Contenu de la section

Contenu de la section

Retour sur le problème de la dernière fois: position à partir de la vitesse

On considère un mobile qui se déplace verticalement et dont la hauteur au temps t est notée $x(t)$. On cherche $x(t)$, connaissant juste sa vitesse à l'instant t qui est donnée par

$$v(t) = \sin(t) + t.$$

La vitesse est par définition la dérivée de la position: $x'(t) = v(t)$. C'est-à-dire:

$$x(t) = \int v(t)\,\mathrm{d}t = \int (\sin(t) + t)\,\mathrm{d}t = -\cos(t) + \frac{t^2}{2} + C$$

On suppose qu'à l'instant $t = 0$ le mobile est à une hauteur nulle: $x(0) = 0$. Ceci va nous permettre de déterminer la valeur de la constante C, donc de la primitive qui convient.
En évaluant $x(t)$ en $t = 0$, ceci signifie que $-1 + C = 0$, c'est-à-dire:

$$x(t) = 1 - \cos(t) + \frac{t^2}{2}$$

Contenu de la section

Rappel: méthode de changement de variable

On pose $u = f(x)$ dans l'intégrale, et on écrit $\mathrm{d}u = f'(x)\,\mathrm{d}x$.

Remarque

- Ne jamais mélanger ancienne et nouvelle variable au sein de l'intégrale ! C'est soit toujours x, soit toujours u
- Si l'ancienne variable s'appelle x et la nouvelle s'appelle u , $\mathrm{d}x$ apparaissait au début: il *doit* donc être remplacé par *une* occurrence de $\mathrm{d}u$. (En général on se débrouille pour faire apparaître $f'(x)\,\mathrm{d}x$ au début et le remplacer directement par $\mathrm{d}u$)
- Il ne peut pas y avoir de $\mathrm{d}u$ au carré, de $\frac{1}{\mathrm{d}u}$ ni de « $\mathrm{d}u$ ajouté à autre chose ».

Exemple

Calculez

$$\int \sin^4 x \cos x \, \mathrm{d}x$$

en posant $u = \sin x$. Alors $\mathrm{d}u = \cos x \, \mathrm{d}x$ et on obtient donc:

$$\int \sin^4 x \cos x \, \mathrm{d}x = \int u^4 \, \mathrm{d}u = \frac{u^5}{5} + C = \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

On a ici pensé à poser $u = f(x) = \sin x$ car l'intégrale contient déjà $\cos x$, qui n'est autre que $f'(x)$.

Pour vérifier que c'est bon, comme toujours: on dérive le résultat obtenu et on vérifie que ça donne bien $\sin^4 x \cos x$.

Sur le choix de la méthode pour calculer une primitive

Remarque

- Il n'y a pas de « bonne manière » de résoudre un calcul de primitive: l'important est d'obtenir une expression dont la dérivée correspond à l'expression dont on part.
- Pensez à toujours bien vérifier le calcul en dérivant le résultat obtenu pour vérifier qu'on récupère bien ce qu'il faut!

Une mise en garde

Deux primitives d'une même fonction peuvent parfois « paraître » très différentes. Regardons par exemple les fonctions

$$\arccos = \cos^{-1} : [-1,1] \to [0,\pi], \quad x \mapsto \arccos(x)$$

et

$$\arcsin = \sin^{-1} : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}], \quad x \mapsto \arcsin(x)$$

On n'a pas encore calculé leurs dérivées:

Résultat

Pour tout $x \in]-1,1[$ *on a:*

$$\arcsin'(x) = -\arccos'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ainsi, $-\arccos(x)$ et $\arcsin(x)$ sont deux primitives de la fonction $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
Ça veut dire qu'elles diffèrent d'une constante, mais ce n'est pas facile à voir!

Rappel: graphe de arcsinus

Graphe (en rouge) de la fonction

$$\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

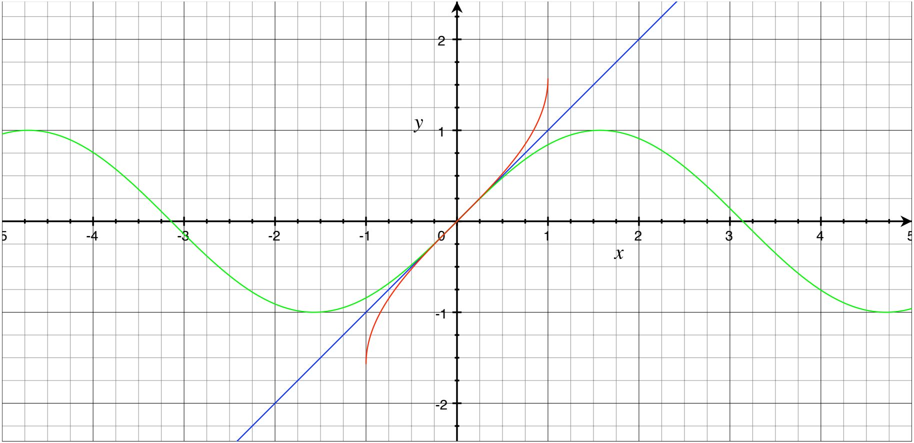

Fig.: Graphes de sin et arcsin

Rappel II: graphe de arccosinus

Graphe (en rouge) de la fonction

$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$$

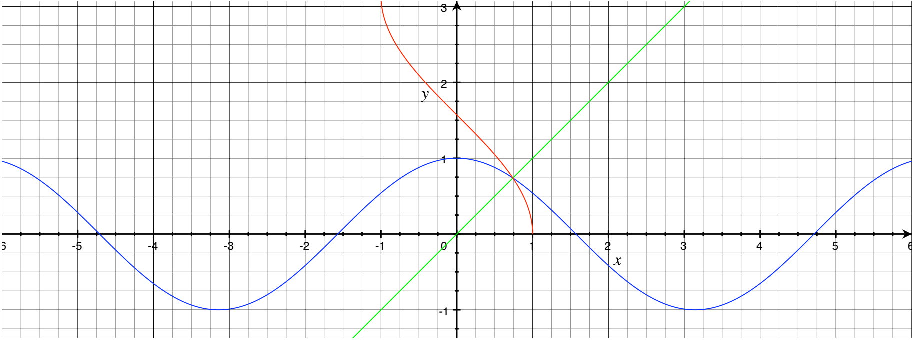

Fig.: Graphes de cos et arccos

Preuve de la proposition précédente

Démonstration.

On calcule la dérivée de $\arcsin = \sin^{-1}$ en x avec la formule pour la dérivée d'une réciproque: on a, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin)'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}.$$

En utilisant la relation: pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\sin(y)^2 + \cos(y)^2 = 1$$

et en l'appliquant en $y = \arcsin x$, on trouve:

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}.$$

En fin de comptes on trouve donc:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

□

Le même raisonnement donne le réultat pour arccos.

Contenu de la section

Une autre méthode d'intégration: l'Intégration par parties (IPP)

On part de la règle de dérivation du produit:

$$\begin{aligned} & (f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ \text{donc} \qquad & f'(x)g(x) = (f(x)g(x))' - f(x)g'(x) \end{aligned}$$

En prenant des primitives, on trouve :

Formule d'intégration par parties (IPP)

$$\boxed{\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x}$$

En pratique: quand on aura une primitive à calculer, on essayera d'identifier f' et g et on applique directement cette formule!

Exemple

On veut calculer $\int x \cos x \, \mathrm{d}x$. On pose alors:

$$g(x) = x\,, \quad f'(x) = \cos x$$

et donc

$$g'(x) = 1\,, \quad f(x) = \sin x$$

de sorte que la formule d'IPP donne:

$$\begin{aligned}\int x \cos x \, \mathrm{d}x &= (\sin x)x - \int (\sin x) 1 \, \mathrm{d}x \\ &= x \sin x - (-\cos x) + C \\ &= x \sin x + \cos x + C\end{aligned}$$

Pourquoi ce choix de f et g? On aurait très bien pu au contraire poser $f'(x) = x$ et $g(x) = \cos x$. On aurait alors obtenu

$$\int x \cos x \, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \cos x + \int \frac{x^2}{2} \sin x \, \mathrm{d}x$$

qui est une primitive qui semble plus difficile à calculer que celle de départ!

La morale de l'histoire

Remarque

Cet exemple montre que

- le choix de $f'(x)$ et $g(x)$ est crucial dans une intégration par parties, et
- si un premier essai s'est soldé par un échec, on a tout intérêt à faire un second essai en inversant les rôles de $f'(x)$ et $g(x)$.

Un autre exemple

Question

Calculer

$$\int \ln x \, \mathrm{d}x$$

Démonstration.

Utilisez l'astuce suivante:

$$\int \ln x \, \mathrm{d}x = \int 1 \ln x \, \mathrm{d}x$$

Ceci donne l'idée de prendre

$$g(x) = \ln x, \qquad f'(x) = 1$$

$$g'(x) = \frac{1}{x}, \qquad f(x) = x$$

Alors une IPP donne

$$\int \ln x \, \mathrm{d}x = x \ln x - \int x \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = x \ln x - \int \mathrm{d}x = x \ln x - x + C$$

pour $x \in \,]0,\infty[$.

$\square$

Contenu de la section

Fonctions rationnelles

Définition

Une *fonction rationnelle* est une fonction du type $\frac{P(x)}{Q(x)}$ où P et Q sont des polynômes.

Un résultat surprenant est que les primitives d'une telle fonction,

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$$

sont *toujours* des fonctions « élémentaires » (c'est-à-dire qu'on peut en écrire une formule explicite en fonction des fonctions classiques: fonctions puissance, $\exp(x), \cos, \sin, \cosh, \sinh \dots$).

Ceci se démontre grâce à une technique appelée la *décomposition en fractions simples* qu'on va expliquer maintenant.

Polynômes irréductibles

On considère une fonction polynôme quelconque de degré $n \geq 1$:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Résultat

Toute fonction polynôme peut toujours s'écrire de manière unique comme le produit d'une constante non nulle et d'un certain nombre

- *de polynômes d'ordre* 1 *de la forme* $x - a$
- *de polynômes d'ordre* 2 *de la forme* $x^2 + px + q$ *qui n'ont pas de racines réelles: c'est-à-dire vérifiant* $p^2 - 4q < 0$.

On appelle ces polynômes des polynômes irréductibles.

Des exemples

Exemple

- Le polynôme $x^3 - 1$ s'écrit comme:
$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1).$$

- Le polynôme $x^2 - 2x + 1$ sécrit comme:
$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2.$$

- Le polynôme $X^4 + 1$ s'écrit comme
$$X^4 + 1 = \left(X^2 - \sqrt{2}x + 1\right)\left(X^2 + \sqrt{2}x + 1\right).$$

Pour vérifier ces calculs, on développe terme à terme le membre de droite. Une fois qu'on a écrit le polynôme comme un produit de polynômes d'ordre (au plus) 2, on dit qu'on a écrit une décomposition de P en produit de polynômes irréductibles.

Remarque

Une règle pratique à retenir: si $a \in \mathbb{R}$ est un zéro du polynôme P (c'est-à -dire si $P(a) = 0$), alors $(x - a)$ est un des facteurs irréductibles de P. On ecrira encore:

$$P(x) = (x - a) \cdot Q(x)$$

pour un autre polynôme Q, de degré « un de moins ».

Exemple

Le polynôme $P(x) = x^3 - 1$ vérifie bien $P(1) = 0$. On peut donc l'écrire comme

$$P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$$

pour des constantes a,b,c réelles. On développe ensuite cette expression:

$$\begin{aligned} x^3 - 1 &= (x-1)(ax^2 + bx + c) \\ &= ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c \\ &= ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients on trouve:

$$a = 1, \quad c = 1, \quad b - a = 0 \text{ donc } b = 1.$$

Ce qui donne bien:

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1).$$

Fractions simples

Définition

Une *fraction simple* est de la forme :

$$\frac{a}{(x-c)^k} \quad \text{ou} \quad \frac{ax+b}{\left((x-c)^2+d^2\right)^k}$$

pour certaines constantes réelles a,b,c,d, $d \neq 0$ et un certain entier $k > 0$.

Résultat

Toute fonction rationnelle (quotient de polynômes) de la forme $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *peut s'écrire comme la somme*

1. *d'un « vrai » polynôme (éventuellement constant voire nul), et*
2. *d'un certain nombre de fractions simples. Ces fractions sont telles que leur dénominateur apparaît dans la décomposition en irréductibles de $Q(x)$.*

Exemple de décomposition en fractions simples

On veut calculer
$$\int \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$$
Pour cela, on commence par décomposer $\frac{1}{x^2-1}$ en fractions simples.
On sait que la décomposition de x^2-1 en produit d'irréductibles est:
$$x^2-1=(x-1)(x+1).$$
Alors la proposition précédente dit qu'il existe deux nombres réels A et B (à déterminer!) tels que
$$\frac{1}{(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}.$$
Comment calcule-t-on A et B?

On réexprime le membre de droite :

$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}.=\frac{(A-B)+(A+B)x}{(x-1)(x+1)}$$

On sait que cette expression est égale à

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)}$$

pour tout x. En particulier on a: $A-B+(A+B)x=1$ pour tout x. On en déduit :

$$\begin{cases} A-B=1 \\ A+B=0. \end{cases}$$

Solution : $A=-B=\frac{1}{2}$, et donc

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{2(x+1)}.$$

C'est la décomposition en fractions simples de $\frac{1}{x^2-1}$.

(Pour vérifier que c'est bon: on part du membre de droite, qu'on reduit au même dénominateur, et on vérifie qu'on trouve bien le membre de gauche!)

Application: calcul d'intégrales

Pour calculer

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$$

on écrit alors:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{1}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| \\
&= \frac{1}{2}\ln\frac{|x-1|}{|x+1|} + C \\
&= \ln\sqrt{\frac{|x-1|}{|x+1|}} + C
\end{aligned}$$

Comment décomposer $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en général?

On décrit le cas où le degré de P est strictement inférieur au degré de Q. En pratique, pour obtenir cette décomposition en fraction simple d'une fonction rationelle, il faudra

1. factoriser le dénominateur $Q(x)$ en ses composantes irréductibles; c'est-à-dire l'écrire comme produit de polynômes d'ordre 1 ou 2 (sans racines reelles)
2. écrire toutes les fractions simples possibles pouvant intervenir dans la décomposition (avec des constantes indéterminées), et déterminer les constantes par le calcul.