Intégrales définies

Contenu de la section

Rappel

Rappel

La primitive (ou « intégrale indéfinie ») d'une fonction est elle-même une fonction, définie sur le même intervalle que f, et connue à une constante additive près.

Rappel

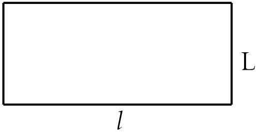
Rappel

La primitive (ou « intégrale indéfinie ») d'une fonction est elle-même une fonction, définie sur le même intervalle que f, et connue à une constante additive près.

Aujourd'hui nous allons définir l'intégrale définie d'une fonction entre deux bornes. Ce sera un nombre qui représente l'aire d'une région délimitée par le graphe d'une fonction.

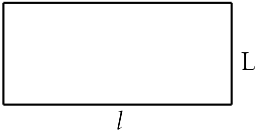
Contenu de la section

Aires de figures connues, formées de segments de droites



$$\text{aire} = \mathrm{L} \times l$$

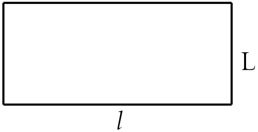
Aires de figures connues, formées de segments de droites



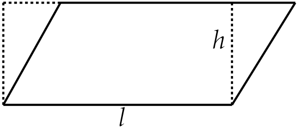
$$\text{aire} = \mathrm{L} \times l$$

$$\text{aire} = l \times h$$

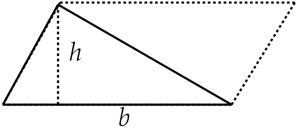
Aires de figures connues, formées de segments de droites



$$\text{aire} = \mathrm{L} \times l$$



$$\text{aire} = l \times h$$



$$\text{aire} = \frac{b \times h}{2}$$

Aires de figures courbes

Comment montrer que l'aire d'un disque est πr^2, où r est le rayon ?

Aires de figures courbes

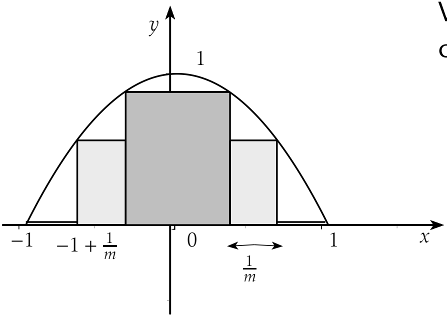
Comment montrer que l'aire d'un disque est πr^2, où r est le rayon ?

Comment calculer l'aire sous l'arc de parabole d'équation $y = 1 - x^2$?

Aires de figures courbes

Comment montrer que l'aire d'un disque est πr^2, où r est le rayon ?

Comment calculer l'aire sous l'arc de parabole d'équation $y = 1 - x^2$?

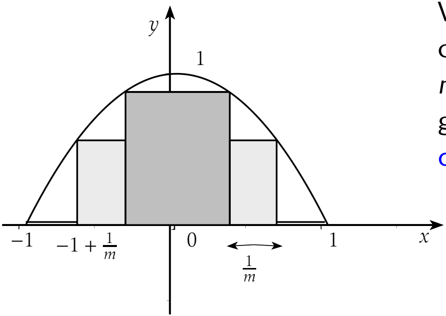


Voici comment nous allons définir cette aire.

Aires de figures courbes

Comment montrer que l'aire d'un disque est πr^2, où r est le rayon ?

Comment calculer l'aire sous l'arc de parabole d'équation $y = 1 - x^2$?

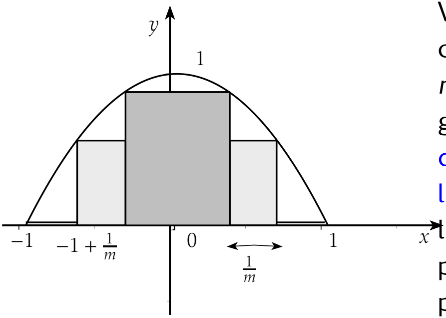


Voici comment nous allons définir cette aire. Pour chaque valeur de $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, nous subdivisons la région sous la courbe en rectangles de largeur $\frac{1}{m}$.

Aires de figures courbes

Comment montrer que l'aire d'un disque est πr^2, où r est le rayon ?

Comment calculer l'aire sous l'arc de parabole d'équation $y = 1 - x^2$?

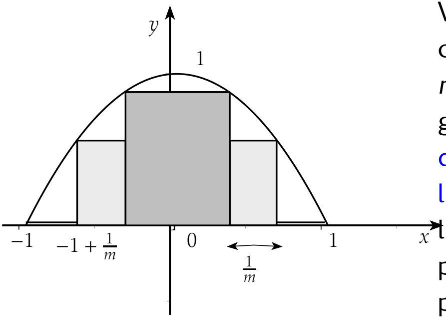


Voici comment nous allons définir cette aire. Pour chaque valeur de $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, nous subdivisons la région sous la courbe en rectangles de largeur $\frac{1}{m}$. En prenant la limite lorsque $m \to \infty$ (c'est-à-dire lorsque la subdivision devient très fine) nous pouvons espérer obtenir une valeur pour l'aire.

Aires de figures courbes

Comment montrer que l'aire d'un disque est πr^2, où r est le rayon ?

Comment calculer l'aire sous l'arc de parabole d'équation $y = 1 - x^2$?



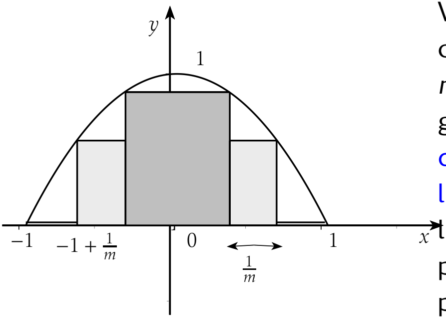
Voici comment nous allons définir cette aire. Pour chaque valeur de $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, nous subdivisons la région sous la courbe en rectangles de largeur $\frac{1}{m}$. En prenant la limite lorsque $m \to \infty$ (c'est-à-dire lorsque la subdivision devient très fine) nous pouvons espérer obtenir une valeur pour l'aire.

Cette valeur sera notée $\int_{-1}^{1} (1 - x^2)\,\mathrm{d}x$:

Aires de figures courbes

Comment montrer que l'aire d'un disque est πr^2, où r est le rayon ?

Comment calculer l'aire sous l'arc de parabole d'équation $y = 1 - x^2$?



Voici comment nous allons définir cette aire. Pour chaque valeur de $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, nous subdivisons la région sous la courbe en rectangles de largeur $\frac{1}{m}$. En prenant la limite lorsque $m \to \infty$ (c'est-à-dire lorsque la subdivision devient très fine) nous pouvons espérer obtenir une valeur pour l'aire.

Cette valeur sera notée $\int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, dx$: elle désigne l'aire comprise entre la courbe $y = 1 - x^2$ et l'axe des abscisses.

Contenu de la section

« Définition »

Soit a,b deux nombres réels avec $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$.

« Définition »

Soit a,b deux nombres réels avec $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$. Nous allons noter

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

« Définition »

Soit a,b deux nombres réels avec $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$. Nous allons noter

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

l'aire algébrique de la surface comprise entre

« Définition »

Soit a,b deux nombres réels avec $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$. Nous allons noter

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

l'aire algébrique de la surface comprise entre l'axe des abcisses,

« Définition »

Soit a,b deux nombres réels avec $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$. Nous allons noter

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

l'aire algébrique de la surface comprise entre l'axe des abcisses, le graphe de f, et

« Définition »

Soit a,b deux nombres réels avec $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$. Nous allons noter

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

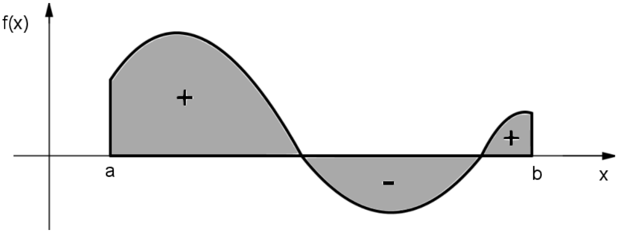
l'aire algébrique de la surface comprise entre l'axe des abcisses, le graphe de f, et les deux droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$.

« Définition »

Soit a,b deux nombres réels avec $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$. Nous allons noter

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

l'aire algébrique de la surface comprise entre l'axe des abcisses, le graphe de f, et les deux droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$.

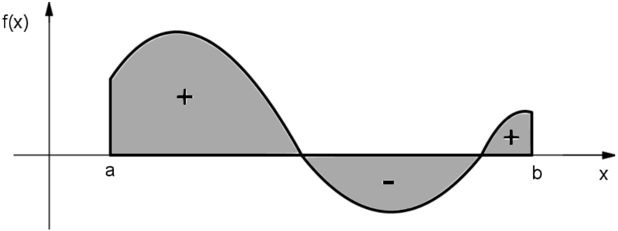


« Définition »

Soit a,b deux nombres réels avec $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$. Nous allons noter

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

l'aire algébrique de la surface comprise entre l'axe des abcisses, le graphe de f, et les deux droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$.



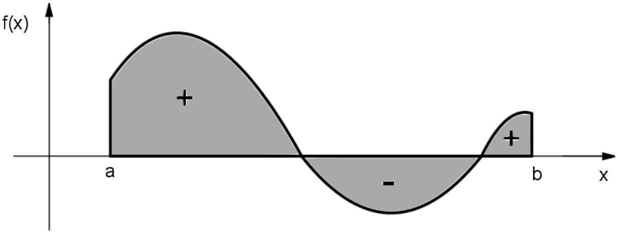
Les portions au-dessus du graphe seront comptées positivement, celles en-dessous négativement.

« Définition »

Soit a,b deux nombres réels avec $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$. Nous allons noter

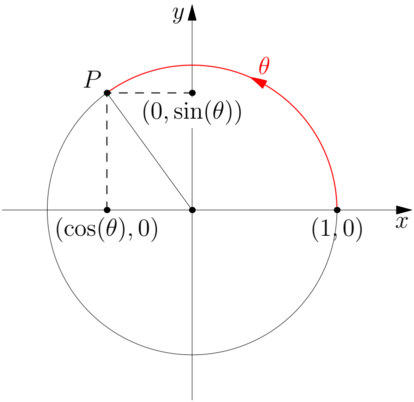
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

l'aire algébrique de la surface comprise entre l'axe des abcisses, le graphe de f, et les deux droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$.



Les portions au-dessus du graphe seront comptées positivement, celles en-dessous négativement. Cette aire est définie en subdivisant la région grise en rectangles de plus en plus étroits et en prenant la limite.

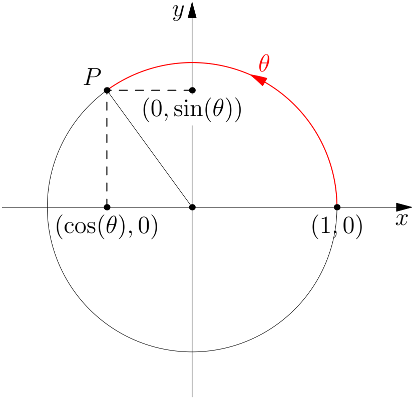
Un exemple: l'aire du disque



Le cercle de centre 0 et de rayon 1 a pour équation:

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Un exemple: l'aire du disque

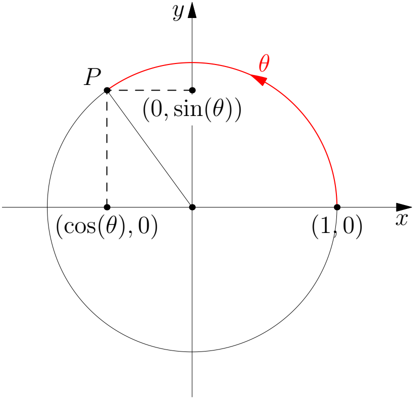


Le cercle de centre 0 et de rayon 1 a pour équation:

$$x^2 + y^2 = 1.$$

En particulier l'aire du demi-disque supérieur (contenu dans les $y \geq 0$)

Un exemple: l'aire du disque



Le cercle de centre 0 et de rayon 1 a pour équation:

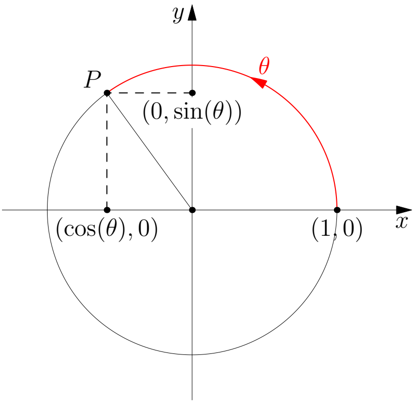
$$x^2 + y^2 = 1.$$

En particulier l'aire du demi-disque supérieur (contenu dans les $y \geq 0$) est l'aire comprise entre l'axe des abscisses et la courbe d'équation

$$y = \sqrt{1 - x^2}, \quad \text{avec } x \in [-1,1],$$

et vaut donc $\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx$.

Un exemple: l'aire du disque



Le cercle de centre 0 et de rayon 1 a pour équation:

$$x^2 + y^2 = 1.$$

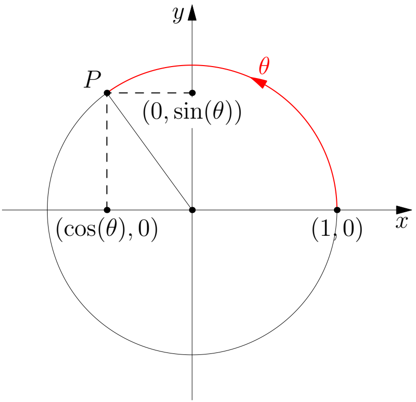
En particulier l'aire du demi-disque supérieur (contenu dans les $y \geq 0$) est l'aire comprise entre l'axe des abscisses et la courbe d'équation

$$y = \sqrt{1 - x^2}, \quad \text{avec } x \in [-1,1],$$

et vaut donc $\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx$.

Or, l'aire du disque unité vaut π, donc l'aire du demi-disque vaut $\frac{\pi}{2}$.

Un exemple: l'aire du disque



Le cercle de centre 0 et de rayon 1 a pour équation:

$$x^2 + y^2 = 1.$$

En particulier l'aire du demi-disque supérieur (contenu dans les $y \geq 0$) est l'aire comprise entre l'axe des abscisses et la courbe d'équation

$$y = \sqrt{1 - x^2}, \quad \text{avec } x \in [-1,1],$$

et vaut donc $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$.

Or, l'aire du disque unité vaut π, donc l'aire du demi-disque vaut $\frac{\pi}{2}$.
Ceci nous donne donc l'égalité:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Échange des bornes

Définition

Lorsque $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ existe, on définit $\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$ comme:

Échange des bornes

Définition

Lorsque $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ existe, on définit $\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$ comme:

$$\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t := -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Échange des bornes

Définition

Lorsque $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ existe, on définit $\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$ comme:

$$\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t := -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque

En d'autres termes : renverser les bornes change le signe de l'intégrale définie.

Contenu de la section

Comment calculer une intégrale?

L'intégrale d'une fonction continue sur un segment est l'aire algébrique sous la courbe. Comment calculer cette aire?

Comment calculer une intégrale?

L'intégrale d'une fonction continue sur un segment est l'aire algébrique sous la courbe. Comment calculer cette aire?

Théorème (Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral)

Comment calculer une intégrale?

L'intégrale d'une fonction continue sur un segment est l'aire algébrique sous la courbe. Comment calculer cette aire?

Théorème (Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit a un point de I. Alors la fonction

Comment calculer une intégrale?

L'intégrale d'une fonction continue sur un segment est l'aire algébrique sous la courbe. Comment calculer cette aire?

Théorème (Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit a un point de I. Alors la fonction

$$F : I \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Comment calculer une intégrale?

L'intégrale d'une fonction continue sur un segment est l'aire algébrique sous la courbe. Comment calculer cette aire?

Théorème (Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit a un point de I. Alors la fonction

$$F : I \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est l'unique primitive de f qui s'annule en $x = a$.

Comment calculer une intégrale?

L'intégrale d'une fonction continue sur un segment est l'aire algébrique sous la courbe. Comment calculer cette aire?

Théorème (Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit a un point de I. Alors la fonction

$$F : I \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est l'unique primitive de f qui s'annule en $x = a$.

Remarque

Ceci nous donne une manière de calculer $\int_a^x f(t)dt$:

Comment calculer une intégrale?

L'intégrale d'une fonction continue sur un segment est l'aire algébrique sous la courbe. Comment calculer cette aire?

Théorème (Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit a un point de I. Alors la fonction

$$F : I \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est l'unique primitive de f qui s'annule en $x = a$.

Remarque

Ceci nous donne une manière de calculer $\int_a^x f(t)dt$: il suffit pour cela de calculer une primitive qui s'annule en a (ce qu'on sait faire dans beaucoup de cas, même si pas dans tous),

Comment calculer une intégrale?

L'intégrale d'une fonction continue sur un segment est l'aire algébrique sous la courbe. Comment calculer cette aire?

Théorème (Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit a un point de I. Alors la fonction

$$F : I \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est l'unique primitive de f qui s'annule en $x = a$.

Remarque

Ceci nous donne une manière de calculer $\int_a^x f(t)dt$: il suffit pour cela de calculer une primitive qui s'annule en a (ce qu'on sait faire dans beaucoup de cas, même si pas dans tous), et d'évaluer sa valeur en x.

Concrètement:

Concrètement:

Corollaire

Soit G une primitive quelconque de f.

Concrètement:

Corollaire

Soit G une primitive quelconque de f. Alors $G(x) - G(a)$ est une primitive de f et s'annule en a, et donc :

Concrètement:

Corollaire

Soit G une primitive quelconque de f. Alors $G(x) - G(a)$ est une primitive de f et s'annule en a, et donc :

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = G(x) - G(a)$$

Concrètement:

Corollaire

Soit G une primitive quelconque de f. Alors $G(x) - G(a)$ est une primitive de f et s'annule en a, et donc :

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = G(x) - G(a) = \Big[G(t)\Big]_{t=a}^{t=x}.$$

Concrètement:

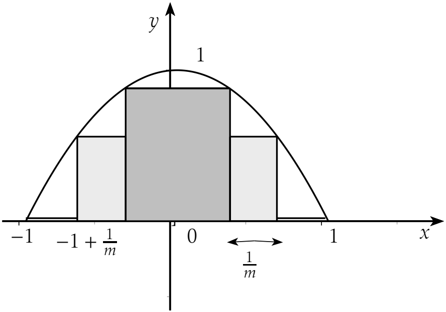
Corollaire

Soit G une primitive quelconque de f. Alors $G(x) - G(a)$ est une primitive de f et s'annule en a, et donc :

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = G(x) - G(a) = \Big[G(t)\Big]_{t=a}^{t=x}.$$

On n'a donc même pas besoin de faire attention aux constantes: il suffit de connaître une primitive de f.

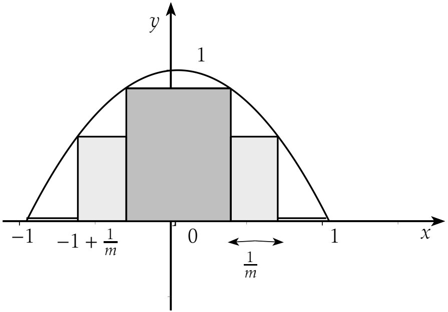
Un exemple



Question

Quelle est l'aire délimitée par l'arc de parabole d'équation $y = 1 - x^2$ et l'axe des abscisses ?

Un exemple



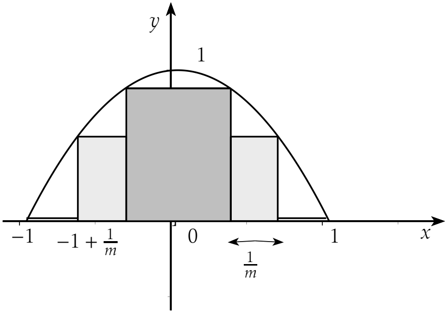
Question

Quelle est l'aire délimitée par l'arc de parabole d'équation $y = 1 - x^2$ et l'axe des abscisses ?

Démonstration.

Cette aire vaut $\int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, dx$.

Un exemple



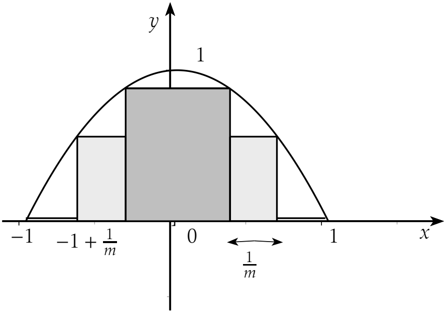
Question

Quelle est l'aire délimitée par l'arc de parabole d'équation $y = 1 - x^2$ et l'axe des abscisses ?

Démonstration.

Cette aire vaut $\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,\mathrm{d}x$. Une primitive de $1-x^2$ sur $\mathbb{R}$ est $F(x) = x - \frac{x^3}{3}$.

Un exemple



Question

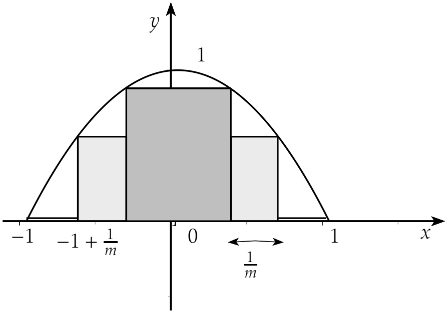
Quelle est l'aire délimitée par l'arc de parabole d'équation $y = 1 - x^2$ et l'axe des abscisses ?

Démonstration.

Cette aire vaut $\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx$. Une primitive de $1-x^2$ sur $\mathbb{R}$ est $F(x) = x - \frac{x^3}{3}$. Par le théorème fondamental, l'aire sous la parabole vaut donc:

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx =$$

Un exemple



Question

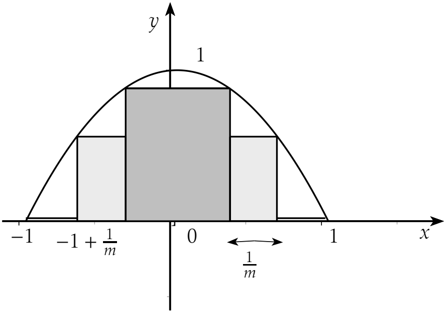
Quelle est l'aire délimitée par l'arc de parabole d'équation $y = 1 - x^2$ et l'axe des abscisses ?

Démonstration.

Cette aire vaut $\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,\mathrm{d}x$. Une primitive de $1-x^2$ sur $\mathbb{R}$ est $F(x) = x - \frac{x^3}{3}$. Par le théorème fondamental, l'aire sous la parabole vaut donc:

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,\mathrm{d}x = F(1) - F(-1) =$$

Un exemple



Question

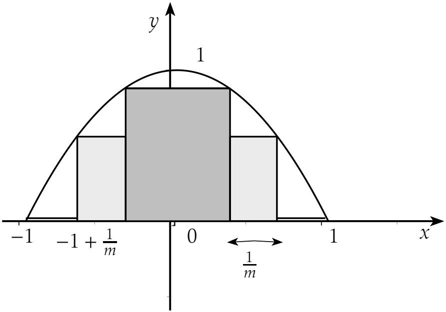
Quelle est l'aire délimitée par l'arc de parabole d'équation $y = 1 - x^2$ et l'axe des abscisses ?

Démonstration.

Cette aire vaut $\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx$. Une primitive de $1 - x^2$ sur $\mathbb{R}$ est $F(x) = x - \frac{x^3}{3}$. Par le théorème fondamental, l'aire sous la parabole vaut donc:

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx = F(1) - F(-1) = 1 - \frac{1}{3} - \left(-1 - \frac{(-1)^3}{3}\right) =$$

Un exemple



Question

Quelle est l'aire délimitée par l'arc de parabole d'équation $y = 1 - x^2$ et l'axe des abscisses ?

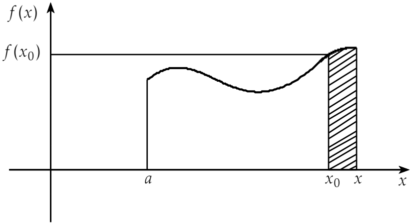
Démonstration.

Cette aire vaut $\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx$. Une primitive de $1-x^2$ sur $\mathbb{R}$ est $F(x) = x - \frac{x^3}{3}$. Par le théorème fondamental, l'aire sous la parabole vaut donc:

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx = F(1) - F(-1) = 1 - \frac{1}{3} - \left(-1 - \frac{(-1)^3}{3}\right) = \frac{4}{3}.$$

□

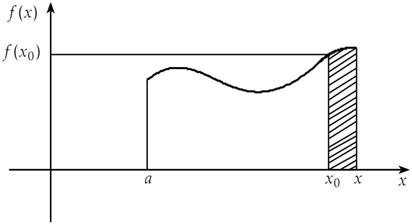
Idée de la preuve du théorème fondamental



Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Définissons :

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Idée de la preuve du théorème fondamental



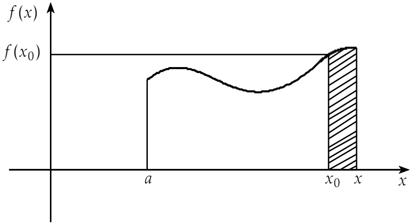
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Définissons :

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

La dérivée de cette fonction F au point x_0 est donnée par :

$$F'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t}{x - x_0}$$

Idée de la preuve du théorème fondamental



Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Définissons :

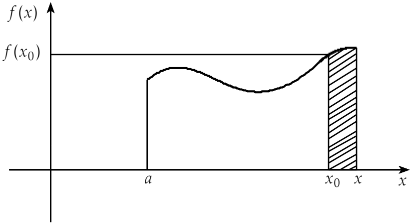
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

La dérivée de cette fonction F au point x_0 est donnée par :

$$F'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t}{x - x_0}$$

Idée de la preuve du théorème fondamental



Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Définissons :

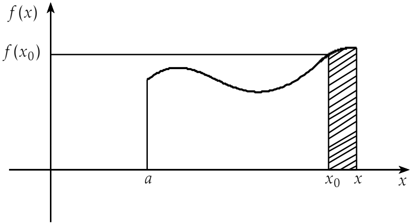
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

La dérivée de cette fonction F au point x_0 est donnée par :

$$F'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t}{x - x_0}$$

Idée de la preuve du théorème fondamental



Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Définissons :

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

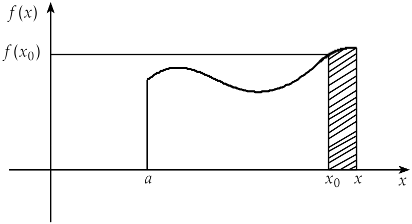
La dérivée de cette fonction F au point x_0 est donnée par :

$$F'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t}{x - x_0}$$

Lorsque x est très proche de x_0, on peut considérer que les valeurs de f sur $[x_0,x]$ sont très proches de $f(x_0)$.

Idée de la preuve du théorème fondamental



Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Définissons :

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

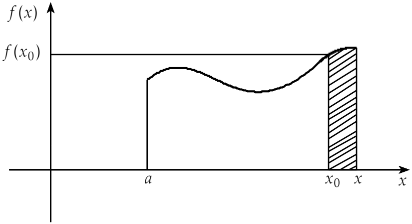
La dérivée de cette fonction F au point x_0 est donnée par :

$$F'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t}{x - x_0}$$

Lorsque x est très proche de x_0, on peut considérer que les valeurs de f sur $[x_0, x]$ sont très proches de $f(x_0)$. Et donc que

$$\int_{x_0}^x f(t) = f(x_0)(x - x_0) + o\big(x - x_0\big),$$

Idée de la preuve du théorème fondamental



Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Définissons :

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

La dérivée de cette fonction F au point x_0 est donnée par :

$$F'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t}{x - x_0}$$

Lorsque x est très proche de x_0, on peut considérer que les valeurs de f sur $[x_0,x]$ sont très proches de $f(x_0)$. Et donc que

$$\int_{x_0}^x f(t) = f(x_0)(x - x_0) + o\big(x - x_0\big),$$

de sorte que:

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Contenu de la section

Le changement de variables partie II

Au vu du théorème fondamental, les formules de recherche de primitive s'adaptent pour calculer des intégrales définies.

Le changement de variables partie II

Au vu du théorème fondamental, les formules de recherche de primitive s'adaptent pour calculer des intégrales définies.

En particulier, le changement de variables marche encore.

Le changement de variables partie II

Au vu du théorème fondamental, les formules de recherche de primitive s'adaptent pour calculer des intégrales définies.

En particulier, le changement de variables marche encore. Si on intègre en x entre a et b, en posant $t = g(x)$, on intègre en t entre $g(a)$ et $g(b)$.

Le changement de variables partie II

Au vu du théorème fondamental, les formules de recherche de primitive s'adaptent pour calculer des intégrales définies.

En particulier, le changement de variables marche encore. Si on intègre en x entre a et b, en posant $t = g(x)$, on intègre en t entre $g(a)$ et $g(b)$. On obtient alors :

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\, \mathrm{d}x$$

Le changement de variables partie II

Au vu du théorème fondamental, les formules de recherche de primitive s'adaptent pour calculer des intégrales définies.

En particulier, le changement de variables marche encore. Si on intègre en x entre a et b, en posant $t = g(x)$, on intègre en t entre $g(a)$ et $g(b)$. On obtient alors :

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemple

On veut calculer

$$I = \int_{-1}^{0} \sqrt{3x+4}\, \mathrm{d}x.$$

Exemple

On veut calculer
$$I = \int_{-1}^{0} \sqrt{3x+4}\,\mathrm{d}x.$$
En posant $t = 3x + 4$, nous avons $\mathrm{d}t = 3\,\mathrm{d}x$.

Exemple

On veut calculer
$$I = \int_{-1}^{0} \sqrt{3x+4}\,\mathrm{d}x.$$
En posant $t = 3x + 4$, nous avons $\mathrm{d}t = 3\,\mathrm{d}x$. Dès lors :
$$I = \frac{1}{3}\int_{1}^{4} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t$$

Exemple

On veut calculer

$$I = \int_{-1}^{0} \sqrt{3x+4}\,\mathrm{d}x.$$

En posant $t = 3x + 4$, nous avons $\mathrm{d}t = 3\,\mathrm{d}x$. Dès lors :

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3}\int_{1}^{4} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_{1}^{4} \end{aligned}$$

Exemple

On veut calculer

$$I = \int_{-1}^{0} \sqrt{3x+4}\,\mathrm{d}x.$$

En posant $t = 3x + 4$, nous avons $\mathrm{d}t = 3\,\mathrm{d}x$. Dès lors :

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3}\int_{1}^{4} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 \\ &= \frac{2}{9}\left[\sqrt{t}^3\right]_1^4 \end{aligned}$$

Exemple

On veut calculer

$$I = \int_{-1}^{0} \sqrt{3x+4}\,\mathrm{d}x.$$

En posant $t = 3x + 4$, nous avons $\mathrm{d}t = 3\,\mathrm{d}x$. Dès lors :

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3}\int_{1}^{4} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 \\ &= \frac{2}{9}\left[\sqrt{t}^3\right]_1^4 = \frac{2}{9}[8-1] = \frac{14}{9} \end{aligned}$$

Exemple

On veut calculer

$$I = \int_{-1}^{0} \sqrt{3x+4}\,\mathrm{d}x.$$

En posant $t = 3x + 4$, nous avons $\mathrm{d}t = 3\,\mathrm{d}x$. Dès lors :

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3}\int_{1}^{4} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 \\ &= \frac{2}{9}\left[\sqrt{t}^3\right]_1^4 = \frac{2}{9}[8-1] = \frac{14}{9} \end{aligned}$$

Exemple

On veut calculer

$$I = \int_{-1}^{0} \sqrt{3x+4}\,\mathrm{d}x.$$

En posant $t = 3x + 4$, nous avons $\mathrm{d}t = 3\,\mathrm{d}x$. Dès lors :

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3}\int_{1}^{4} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 \\ &= \frac{2}{9}\left[\sqrt{t}^3\right]_1^4 = \frac{2}{9}\,[8-1] = \frac{14}{9} \end{aligned}$$

Vous pouvez vérifier qu'on obtiendrait le même résultat si on calculait une primitive de $\sqrt{3x+4}$ et qu'on calculait la différence de ses valeurs en 0 et -1.

L'aire du disque, de nouveau

Question

Montrez par le calcul que

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

L'aire du disque, de nouveau

Question

Montrez par le calcul que

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Démonstration.

Pour ça, utilisez le changement de variable: $x = \sin t$, avec $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

L'aire du disque, de nouveau

Question

Montrez par le calcul que

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Démonstration.

Pour ça, utilisez le changement de variable: $x = \sin t$, avec $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Ceci donne: $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$ et comme $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on a

$$\sqrt{1-x^2} =$$

L'aire du disque, de nouveau

Question

Montrez par le calcul que

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Démonstration.

Pour ça, utilisez le changement de variable: $x = \sin t$, avec $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Ceci donne: $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$ et comme $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on a

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-(\sin t)^2} =$$

L'aire du disque, de nouveau

Question

Montrez par le calcul que

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Démonstration.

Pour ça, utilisez le changement de variable: $x = \sin t$, avec $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Ceci donne: $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$ et comme $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on a

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-(\sin t)^2} = \sqrt{(\cos t)^2} =$$

L'aire du disque, de nouveau

Question

Montrez par le calcul que

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Démonstration.

Pour ça, utilisez le changement de variable: $x = \sin t$, avec $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Ceci donne: $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$ et comme $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on a

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-(\sin t)^2} = \sqrt{(\cos t)^2} = \cos t.$$

L'aire du disque, de nouveau

Question

Montrez par le calcul que
$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Démonstration.

Pour ça, utilisez le changement de variable: $x = \sin t$, avec $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Ceci donne: $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$ et comme $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on a
$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-(\sin t)^2} = \sqrt{(\cos t)^2} = \cos t.$$
La formule de changement de variable donne alors:
$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x =$$

L'aire du disque, de nouveau

Question

Montrez par le calcul que

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Démonstration.

Pour ça, utilisez le changement de variable: $x = \sin t$, avec $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Ceci donne: $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$ et comme $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on a

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-(\sin t)^2} = \sqrt{(\cos t)^2} = \cos t.$$

La formule de changement de variable donne alors:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cos t\,\mathrm{d}t =$$

L'aire du disque, de nouveau

Question

Montrez par le calcul que
$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Démonstration.

Pour ça, utilisez le changement de variable: $x = \sin t$, avec $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Ceci donne: $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$ et comme $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on a
$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-(\sin t)^2} = \sqrt{(\cos t)^2} = \cos t.$$
La formule de changement de variable donne alors:
$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cos t\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t.$$

L'aire du disque, de nouveau

Question

Montrez par le calcul que

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Démonstration.

Pour ça, utilisez le changement de variable: $x = \sin t$, avec $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Ceci donne: $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$ et comme $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on a

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-(\sin t)^2} = \sqrt{(\cos t)^2} = \cos t.$$

La formule de changement de variable donne alors:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cos t\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t.$$

Les formules de trigo donnent: $2\cos^2 t = 1 + \cos(2t)$. De de sorte que:

L'aire du disque, de nouveau

Question

Montrez par le calcul que

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Démonstration.

Pour ça, utilisez le changement de variable: $x = \sin t$, avec $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Ceci donne: $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$ et comme $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on a

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-(\sin t)^2} = \sqrt{(\cos t)^2} = \cos t.$$

La formule de changement de variable donne alors:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cos t\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t.$$

Les formules de trigo donnent: $2\cos^2 t = 1 + \cos(2t)$. De de sorte que:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x =$$

L'aire du disque, de nouveau

Question

Montrez par le calcul que
$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Démonstration.

Pour ça, utilisez le changement de variable: $x = \sin t$, avec $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Ceci donne: $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$ et comme $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on a
$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-(\sin t)^2} = \sqrt{(\cos t)^2} = \cos t.$$
La formule de changement de variable donne alors:
$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cos t\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t.$$
Les formules de trigo donnent: $2\cos^2 t = 1 + \cos(2t)$. De de sorte que:
$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big(1+\cos(2t)\Big)\,\mathrm{d}t =$$

L'aire du disque, de nouveau

Question

Montrez par le calcul que
$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Démonstration.

Pour ça, utilisez le changement de variable: $x = \sin t$, avec $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Ceci donne: $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$ et comme $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on a
$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-(\sin t)^2} = \sqrt{(\cos t)^2} = \cos t.$$
La formule de changement de variable donne alors:
$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cos t\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t.$$
Les formules de trigo donnent: $2\cos^2 t = 1 + \cos(2t)$. De de sorte que:
$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \big(1+\cos(2t)\big)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\pi.$$

Contenu de la section

Additivité du domaine d'intégration

Résultat

Soit f une fonction continue. Pour $c \in \mathbb{R}$, si deux des trois intégrales suivantes existent, la troisième existe aussi et

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Additivité du domaine d'intégration

Résultat

Soit f une fonction continue. Pour $c \in \mathbb{R}$, si deux des trois intégrales suivantes existent, la troisième existe aussi et

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

C'est l'additivité par rapport au domaine d'intégration.

Linearité de l'intégrale

Résultat

Si f et g sont deux fonctions intégrables sur l'intervalle $[a,b]$ et si $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, alors

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,\mathrm{d}x =$$

Linearité de l'intégrale

Résultat

Si f et g sont deux fonctions intégrables sur l'intervalle $[a,b]$ et si $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, alors

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Linearité de l'intégrale

Résultat

Si f et g sont deux fonctions intégrables sur l'intervalle $[a,b]$ *et si* $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$*, alors*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

C'est la même propriété que pour les primitives!

Signe et intégrale

Résultat

Soit f une fonction réelle continue sur $[a,b]$ vérifiant avec $f(x) \geq 0$ pour tout x de $[a,b]$. Alors

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

Signe et intégrale

Résultat

Soit f une fonction réelle continue sur $[a,b]$ vérifiant avec $f(x) \geq 0$ pour tout x de $[a,b]$. Alors

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

Si $f \geq 0$ nous avons même l'équivalence :

Signe et intégrale

Résultat

Soit f une fonction réelle continue sur $[a,b]$ vérifiant avec $f(x) \geq 0$ pour tout x de $[a,b]$. Alors

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

Si $f \geq 0$ nous avons même l'équivalence :

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in [a,b] : f(x) = 0.$$

Signe et intégrale

Résultat

Soit f une fonction réelle continue sur $[a,b]$ vérifiant avec $f(x) \geq 0$ pour tout x de $[a,b]$. Alors

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

Si $f \geq 0$ nous avons même l'équivalence :

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in [a,b] : f(x) = 0.$$

C'est normal, car si $f \geq 0$, l'aire algébrique sous sa courbe est positive.

Signe et intégrale

Résultat

Soit f une fonction réelle continue sur $[a,b]$ vérifiant avec $f(x) \geq 0$ pour tout x de $[a,b]$. Alors

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

Si $f \geq 0$ nous avons même l'équivalence :

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in [a,b] : f(x) = 0.$$

C'est normal, car si $f \geq 0$, l'aire algébrique sous sa courbe est positive.

Corollaire

En particulier, si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a,b]$, alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Contenu de la section

Dans la définition de l'intégrale définie

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

nous avons supposé

Dans la définition de l'intégrale définie

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

nous avons supposé

- $a, b \in \mathbb{R}$, et

Dans la définition de l'intégrale définie

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

nous avons supposé

- $a,b \in \mathbb{R}$, et
- f est une fonction continue sur $[a,b]$.

Dans la définition de l'intégrale définie

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

nous avons supposé

- $a,b \in \mathbb{R}$, et
- f est une fonction continue sur $[a,b]$.

Les applications requièrent (au moins) deux généralisations de ce concept :

Dans la définition de l'intégrale définie

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

nous avons supposé

- $a,b \in \mathbb{R}$, et
- f est une fonction continue sur $[a,b]$.

Les applications requièrent (au moins) deux généralisations de ce concept :

- lorsque f est définie sur $]a,b[$, et

Dans la définition de l'intégrale définie

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

nous avons supposé

- $a,b \in \mathbb{R}$, et
- f est une fonction continue sur $[a,b]$.

Les applications requièrent (au moins) deux généralisations de ce concept :

- lorsque f est définie sur $]a,b[$, et
- lorsque a ou b est infini.

Cas d'une fonction non bornée

Définition

Pour une fonction f continue sur $[a,b[$, nous posons

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x =$$

Cas d'une fonction non bornée

Définition

Pour une fonction f continue sur $[a,b[$, nous posons

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{u \to b \\ <}} \int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x$$

SI cette limite existe.

Cas d'une fonction non bornée

Définition

Pour une fonction f continue sur $[a,b[$, nous posons

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{u \to b \\ <}} \int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x$$

SI cette limite existe. Lorsque la limite est réelle, on dit que l'intégrale converge.

Cas d'une fonction non bornée

Définition

Pour une fonction f continue sur $[a,b[$, nous posons

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{u \to b \\ <}} \int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x$$

SI cette limite existe. Lorsque la limite est réelle, on dit que l'intégrale converge.

On procède similairement pour une fonction définie et continue sur $]a,b]$.

Exemple

Exemple

Considérons $]0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$

Exemple

Exemple

Considérons $]0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$

$$\lim_{\substack{u \to 0 \\ >}} \int_u^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

Exemple

Exemple

Considérons $]0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$

$$\lim_{\substack{u \to 0 \\ >}} \int_u^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{\substack{u \to 0 \\ >}} \Big(\ln(1) - \ln(u) \Big)$$

Exemple

Exemple

Considérons $]0{,}1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$

$$\lim_{\substack{u \to 0 \\ >}} \int_u^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{\substack{u \to 0 \\ >}} \Big(\ln(1) - \ln(u)\Big)$$

$$= - \lim_{\substack{u \to 0 \\ >}} \ln(u)$$

Exemple

Exemple

Considérons $]0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$

$$\lim_{\substack{u \to 0 \\ >}} \int_u^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{u \to 0 \\ >}} \Big(\ln(1) - \ln(u)\Big) = -\lim_{\substack{u \to 0 \\ >}} \ln(u) = +\infty$$

Exemple

Exemple

Considérons $]0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$

$$\lim_{\substack{u \to 0 \\ >}} \int_u^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{u \to 0 \\ >}} \Big(\ln(1) - \ln(u)\Big) = -\lim_{\substack{u \to 0 \\ >}} \ln(u) = +\infty$$

Exemple

Exemple

Considérons $]0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$

$$\lim_{\substack{u \to 0 \\ >}} \int_u^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{\substack{u \to 0 \\ >}} \Big(\ln(1) - \ln(u)\Big)$$

$$= -\lim_{\substack{u \to 0 \\ >}} \ln(u) = +\infty$$

Donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ ne converge pas, plus précisément elle tend vers $+\infty$.

Exemple

Exemple

Considérons $]0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$

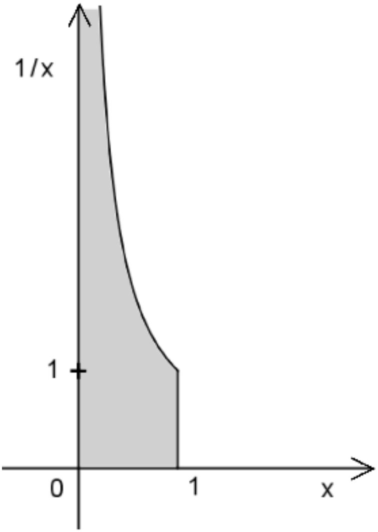
$$\lim_{\substack{u \to 0 \\ >}} \int_u^1 \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \lim_{\substack{u \to 0 \\ >}} \left(\ln(1) - \ln(u)\right)$$

$$= -\lim_{\substack{u \to 0 \\ >}} \ln(u) = +\infty$$

Donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ ne converge pas, plus précisément elle tend vers $+\infty$.

L'aire grise dans la figure de droite est donc infinie.



Exemple

Soit a un nombre réel, avec $a > 0$ et $a \neq 1$.

Exemple

Soit a un nombre réel, avec $a > 0$ et $a \neq 1$. Considérons la fonction

$$f_a :]0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x^a} = x^{-a}$$

Exemple

Soit a un nombre réel, avec $a > 0$ et $a \neq 1$. Considérons la fonction

$$f_a :]0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x^a} = x^{-a}$$

Alors

$$\lim_{\substack{u \to 0 \\ >}} \int_u^1 \frac{1}{x^a} \, \mathrm{d}x$$

Exemple

Soit a un nombre réel, avec $a > 0$ et $a \neq 1$. Considérons la fonction

$$f_a :]0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x^a} = x^{-a}$$

Alors

$$\lim_{\substack{u \to 0 \\ >}} \int_u^1 \frac{1}{x^a}\, \mathrm{d}x = \lim_{\substack{u \to 0 \\ >}} \left[\frac{1}{1-a} x^{1-a} \right]_u^1$$

Exemple

Soit a un nombre réel, avec $a > 0$ et $a \neq 1$. Considérons la fonction

$$f_a :]0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x^a} = x^{-a}$$

Alors

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{u \to 0 \\ >}} \int_u^1 \frac{1}{x^a} \,\mathrm{d}x &= \lim_{\substack{u \to 0 \\ >}} \left[\frac{1}{1-a} x^{1-a}\right]_u^1 \\ &= \frac{1}{1-a} \lim_{\substack{u \to 0 \\ >}} \left(1 - u^{1-a}\right)\end{aligned}$$

Exemple

Soit a un nombre réel, avec $a > 0$ et $a \neq 1$. Considérons la fonction

$$f_a :]0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x^a} = x^{-a}$$

Alors

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{u\to 0\\ >}} \int_u^1 \frac{1}{x^a}\,\mathrm{d}x &= \lim_{\substack{u\to 0\\ >}} \left[\frac{1}{1-a}x^{1-a}\right]_u^1 \\ &= \frac{1}{1-a}\lim_{\substack{u\to 0\\ >}}\left(1-u^{1-a}\right)\end{aligned}$$

Donc :

Exemple

Soit a un nombre réel, avec $a > 0$ et $a \neq 1$. Considérons la fonction

$$f_a :]0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x^a} = x^{-a}$$

Alors

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{u \to 0 \\ >}} \int_u^1 \frac{1}{x^a}\,\mathrm{d}x &= \lim_{\substack{u \to 0 \\ >}} \left[\frac{1}{1-a} x^{1-a}\right]_u^1 \\ &= \frac{1}{1-a} \lim_{\substack{u \to 0 \\ >}} \left(1 - u^{1-a}\right)\end{aligned}$$

Donc :

- Si $a < 1$, alors l'intégrale converge et vaut $\frac{1}{1-a}$, tandis que

Exemple

Soit a un nombre réel, avec $a > 0$ et $a \neq 1$. Considérons la fonction

$$f_a :]0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x^a} = x^{-a}$$

Alors

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{u \to 0 \\ >}} \int_u^1 \frac{1}{x^a}\,\mathrm{d}x &= \lim_{\substack{u \to 0 \\ >}} \left[\frac{1}{1-a} x^{1-a}\right]_u^1 \\ &= \frac{1}{1-a} \lim_{\substack{u \to 0 \\ >}} \left(1 - u^{1-a}\right)\end{aligned}$$

Donc :

- Si $a < 1$, alors l'intégrale converge et vaut $\frac{1}{1-a}$, tandis que
- si $a \geq 1$, l'intégrale ne converge pas (le cas $a = 1$ ayant été fait ci-dessus.)

Cas d'un domaine non borné

Définition

Lorsqu'on considère une fonction $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue, nous posons

Cas d'un domaine non borné

Définition

Lorsqu'on considère une fonction $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue, nous posons

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{T \to +\infty} \int_a^T f(x)\,\mathrm{d}x$$

SI cette dernière limite existe.

Cas d'un domaine non borné

Définition

Lorsqu'on considère une fonction $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue, nous posons

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{T \to +\infty} \int_a^T f(x)\,\mathrm{d}x$$

SI cette dernière limite existe. Lorsque la limite est réelle, on dit que l'intégrale converge.

Exemple

Soit

$$f : [1, +\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}.$$

Exemple

Soit

$$f : [1, +\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}.$$

Alors

$$\lim_{T \to +\infty} \int_1^T \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x =$$

Exemple

Soit

$$f : [1, +\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}.$$

Alors

$$\lim_{T \to +\infty} \int_1^T \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \lim_{T \to +\infty} \Big(\ln(T) - \ln(1) \Big) =$$

Exemple

Soit
$$f : [1, +\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}.$$
Alors
$$\lim_{T \to +\infty} \int_1^T \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{T \to +\infty} \Big(\ln(T) - \ln(1) \Big) = \lim_{T \to +\infty} \ln(T) =$$

Exemple

Soit

$$f : [1, +\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}.$$

Alors

$$\lim_{T \to +\infty} \int_1^T \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{T \to +\infty} \Big(\ln(T) - \ln(1) \Big) = \lim_{T \to +\infty} \ln(T) = +\infty.$$

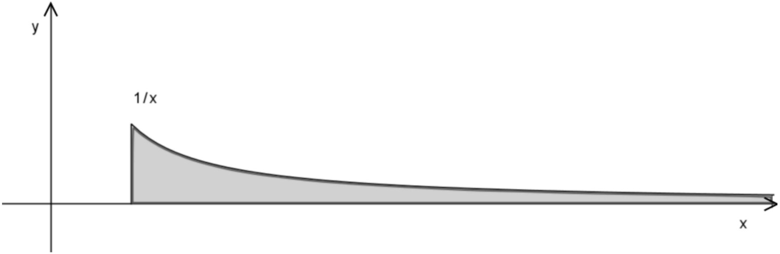
Exemple

Soit
$$f : [1, +\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}.$$
Alors
$$\lim_{T\to+\infty} \int_1^T \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{T\to+\infty} \Big(\ln(T) - \ln(1)\Big) = \lim_{T\to+\infty} \ln(T) = +\infty.$$

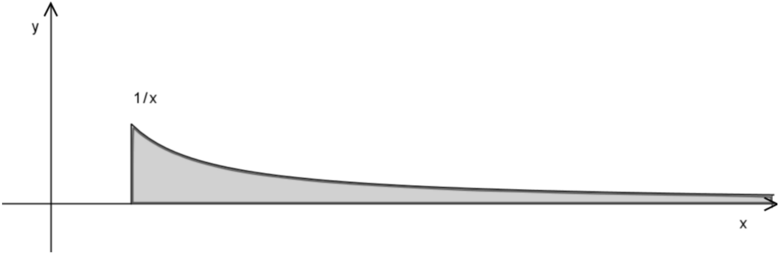
Donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ diverge vers $+\infty$.

Ainsi, la surface en gris sur le graphique

Ainsi, la surface en gris sur le graphique



Ainsi, la surface en gris sur le graphique



est d'aire infinie.

Exercice

Soit a un nombre réel, avec $a > 0$ et $a \neq 1$. Considérons la fonction

$$f_a : [1,\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x^a}$$

Exercice

Soit a un nombre réel, avec $a > 0$ et $a \neq 1$. Considérons la fonction

$$f_a : [1,\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x^a}$$

Prouvez que la fonction est intégrable sur $[1,\infty[$ si et seulement si $a > 1$.

Contenu de la section

Test du 31 Octobre:

Remarques générales:

- La moyenne est plutôt bonne (autour de 11,5)

Test du 31 Octobre:

Remarques générales:

- La moyenne est plutôt bonne (autour de 11,5)
- Vous avez eu des problèmes:

Test du 31 Octobre:

Remarques générales:

- La moyenne est plutôt bonne (autour de 11,5)
- Vous avez eu des problèmes:
  1. Parce que vous ne lisez pas attentivement l'énoncé.

Test du 31 Octobre:

Remarques générales:

- La moyenne est plutôt bonne (autour de 11,5)
- Vous avez eu des problèmes:

  1. Parce que vous ne lisez pas attentivement l'énoncé. Par exemple: « Laquelle des argumentations suivantes est correcte » ...

Test du 31 Octobre:

Remarques générales:

- La moyenne est plutôt bonne (autour de 11,5)
- Vous avez eu des problèmes:

  1. Parce que vous ne lisez pas attentivement l'énoncé. Par exemple: « Laquelle des argumentations suivantes est correcte » ... implique bien qu'il n'y en a qu'une!

Test du 31 Octobre:

Remarques générales:

- La moyenne est plutôt bonne (autour de 11,5)
- Vous avez eu des problèmes:

1. Parce que vous ne lisez pas attentivement l'énoncé. Par exemple: « Laquelle des argumentations suivantes est correcte » ... implique bien qu'il n'y en a qu'une!
2. Parce que vous ne connaissez pas suffisamment bien votre cours.

Test du 31 Octobre:

Remarques générales:

- La moyenne est plutôt bonne (autour de 11,5)
- Vous avez eu des problèmes:
  1. Parce que vous ne lisez pas attentivement l'énoncé. Par exemple: « Laquelle des argumentations suivantes est correcte » ... implique bien qu'il n'y en a qu'une!
  2. Parce que vous ne connaissez pas suffisamment bien votre cours. Formules de trigo, sens de « tas » de lettres, contre-exemples de fonctions surjectives, etc...

Test du 31 Octobre:

Remarques générales:

- La moyenne est plutôt bonne (autour de 11,5)
- Vous avez eu des problèmes:
  1. Parce que vous ne lisez pas attentivement l'énoncé. Par exemple: « Laquelle des argumentations suivantes est correcte » ... implique bien qu'il n'y en a qu'une!
  2. Parce que vous ne connaissez pas suffisamment bien votre cours. Formules de trigo, sens de « tas » de lettres, contre-exemples de fonctions surjectives, etc...

On va voir la correction de deux exercices (Les autres ont été faits en cours ou TD presque à l'identique).

Test du 31 Octobre:

Remarques générales:

- La moyenne est plutôt bonne (autour de 11,5)
- Vous avez eu des problèmes:
  1. Parce que vous ne lisez pas attentivement l'énoncé. Par exemple: « Laquelle des argumentations suivantes est correcte » ... implique bien qu'il n'y en a qu'une!
  2. Parce que vous ne connaissez pas suffisamment bien votre cours. Formules de trigo, sens de « tas » de lettres, contre-exemples de fonctions surjectives, etc...

On va voir la correction de deux exercices (Les autres ont été faits en cours ou TD presque à l'identique).

N'oubliez pas que l'examen de Janvier sera plus difficile!

Test du 31 Octobre:

Remarques générales:

- La moyenne est plutôt bonne (autour de 11,5)
- Vous avez eu des problèmes:

  1. Parce que vous ne lisez pas attentivement l'énoncé. Par exemple: « Laquelle des argumentations suivantes est correcte » ... implique bien qu'il n'y en a qu'une!
  2. Parce que vous ne connaissez pas suffisamment bien votre cours. Formules de trigo, sens de « tas » de lettres, contre-exemples de fonctions surjectives, etc...

On va voir la correction de deux exercices (Les autres ont été faits en cours ou TD presque à l'identique).

N'oubliez pas que l'examen de Janvier sera plus difficile! (Ce ne sera pas un QCM, il y aura plus de matière, vous devrez détailler les calculs ...)

Exercice de trigonométrie

Question

Que vaut $\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$?

Exercice de trigonométrie

Question

Que vaut $\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$?

Réponse

Il fallait appliquer la formule du sinus de la somme, qui est à connaître: pour touts réels A et B,

$$\sin\left(A+B\right)=\sin A\cos B+\sin B\cos A.$$

Exercice de trigonométrie

Question

Que vaut $\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$?

Réponse

Il fallait appliquer la formule du sinus de la somme, qui est à connaître: pour touts réels A et B,

$$\sin\left(A+B\right) = \sin A \cos B + \sin B \cos A.$$

Donc, pour $A = x$ et $B = \frac{\pi}{6}$:

Exercice de trigonométrie

Question

Que vaut $\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$?

Réponse

Il fallait appliquer la formule du sinus de la somme, qui est à connaître: pour touts réels A et B,

$$\sin\left(A+B\right)=\sin A\cos B+\sin B\cos A.$$

Donc, pour $A=x$ et $B=\frac{\pi}{6}$:

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=$$

Exercice de trigonométrie

Question

Que vaut $\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$?

Réponse

Il fallait appliquer la formule du sinus de la somme, qui est à connaître: pour touts réels A et B,

$$\sin\left(A+B\right)=\sin A\cos B+\sin B\cos A.$$

Donc, pour $A=x$ et $B=\frac{\pi}{6}$:

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=\sin x\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}\cos x$$

$$=$$

Exercice de trigonométrie

Question

Que vaut $\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$?

Réponse

Il fallait appliquer la formule du sinus de la somme, qui est à connaître: pour touts réels A et B,

$$\sin\left(A+B\right)=\sin A\cos B+\sin B\cos A.$$

Donc, pour $A=x$ et $B=\frac{\pi}{6}$:

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)&=\sin x\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}\cos x\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x.\end{aligned}$$

Exercice de trigonométrie

Question

Que vaut $\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$?

Réponse

Il fallait appliquer la formule du sinus de la somme, qui est à connaître: pour touts réels A et B,

$$\sin\Big(A+B\Big) = \sin A\cos B + \sin B\cos A.$$

Donc, pour $A = x$ et $B = \frac{\pi}{6}$:

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right) &= \sin x\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6}\cos x\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x.\end{aligned}$$

Les valeurs particulières de $\cos\frac{\pi}{6}$ et $\sin\frac{\pi}{6}$ sont aussi à connaître.

Exercice sur les fonctions

Résultat

La fonction non-surjective à trouver parmi la liste était

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2.$$

Exercice sur les fonctions

Résultat

La fonction non-surjective à trouver parmi la liste était

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2.$$

Démonstration.

Une fonction $f : A \longrightarrow B$ est surjective si

Exercice sur les fonctions

Résultat

La fonction non-surjective à trouver parmi la liste était

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2.$$

Démonstration.

Une fonction $f : A \longrightarrow B$ est surjective si pour tout réel $y \in B$

Exercice sur les fonctions

Résultat

La fonction non-surjective à trouver parmi la liste était

$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2.$$

Démonstration.

Une fonction $f : A \to B$ est surjective si pour tout réel $y \in B$ il existe un réel $x \in A$ tel que $y = f(x)$. (Ce réel n'est pas forcément unique)

Exercice sur les fonctions

Résultat

La fonction non-surjective à trouver parmi la liste était

$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2.$$

Démonstration.

Une fonction $f : A \to B$ est surjective si pour tout réel $y \in B$ il existe un réel $x \in A$ tel que $y = f(x)$. (Ce réel n'est pas forcément unique)

Pour cette fonction f il suffit de choisir $y = -1$: il n'existe pas de réel x tel que $x^2 = -1$, car le carré d'un nombre est toujours positif ou nul.

Exercice sur les fonctions

Résultat

La fonction non-surjective à trouver parmi la liste était

$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2.$$

Démonstration.

Une fonction $f : A \to B$ est surjective si pour tout réel $y \in B$ il existe un réel $x \in A$ tel que $y = f(x)$. (Ce réel n'est pas forcément unique)

Pour cette fonction f il suffit de choisir $y = -1$: il n'existe pas de réel x tel que $x^2 = -1$, car le carré d'un nombre est toujours positif ou nul. Donc f n'est pas surjective. $\square$