenu de la section

Rappel: méthode de changement de variable

On pose $u = f(x)$ dans l'intégrale

Rappel: méthode de changement de variable

On pose $u = f(x)$ dans l'intégrale, et on écrit $\mathrm{d}u = f'(x)\,\mathrm{d}x$.

Rappel: méthode de changement de variable

On pose $u = f(x)$ dans l'intégrale, et on écrit $\mathrm{d}u = f'(x)\,\mathrm{d}x$.

Remarque

- Ne jamais mélanger ancienne et nouvelle variable au sein de l'intégrale ! C'est soit toujours x, soit toujours u

Rappel: méthode de changement de variable

On pose $u = f(x)$ dans l'intégrale, et on écrit $\mathrm{d}u = f'(x)\,\mathrm{d}x$.

Remarque

- Ne jamais mélanger ancienne et nouvelle variable au sein de l'intégrale ! C'est soit toujours x, soit toujours u
- Si l'ancienne variable s'appelle x et la nouvelle s'appelle u , $\mathrm{d}x$ apparaissait au début:

Rappel: méthode de changement de variable

On pose $u = f(x)$ dans l'intégrale, et on écrit $\mathrm{d}u = f'(x)\,\mathrm{d}x$.

Remarque

- Ne jamais mélanger ancienne et nouvelle variable au sein de l'intégrale ! C'est soit toujours x, soit toujours u
- Si l'ancienne variable s'appelle x et la nouvelle s'appelle u , $\mathrm{d}x$ apparaissait au début: il *doit* donc être remplacé par *une* occurrence de $\mathrm{d}u$.

Rappel: méthode de changement de variable

On pose $u = f(x)$ dans l'intégrale, et on écrit $\mathrm{d}u = f'(x)\,\mathrm{d}x$.

Remarque

- Ne jamais mélanger ancienne et nouvelle variable au sein de l'intégrale ! C'est soit toujours x, soit toujours u
- Si l'ancienne variable s'appelle x et la nouvelle s'appelle u , $\mathrm{d}x$ apparaissait au début: il *doit* donc être remplacé par *une* occurrence de $\mathrm{d}u$. (En général on se débrouille pour faire apparaître $f'(x)\,\mathrm{d}x$ au début et le remplacer directement par $\mathrm{d}u$)

Rappel: méthode de changement de variable

On pose $u = f(x)$ dans l'intégrale, et on écrit $\mathrm{d}u = f'(x)\,\mathrm{d}x$.

Remarque

- Ne jamais mélanger ancienne et nouvelle variable au sein de l'intégrale ! C'est soit toujours x, soit toujours u
- Si l'ancienne variable s'appelle x et la nouvelle s'appelle u , $\mathrm{d}x$ apparaissait au début: il *doit* donc être remplacé par une occurrence de $\mathrm{d}u$. (En général on se débrouille pour faire apparaître $f'(x)\,\mathrm{d}x$ au début et le remplacer directement par $\mathrm{d}u$)
- Il ne peut pas y avoir de $\mathrm{d}u$ au carré, de $\frac{1}{\mathrm{d}u}$ ni de « $\mathrm{d}u$ ajouté à autre chose ».

Exemple

Calculez
$$\int \sin^4 x \cos x \, \mathrm{d}x$$

Exemple

Calculez

$$\int \sin^4 x \cos x \, \mathrm{d}x$$

en posant $u = \sin x$.

Exemple

Calculez

$$\int \sin^4 x \cos x \, \mathrm{d}x$$

en posant $u = \sin x$. Alors $\mathrm{d}u = \cos x \, \mathrm{d}x$ et on obtient donc:

Exemple

Calculez

$$\int \sin^4 x \cos x \, \mathrm{d}x$$

en posant $u = \sin x$. Alors $\mathrm{d}u = \cos x \, \mathrm{d}x$ et on obtient donc:

$$\int \sin^4 x \cos x \, \mathrm{d}x = \int u^4 \, \mathrm{d}u$$

Exemple

Calculez
$$\int \sin^4 x \cos x \, \mathrm{d}x$$
en posant $u = \sin x$. Alors $\mathrm{d}u = \cos x \, \mathrm{d}x$ et on obtient donc:
$$\int \sin^4 x \cos x \, \mathrm{d}x = \int u^4 \, \mathrm{d}u = \frac{u^5}{5} + C$$

Exemple

Calculez

$$\int \sin^4 x \cos x \, dx$$

en posant $u = \sin x$. Alors $du = \cos x \, dx$ et on obtient donc:

$$\int \sin^4 x \cos x \, dx = \int u^4 \, du = \frac{u^5}{5} + C = \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

Exemple

Calculez

$$\int \sin^4 x \cos x \, \mathrm{d}x$$

en posant $u = \sin x$. Alors $\mathrm{d}u = \cos x \, \mathrm{d}x$ et on obtient donc:

$$\int \sin^4 x \cos x \, \mathrm{d}x = \int u^4 \, \mathrm{d}u = \frac{u^5}{5} + C = \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

Exemple

Calculez
$$\int \sin^4 x \cos x \, dx$$
en posant $u = \sin x$. Alors $du = \cos x \, dx$ et on obtient donc:
$$\int \sin^4 x \cos x \, dx = \int u^4 \, du = \frac{u^5}{5} + C = \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

On a ici pensé à poser $u = f(x) = \sin x$ car l'intégrale contient déjà $\cos x$, qui n'est autre que $f'(x)$.

Exemple

Calculez

$$\int \sin^4 x \cos x \, \mathrm{d}x$$

en posant $u = \sin x$. Alors $\mathrm{d}u = \cos x \, \mathrm{d}x$ et on obtient donc:

$$\int \sin^4 x \cos x \, \mathrm{d}x = \int u^4 \, \mathrm{d}u = \frac{u^5}{5} + C = \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

On a ici pensé à poser $u = f(x) = \sin x$ car l'intégrale contient déjà $\cos x$, qui n'est autre que $f'(x)$.

Pour vérifier que c'est bon, comme toujours: on dérive le résultat obtenu et on vérifie que ça donne bien $\sin^4 x \cos x$.

Sur le choix de la méthode pour calculer une primitive

Remarque

- Il n'y a pas de « bonne manière » de résoudre un calcul de primitive: l'important est d'obtenir une expression dont la dérivée correspond à l'expression dont on part.

Sur le choix de la méthode pour calculer une primitive

Remarque

- Il n'y a pas de « bonne manière » de résoudre un calcul de primitive: l'important est d'obtenir une expression dont la dérivée correspond à l'expression dont on part.
- Pensez à toujours bien vérifier le calcul en dérivant le résultat obtenu pour vérifier qu'on récupère bien ce qu'il faut!

Une mise en garde

Deux primitives d'une même fonction peuvent parfois « paraître » très différentes.

Une mise en garde

Deux primitives d'une même fonction peuvent parfois « paraître » très différentes. Regardons par exemple les fonctions

$$\arccos = \cos^{-1} : [-1,1] \to [0,\pi], \quad x \mapsto \arccos(x)$$

et

$$\arcsin = \sin^{-1} : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}], \quad x \mapsto \arcsin(x)$$

Une mise en garde

Deux primitives d'une même fonction peuvent parfois « paraître » très différentes. Regardons par exemple les fonctions

$$\arccos = \cos^{-1} : [-1,1] \to [0,\pi], \quad x \mapsto \arccos(x)$$

et

$$\arcsin = \sin^{-1} : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}], \quad x \mapsto \arcsin(x)$$

On n'a pas encore calculé leurs dérivées:

Une mise en garde

Deux primitives d'une même fonction peuvent parfois « paraître » très différentes. Regardons par exemple les fonctions

$$\arccos = \cos^{-1} : [-1,1] \to [0,\pi], \quad x \mapsto \arccos(x)$$

et

$$\arcsin = \sin^{-1} : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}], \quad x \mapsto \arcsin(x)$$

On n'a pas encore calculé leurs dérivées:

Résultat

Pour tout $x \in]-1,1[$ on a:

$$\arcsin'(x) = -\arccos'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Une mise en garde

Deux primitives d'une même fonction peuvent parfois « paraître » très différentes. Regardons par exemple les fonctions

$$\arccos = \cos^{-1} : [-1,1] \to [0,\pi], \quad x \mapsto \arccos(x)$$

et

$$\arcsin = \sin^{-1} : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad x \mapsto \arcsin(x)$$

On n'a pas encore calculé leurs dérivées:

Résultat

Pour tout $x \in]-1,1[$ on a:

$$\arcsin'(x) = -\arccos'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ainsi, $-\arccos(x)$ et $\arcsin(x)$ sont deux primitives de la fonction $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Une mise en garde

Deux primitives d'une même fonction peuvent parfois « paraître » très différentes. Regardons par exemple les fonctions

$$\arccos = \cos^{-1} : [-1,1] \to [0,\pi], \quad x \mapsto \arccos(x)$$

et

$$\arcsin = \sin^{-1} : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}], \quad x \mapsto \arcsin(x)$$

On n'a pas encore calculé leurs dérivées:

Résultat

Pour tout $x \in]-1,1[$ on a:

$$\arcsin'(x) = -\arccos'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ainsi, $-\arccos(x)$ et $\arcsin(x)$ sont deux primitives de la fonction $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
Ça veut dire qu'elles diffèrent d'une constante, mais ce n'est pas facile à voir!

Rappel: graphe de arcsinus

Graphe (en rouge) de la fonction

$$\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

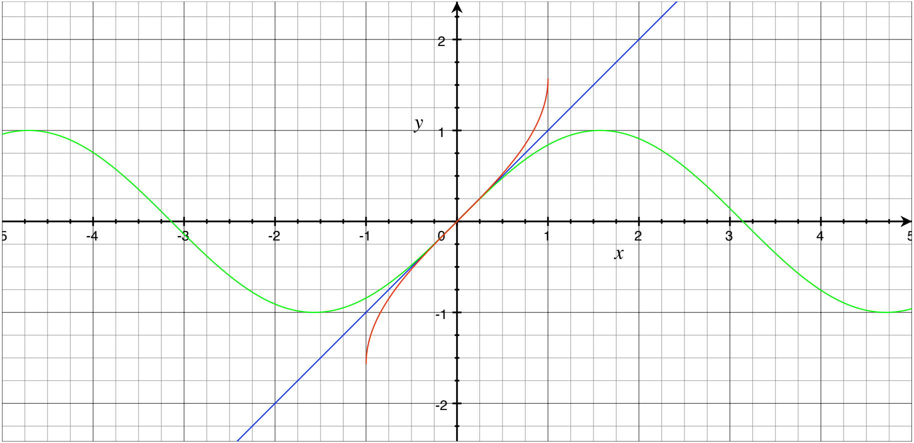

Fig.: Graphes de sin et arcsin

Rappel II: graphe de arccosinus

Graphe (en rouge) de la fonction

$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$$

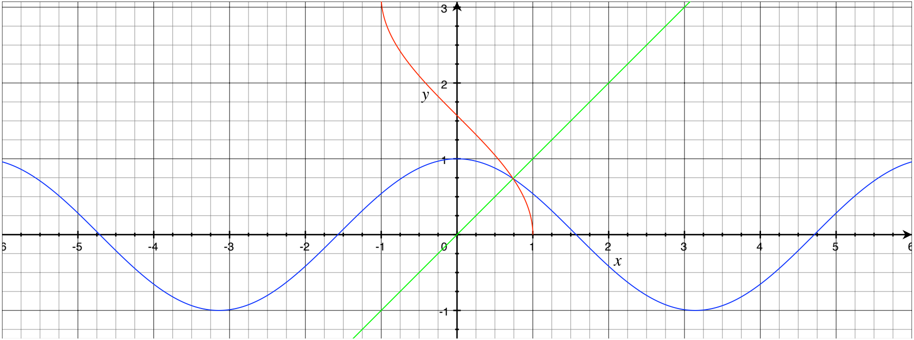

Fig.: Graphes de cos et arccos

Preuve de la proposition précédente

Démonstration.

On calcule la dérivée de $\arcsin = \sin^{-1}$ en x avec la formule pour la dérivée d'une réciproque: on a, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$(\arcsin x)' =$$

Preuve de la proposition précédente

Démonstration.

On calcule la dérivée de $\arcsin = \sin^{-1}$ en x avec la formule pour la dérivée d'une réciproque: on a, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin)'(\arcsin x)} =$$

Preuve de la proposition précédente

Démonstration.

On calcule la dérivée de $\arcsin = \sin^{-1}$ en x avec la formule pour la dérivée d'une réciproque: on a, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin)'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}.$$

Preuve de la proposition précédente

Démonstration.

On calcule la dérivée de $\arcsin = \sin^{-1}$ en x avec la formule pour la dérivée d'une réciproque: on a, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin)'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}.$$

En utilisant la relation: pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\sin(y)^2 + \cos(y)^2 = 1$$

Preuve de la proposition précédente

Démonstration.

On calcule la dérivée de $\arcsin = \sin^{-1}$ en x avec la formule pour la dérivée d'une réciproque: on a, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin)'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}.$$

En utilisant la relation: pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\sin(y)^2 + \cos(y)^2 = 1$$

et en l'appliquant en $y = \arcsin x$, on trouve:

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Preuve de la proposition précédente

Démonstration.

On calcule la dérivée de $\arcsin = \sin^{-1}$ en x avec la formule pour la dérivée d'une réciproque: on a, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin)'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}.$$

En utilisant la relation: pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\sin(y)^2 + \cos(y)^2 = 1$$

et en l'appliquant en $y = \arcsin x$, on trouve:

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

En fin de comptes on trouve donc:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

Preuve de la proposition précédente

Démonstration.

On calcule la dérivée de $\arcsin = \sin^{-1}$ en x avec la formule pour la dérivée d'une réciproque: on a, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin)'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}.$$

En utilisant la relation: pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\sin(y)^2 + \cos(y)^2 = 1$$

et en l'appliquant en $y = \arcsin x$, on trouve:

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

En fin de comptes on trouve donc:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$\square$

Preuve de la proposition précédente

Démonstration.

On calcule la dérivée de $\arcsin = \sin^{-1}$ en x avec la formule pour la dérivée d'une réciproque: on a, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin)'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}.$$

En utilisant la relation: pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\sin(y)^2 + \cos(y)^2 = 1$$

et en l'appliquant en $y = \arcsin x$, on trouve:

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}.$$

En fin de comptes on trouve donc:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$\square$

Le même raisonnement donne le réultat pour arccos.

Contenu de la section

Une autre méthode d'intégration: l'Intégration par parties (IPP)

On part de la règle de dérivation du produit:

$$
\begin{aligned}
& (f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\
\text{donc} \qquad & f'(x)g(x) = (f(x)g(x))' - f(x)g'(x)
\end{aligned}
$$

Une autre méthode d'intégration: l'Intégration par parties (IPP)

On part de la règle de dérivation du produit:

$$\begin{aligned} (f(x)g(x))' &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ \text{donc} \qquad f'(x)g(x) &= (f(x)g(x))' - f(x)g'(x) \end{aligned}$$

En prenant des primitives, on trouve :

Une autre méthode d'intégration: l'Intégration par parties (IPP)

On part de la règle de dérivation du produit:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$
$$\text{donc} \qquad f'(x)g(x) = (f(x)g(x))' - f(x)g'(x)$$

En prenant des primitives, on trouve :

Formule d'intégration par parties (IPP)

$$\boxed{\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x}$$

Une autre méthode d'intégration: l'Intégration par parties (IPP)

On part de la règle de dérivation du produit:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\text{donc} \qquad f'(x)g(x) = (f(x)g(x))' - f(x)g'(x)$$

En prenant des primitives, on trouve :

Formule d'intégration par parties (IPP)

$$\boxed{\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x}$$

En pratique: quand on aura une primitive à calculer, on essayera d'identifier f' et g et on applique directement cette formule!

Exemple

On veut calculer $\int x \cos x \, \mathrm{d}x$. On pose alors:

Exemple

On veut calculer $\int x \cos x \, dx$. On pose alors:

$$g(x) = x, \quad f'(x) = \cos x$$

Exemple

On veut calculer $\int x \cos x \, \mathrm{d}x$. On pose alors:

$$g(x) = x\,, \quad f'(x) = \cos x$$

et donc

$$g'(x) = 1\,, \quad f(x) = \sin x$$

Exemple

On veut calculer $\int x \cos x \, \mathrm{d}x$. On pose alors:

$$g(x) = x\,, \quad f'(x) = \cos x$$

et donc

$$g'(x) = 1\,, \quad f(x) = \sin x$$

de sorte que la formule d'IPP donne:

$$\int x \cos x \, \mathrm{d}x = (\sin x)x - \int (\sin x) 1 \, \mathrm{d}x$$

Exemple

On veut calculer $\int x \cos x \, \mathrm{d}x$. On pose alors:

$$g(x) = x\,, \quad f'(x) = \cos x$$

et donc

$$g'(x) = 1\,, \quad f(x) = \sin x$$

de sorte que la formule d'IPP donne:

$$\begin{aligned} \int x \cos x \, \mathrm{d}x &= (\sin x)x - \int (\sin x) 1 \, \mathrm{d}x \\ &= x \sin x - (-\cos x) + C \end{aligned}$$

Exemple

On veut calculer $\int x \cos x \, \mathrm{d}x$. On pose alors:

$$g(x) = x\,, \quad f'(x) = \cos x$$

et donc

$$g'(x) = 1\,, \quad f(x) = \sin x$$

de sorte que la formule d'IPP donne:

$$\begin{aligned}\int x \cos x \, \mathrm{d}x &= (\sin x)x - \int (\sin x) 1 \, \mathrm{d}x \\ &= x \sin x - (-\cos x) + C \\ &= x \sin x + \cos x + C\end{aligned}$$

Exemple

On veut calculer $\int x \cos x \, \mathrm{d}x$. On pose alors:

$$g(x) = x \,, \quad f'(x) = \cos x$$

et donc

$$g'(x) = 1 \,, \quad f(x) = \sin x$$

de sorte que la formule d'IPP donne:

$$\begin{aligned} \int x \cos x \, \mathrm{d}x &= (\sin x)x - \int (\sin x) 1 \, \mathrm{d}x \\ &= x \sin x - (-\cos x) + C \\ &= x \sin x + \cos x + C \end{aligned}$$

Exemple

On veut calculer $\int x \cos x \, \mathrm{d}x$. On pose alors:

$$g(x) = x\,, \quad f'(x) = \cos x$$

et donc

$$g'(x) = 1\,, \quad f(x) = \sin x$$

de sorte que la formule d'IPP donne:

$$\begin{aligned}\int x \cos x \, \mathrm{d}x &= (\sin x)x - \int (\sin x) 1 \, \mathrm{d}x \\ &= x \sin x - (-\cos x) + C \\ &= x \sin x + \cos x + C\end{aligned}$$

Pourquoi ce choix de f et g? On aurait très bien pu au contraire poser $f'(x) = x$ et $g(x) = \cos x$. On aurait alors obtenu

Exemple

On veut calculer $\int x\cos x\,\mathrm{d}x$. On pose alors:

$$g(x) = x\,,\quad f'(x) = \cos x$$

et donc

$$g'(x) = 1\,,\quad f(x) = \sin x$$

de sorte que la formule d'IPP donne:

$$\begin{aligned}\int x\cos x\,\mathrm{d}x &= (\sin x)x - \int (\sin x)1\,\mathrm{d}x\\ &= x\sin x - (-\cos x) + C\\ &= x\sin x + \cos x + C\end{aligned}$$

Pourquoi ce choix de f et g? On aurait très bien pu au contraire poser $f'(x) = x$ et $g(x) = \cos x$. On aurait alors obtenu

$$\int x\cos x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\cos x + \int \frac{x^2}{2}\sin x\,\mathrm{d}x$$

Exemple

On veut calculer $\int x \cos x \, \mathrm{d}x$. On pose alors:

$$g(x) = x\,, \quad f'(x) = \cos x$$

et donc

$$g'(x) = 1\,, \quad f(x) = \sin x$$

de sorte que la formule d'IPP donne:

$$\begin{aligned}\int x \cos x \, \mathrm{d}x &= (\sin x)x - \int (\sin x) 1 \, \mathrm{d}x \\ &= x \sin x - (-\cos x) + C \\ &= x \sin x + \cos x + C\end{aligned}$$

Pourquoi ce choix de f et g? On aurait très bien pu au contraire poser $f'(x) = x$ et $g(x) = \cos x$. On aurait alors obtenu

$$\int x \cos x \, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \cos x + \int \frac{x^2}{2} \sin x \, \mathrm{d}x$$

qui est une primitive qui semble plus difficile à calculer que celle de départ!

La morale de l'histoire

Remarque

Cet exemple montre que

- le choix de $f'(x)$ et $g(x)$ est crucial dans une intégration par parties, et

La morale de l'histoire

Remarque

Cet exemple montre que

- le choix de $f'(x)$ et $g(x)$ est crucial dans une intégration par parties, et
- si un premier essai s'est soldé par un échec, on a tout intérêt à faire un second essai en inversant les rôles de $f'(x)$ et $g(x)$.

Un autre exemple

Question

Calculer

$$\int \ln x \, \mathrm{d}x$$

Un autre exemple

Question

Calculer

$$\int \ln x \, \mathrm{d}x$$

Démonstration.

Utilisez l'astuce suivante:

$$\int \ln x \, \mathrm{d}x = \int 1 \ln x \, \mathrm{d}x$$

Un autre exemple

Question

Calculer

$$\int \ln x \, \mathrm{d}x$$

Démonstration.

Utilisez l'astuce suivante:

$$\int \ln x \, \mathrm{d}x = \int 1 \ln x \, \mathrm{d}x$$

Ceci donne l'idée de prendre

$$g(x) = \ln x, \qquad f'(x) = 1$$

Un autre exemple

Question

Calculer

$$\int \ln x \, dx$$

Démonstration.

Utilisez l'astuce suivante:

$$\int \ln x \, dx = \int 1 \ln x \, dx$$

Ceci donne l'idée de prendre

$$g(x) = \ln x, \qquad f'(x) = 1$$

$$g'(x) = \frac{1}{x}, \qquad f(x) = x$$

Un autre exemple

Question

Calculer
$$\int \ln x \, \mathrm{d}x$$

Démonstration.

Utilisez l'astuce suivante:
$$\int \ln x \, \mathrm{d}x = \int 1 \ln x \, \mathrm{d}x$$
Ceci donne l'idée de prendre
$$g(x) = \ln x, \qquad f'(x) = 1$$
$$g'(x) = \frac{1}{x}, \qquad f(x) = x$$

Un autre exemple

Question

Calculer

$$\int \ln x \, \mathrm{d}x$$

Démonstration.

Utilisez l'astuce suivante:

$$\int \ln x \, \mathrm{d}x = \int 1 \ln x \, \mathrm{d}x$$

Ceci donne l'idée de prendre

$$g(x) = \ln x, \qquad f'(x) = 1$$

$$g'(x) = \frac{1}{x}, \qquad f(x) = x$$

Alors une IPP donne

Un autre exemple

Question

Calculer
$$\int \ln x \, \mathrm{d}x$$

Démonstration.

Utilisez l'astuce suivante:
$$\int \ln x \, \mathrm{d}x = \int 1 \ln x \, \mathrm{d}x$$
Ceci donne l'idée de prendre
$$g(x) = \ln x, \qquad f'(x) = 1$$
$$g'(x) = \frac{1}{x}, \qquad f(x) = x$$
Alors une IPP donne
$$\int \ln x \, \mathrm{d}x = x \ln x - \int x \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x$$
pour $x \in \,]0,\infty[$.

$\square$

Un autre exemple

Question

Calculer
$$\int \ln x \, \mathrm{d}x$$

Démonstration.

Utilisez l'astuce suivante:
$$\int \ln x \, \mathrm{d}x = \int 1 \ln x \, \mathrm{d}x$$
Ceci donne l'idée de prendre
$$g(x) = \ln x, \qquad f'(x) = 1$$
$$g'(x) = \frac{1}{x}, \qquad f(x) = x$$
Alors une IPP donne
$$\int \ln x \, \mathrm{d}x = x \ln x - \int x \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = x \ln x - \int \mathrm{d}x$$
pour $x \in]0,\infty[$.

□

Un autre exemple

Question

Calculer
$$\int \ln x \, \mathrm{d}x$$

Démonstration.

Utilisez l'astuce suivante:
$$\int \ln x \, \mathrm{d}x = \int 1 \ln x \, \mathrm{d}x$$
Ceci donne l'idée de prendre
$$g(x) = \ln x, \qquad f'(x) = 1$$
$$g'(x) = \frac{1}{x}, \qquad f(x) = x$$
Alors une IPP donne
$$\int \ln x \, \mathrm{d}x = x \ln x - \int x \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = x \ln x - \int \mathrm{d}x = x \ln x - x + C$$
pour $x \in]0, \infty[$. □

Contenu de la section

1. Primitives
   - La position à partir de la vitesse
   - Retour sur le changement de variables
   - Intégration par parties
   - Décomposition en fractions simples

Fonctions rationnelles

Définition

Une *fonction rationnelle* est une fonction du type $\frac{P(x)}{Q(x)}$ où P et Q sont des polynômes.

Fonctions rationnelles

Définition

Une *fonction rationnelle* est une fonction du type $\frac{P(x)}{Q(x)}$ où P et Q sont des polynômes.

Un résultat surprenant est que les primitives d'une telle fonction,

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$$

Fonctions rationnelles

Définition

Une *fonction rationnelle* est une fonction du type $\frac{P(x)}{Q(x)}$ où P et Q sont des polynômes.

Un résultat surprenant est que les primitives d'une telle fonction,

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$$

sont *toujours* des fonctions « élémentaires » (c'est-à-dire qu'on peut en écrire une formule explicite en fonction des fonctions classiques: fonctions puissance, $\exp(x), \cos, \sin, \cosh, \sinh \ldots$).

Fonctions rationnelles

Définition

Une *fonction rationnelle* est une fonction du type $\frac{P(x)}{Q(x)}$ où P et Q sont des polynômes.

Un résultat surprenant est que les primitives d'une telle fonction,

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$$

sont *toujours des fonctions « élémentaires »* (c'est-à-dire qu'on peut en écrire une formule explicite en fonction des fonctions classiques: fonctions puissance, $\exp(x), \cos, \sin, \cosh, \sinh \dots$).

Ceci se démontre grâce à une technique appelée la *décomposition en fractions simples* qu'on va expliquer maintenant.

1 Primitives

- La position à partir de la vitesse
- Retour sur le changement de variables
- Intégration par parties
- Décomposition en fractions simples
  - Polynômes irréductibles
  - Fraction simple
  - Application au calcul d'intégrales

Polynômes irréductibles

On considère une fonction polynôme quelconque de degré $n \geq 1$:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Polynômes irréductibles

On considère une fonction polynôme quelconque de degré $n \geq 1$:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Résultat

Toute fonction polynôme peut toujours s'écrire de manière unique comme le produit d'une constante non nulle et d'un certain nombre

Polynômes irréductibles

On considère une fonction polynôme quelconque de degré $n \geq 1$:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Résultat

Toute fonction polynôme peut toujours s'écrire de manière unique comme le produit d'une constante non nulle et d'un certain nombre

- *de polynômes d'ordre 1 de la forme $x - a$*

Polynômes irréductibles

On considère une fonction polynôme quelconque de degré $n \geq 1$:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Résultat

Toute fonction polynôme peut toujours s'écrire de manière unique comme le produit d'une constante non nulle et d'un certain nombre

- *de polynômes d'ordre 1 de la forme $x - a$*
- *de polynômes d'ordre 2 de la forme $x^2 + px + q$ qui n'ont pas de racines réelles: c'est-à-dire vérifiant $p^2 - 4q < 0$.*

Polynômes irréductibles

On considère une fonction polynôme quelconque de degré $n \geq 1$:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Résultat

Toute fonction polynôme peut toujours s'écrire de manière unique comme le produit d'une constante non nulle et d'un certain nombre

- *de polynômes d'ordre 1 de la forme $x - a$*
- *de polynômes d'ordre 2 de la forme $x^2 + px + q$ qui n'ont pas de racines réelles: c'est-à-dire vérifiant $p^2 - 4q < 0$.*

On appelle ces polynômes des polynômes irréductibles.

Des exemples

Exemple

- Le polynôme $x^3 - 1$ s'écrit comme:
$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1).$$

Des exemples

Exemple

- Le polynôme $x^3 - 1$ s'écrit comme:
$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1).$$

- Le polynôme $x^2 - 2x + 1$ sécrit comme:
$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2.$$

Des exemples

Exemple

- Le polynôme x^3-1 s'écrit comme:
$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1).$$
- Le polynôme x^2-2x+1 sécrit comme:
$$x^2-2x+1=(x-1)^2.$$
- Le polynôme X^4+1 s'écrit comme
$$X^4+1=\left(X^2-\sqrt{2}x+1\right)\left(X^2+\sqrt{2}x+1\right).$$

Des exemples

Exemple

- Le polynôme x^3-1 s'écrit comme:
$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1).$$
- Le polynôme x^2-2x+1 sécrit comme:
$$x^2-2x+1=(x-1)^2.$$
- Le polynôme X^4+1 s'écrit comme
$$X^4+1=\left(X^2-\sqrt{2}x+1\right)\left(X^2+\sqrt{2}x+1\right).$$

Pour vérifier ces calculs, on développe terme à terme le membre de droite.

Des exemples

Exemple

- Le polynôme $x^3 - 1$ s'écrit comme:
$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1).$$
- Le polynôme $x^2 - 2x + 1$ sécrit comme:
$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2.$$
- Le polynôme $X^4 + 1$ s'écrit comme
$$X^4 + 1 = \left(X^2 - \sqrt{2}x + 1\right)\left(X^2 + \sqrt{2}x + 1\right).$$

Pour vérifier ces calculs, on développe terme à terme le membre de droite. Une fois qu'on a écrit le polynôme comme un produit de polynômes d'ordre (au plus) 2, on dit qu'on a écrit une décomposition de P en produit de polynômes irréductibles.

Remarque

Une règle pratique à retenir: si $a \in \mathbb{R}$ est un zéro du polynôme P (c'est-à -dire si $P(a) = 0$),

Remarque

Une règle pratique à retenir: si $a \in \mathbb{R}$ est un zéro du polynôme P (c'est-à -dire si $P(a) = 0$), alors $(x - a)$ est un des facteurs irréductibles de P.

Remarque

Une règle pratique à retenir: si $a \in \mathbb{R}$ est un zéro du polynôme P (c'est-à -dire si $P(a) = 0$), alors $(x - a)$ est un des facteurs irréductibles de P. On ecrira encore:

$$P(x) = (x - a) \cdot Q(x)$$

pour un autre polynôme Q, de degré « un de moins ».

Exemple

Le polynôme $P(x) = x^3 - 1$ vérifie bien $P(1) = 0$. On peut donc l'écrire comme

$$P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$$

pour des constantes a,b,c réelles.

Exemple

Le polynôme $P(x) = x^3 - 1$ vérifie bien $P(1) = 0$. On peut donc l'écrire comme

$$P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$$

pour des constantes a,b,c réelles. On développe ensuite cette expression:

Exemple

Le polynôme $P(x) = x^3 - 1$ vérifie bien $P(1) = 0$. On peut donc l'écrire comme

$$P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$$

pour des constantes a,b,c réelles. On développe ensuite cette expression:

$$x^3 - 1 =$$

Exemple

Le polynôme $P(x) = x^3 - 1$ vérifie bien $P(1) = 0$. On peut donc l'écrire comme
$$P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$$
pour des constantes a,b,c réelles. On développe ensuite cette expression:
$$\begin{aligned} x^3 - 1 &= (x-1)(ax^2 + bx + c) \\ &= \end{aligned}$$

Exemple

Le polynôme $P(x) = x^3 - 1$ vérifie bien $P(1) = 0$. On peut donc l'écrire comme

$$P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$$

pour des constantes a,b,c réelles. On développe ensuite cette expression:

$$\begin{aligned} x^3 - 1 &= (x-1)(ax^2 + bx + c) \\ &= ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c \\ &= \end{aligned}$$

Exemple

Le polynôme $P(x) = x^3 - 1$ vérifie bien $P(1) = 0$. On peut donc l'écrire comme

$$P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$$

pour des constantes a,b,c réelles. On développe ensuite cette expression:

$$\begin{aligned} x^3 - 1 &= (x-1)(ax^2 + bx + c) \\ &= ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c \\ &= ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c \end{aligned}$$

Exemple

Le polynôme $P(x) = x^3 - 1$ vérifie bien $P(1) = 0$. On peut donc l'écrire comme

$$P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$$

pour des constantes a,b,c réelles. On développe ensuite cette expression:

$$\begin{aligned} x^3 - 1 &= (x-1)(ax^2 + bx + c) \\ &= ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c \\ &= ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients on trouve:

$$a = 1,$$

Exemple

Le polynôme $P(x) = x^3 - 1$ vérifie bien $P(1) = 0$. On peut donc l'écrire comme

$$P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$$

pour des constantes a,b,c réelles. On développe ensuite cette expression:

$$\begin{aligned} x^3 - 1 &= (x-1)(ax^2 + bx + c) \\ &= ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c \\ &= ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients on trouve:

$$a = 1, \quad c = 1,$$

Exemple

Le polynôme $P(x) = x^3 - 1$ vérifie bien $P(1) = 0$. On peut donc l'écrire comme

$$P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$$

pour des constantes a,b,c réelles. On développe ensuite cette expression:

$$\begin{aligned} x^3 - 1 &= (x-1)(ax^2+bx+c) \\ &= ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c \\ &= ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients on trouve:

$$a = 1, \quad c = 1, \quad b - a = 0$$

Exemple

Le polynôme $P(x) = x^3 - 1$ vérifie bien $P(1) = 0$. On peut donc l'écrire comme

$$P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$$

pour des constantes a,b,c réelles. On développe ensuite cette expression:

$$\begin{aligned} x^3 - 1 &= (x-1)(ax^2 + bx + c) \\ &= ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c \\ &= ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients on trouve:

$$a = 1, \quad c = 1, \quad b - a = 0 \text{ donc } b = 1.$$

Exemple

Le polynôme $P(x) = x^3 - 1$ vérifie bien $P(1) = 0$. On peut donc l'écrire comme

$$P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$$

pour des constantes a,b,c réelles. On développe ensuite cette expression:

$$\begin{aligned} x^3 - 1 &= (x-1)(ax^2 + bx + c) \\ &= ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c \\ &= ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients on trouve:

$$a = 1, \quad c = 1, \quad b - a = 0 \text{ donc } b = 1.$$

Ce qui donne bien:

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1).$$

Fractions simples

Définition

Une *fraction simple* est de la forme :

Fractions simples

Définition

Une *fraction simple* est de la forme :

$$\frac{a}{(x-c)^k}$$

Fractions simples

Définition

Une *fraction simple* est de la forme :

$$\frac{a}{(x-c)^k} \quad \text{ou} \quad \frac{ax+b}{\left((x-c)^2+d^2\right)^k}$$

Fractions simples

Définition

Une *fraction simple* est de la forme :

$$\frac{a}{(x-c)^k} \quad \text{ou} \quad \frac{ax+b}{\left((x-c)^2+d^2\right)^k}$$

pour certaines constantes réelles a,b,c,d, $d \neq 0$ et un certain entier $k > 0$.

Fractions simples

Définition

Une *fraction simple* est de la forme :

$$\frac{a}{(x-c)^k} \quad \text{ou} \quad \frac{ax+b}{\left((x-c)^2+d^2\right)^k}$$

pour certaines constantes réelles a,b,c,d, $d \neq 0$ et un certain entier $k > 0$.

Résultat

Toute fonction rationnelle (quotient de polynômes) de la forme $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *peut s'écrire comme la somme*

Fractions simples

Définition

Une *fraction simple* est de la forme :

$$\frac{a}{(x-c)^k} \quad \text{ou} \quad \frac{ax+b}{\big((x-c)^2+d^2\big)^k}$$

pour certaines constantes réelles a,b,c,d, $d \neq 0$ et un certain entier $k > 0$.

Résultat

Toute fonction rationnelle (quotient de polynômes) de la forme $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *peut s'écrire comme la somme*

1. *d'un « vrai » polynôme (éventuellement constant voire nul), et*

Fractions simples

Définition

Une *fraction simple* est de la forme :

$$\frac{a}{(x-c)^k} \quad \text{ou} \quad \frac{ax+b}{\left((x-c)^2+d^2\right)^k}$$

pour certaines constantes réelles a,b,c,d, $d \neq 0$ et un certain entier $k > 0$.

Résultat

Toute fonction rationnelle (quotient de polynômes) de la forme $\frac{P(x)}{Q(x)}$ peut s'écrire comme la somme

1. *d'un « vrai » polynôme (éventuellement constant voire nul), et*
2. *d'un certain nombre de fractions simples. Ces fractions sont telles que leur dénominateur apparaît dans la décomposition en irréductibles de $Q(x)$.*

1. Primitives
   - La position à partir de la vitesse
   - Retour sur le changement de variables
   - Intégration par parties
   - Décomposition en fractions simples
     - Polynômes irréductibles
     - Fraction simple
     - Application au calcul d'intégrales

Exemple de décomposition en fractions simples

On veut calculer

$$\int \frac{1}{x^2 - 1}\, \mathrm{d}x$$

Exemple de décomposition en fractions simples

On veut calculer

$$\int \frac{1}{x^2 - 1}\, \mathrm{d}x$$

Pour cela, on commence par décomposer $\frac{1}{x^2-1}$ en fractions simples.

Exemple de décomposition en fractions simples

On veut calculer
$$\int \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$$
Pour cela, on commence par décomposer $\frac{1}{x^2-1}$ en fractions simples.
On sait que la décomposition de x^2-1 en produit d'irréductibles est:
$$x^2-1=(x-1)(x+1).$$

Exemple de décomposition en fractions simples

On veut calculer
$$\int \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$$
Pour cela, on commence par décomposer $\frac{1}{x^2-1}$ en fractions simples.
On sait que la décomposition de x^2-1 en produit d'irréductibles est:
$$x^2-1=(x-1)(x+1).$$
Alors la proposition précédente dit qu'il existe deux nombres réels A et B (à déterminer!) tels que
$$\frac{1}{(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}.$$

Exemple de décomposition en fractions simples

On veut calculer
$$\int \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$$
Pour cela, on commence par décomposer $\frac{1}{x^2-1}$ en fractions simples.
On sait que la décomposition de x^2-1 en produit d'irréductibles est:
$$x^2-1=(x-1)(x+1).$$
Alors la proposition précédente dit qu'il existe deux nombres réels A et B (à déterminer!) tels que
$$\frac{1}{(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}.$$
Comment calcule-t-on A et B?

On réexprime le membre de droite :

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} =$$

On réexprime le membre de droite :

$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}.=$$

On réexprime le membre de droite :

$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}.=\frac{(A-B)+(A+B)x}{(x-1)(x+1)}$$

On réexprime le membre de droite :

$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}.=\frac{(A-B)+(A+B)x}{(x-1)(x+1)}$$

On sait que cette expression est égale à

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)}$$

pour tout x.

On réexprime le membre de droite :

$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}.=\frac{(A-B)+(A+B)x}{(x-1)(x+1)}$$

On sait que cette expression est égale à

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)}$$

pour tout x. En particulier on a: $A-B+(A+B)x=1$ pour tout x.

On réexprime le membre de droite :

$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}.=\frac{(A-B)+(A+B)x}{(x-1)(x+1)}$$

On sait que cette expression est égale à

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)}$$

pour tout x. En particulier on a: $A-B+(A+B)x=1$ pour tout x. On en déduit :

$$\left\{\begin{array}{l} A-B=1 \\ \\ \end{array}\right.$$

On réexprime le membre de droite :

$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}.=\frac{(A-B)+(A+B)x}{(x-1)(x+1)}$$

On sait que cette expression est égale à

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)}$$

pour tout x. En particulier on a: $A-B+(A+B)x=1$ pour tout x. On en déduit :

$$\begin{cases} A-B=1 \\ A+B=0. \end{cases}$$

On réexprime le membre de droite :

$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}.=\frac{(A-B)+(A+B)x}{(x-1)(x+1)}$$

On sait que cette expression est égale à

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)}$$

pour tout x. En particulier on a: $A-B+(A+B)x=1$ pour tout x. On en déduit :

$$\begin{cases} A-B=1 \\ A+B=0. \end{cases}$$

Solution : $A=-B=\frac{1}{2}$, et donc

On réexprime le membre de droite :

$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}.=\frac{(A-B)+(A+B)x}{(x-1)(x+1)}$$

On sait que cette expression est égale à

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)}$$

pour tout x. En particulier on a: $A-B+(A+B)x=1$ pour tout x. On en déduit :

$$\begin{cases} A-B=1 \\ A+B=0. \end{cases}$$

Solution : $A=-B=\frac{1}{2}$, et donc

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{2(x+1)}.$$

C'est la décomposition en fractions simples de $\frac{1}{x^2-1}$.

On réexprime le membre de droite :

$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}.=\frac{(A-B)+(A+B)x}{(x-1)(x+1)}$$

On sait que cette expression est égale à

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)}$$

pour tout x. En particulier on a: $A-B+(A+B)x=1$ pour tout x. On en déduit :

$$\begin{cases} A-B=1 \\ A+B=0. \end{cases}$$

Solution : $A=-B=\frac{1}{2}$, et donc

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{2(x+1)}.$$

C'est la décomposition en fractions simples de $\frac{1}{x^2-1}$.

(Pour vérifier que c'est bon: on part du membre de droite, qu'on reduit au même dénominateur, et on vérifie qu'on trouve bien le membre de gauche!)

Application: calcul d'intégrales

Pour calculer

$$\int \frac{1}{x^2 - 1}\,dx$$

on écrit alors:

Application: calcul d'intégrales

Pour calculer

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$$

on écrit alors:

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x$$

Application: calcul d'intégrales

Pour calculer

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$$

on écrit alors:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{1}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Application: calcul d'intégrales

Pour calculer

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$$

on écrit alors:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{1}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1|
\end{aligned}$$

Application: calcul d'intégrales

Pour calculer

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$$

on écrit alors:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{1}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| \\
&= \frac{1}{2}\ln\frac{|x-1|}{|x+1|} + C
\end{aligned}$$

Application: calcul d'intégrales

Pour calculer

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$$

on écrit alors:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{1}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| \\
&= \frac{1}{2}\ln\frac{|x-1|}{|x+1|} + C \\
&= \ln\sqrt{\frac{|x-1|}{|x+1|}} + C
\end{aligned}$$

Comment décomposer $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en général?

On décrit le cas où le degré de P est strictement inférieur au degré de Q.

Comment décomposer $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en général?

On décrit le cas où le degré de P est strictement inférieur au degré de Q. En pratique, pour obtenir cette décomposition en fraction simple d'une fonction rationelle, il faudra

Comment décomposer $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en général?

On décrit le cas où le degré de P est strictement inférieur au degré de Q. En pratique, pour obtenir cette décomposition en fraction simple d'une fonction rationelle, il faudra

1. factoriser le dénominateur $Q(x)$ en ses composantes irréductibles;

Comment décomposer $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en général?

On décrit le cas où le degré de P est strictement inférieur au degré de Q. En pratique, pour obtenir cette décomposition en fraction simple d'une fonction rationelle, il faudra

1. factoriser le dénominateur $Q(x)$ en ses composantes irréductibles; c'est-à-dire l'écrire comme produit de polynômes d'ordre 1 ou 2 (sans racines reelles)

Comment décomposer $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en général?

On décrit le cas où le degré de P est strictement inférieur au degré de Q. En pratique, pour obtenir cette décomposition en fraction simple d'une fonction rationelle, il faudra

1. factoriser le dénominateur $Q(x)$ en ses composantes irréductibles; c'est-à-dire l'écrire comme produit de polynômes d'ordre 1 ou 2 (sans racines reelles)
2. écrire toutes les fractions simples possibles pouvant intervenir dans la décomposition (avec des constantes indéterminées), et déterminer les constantes par le calcul.