

# Intégrales définies

# Contenu de la section

Intégrales définies

# Rappel

## Rappel

La primitive (ou « intégrale indéfinie ») d'une fonction est elle-même une fonction, définie sur le même intervalle que  $f$ , et connue à une constante additive près.

Aujourd'hui nous allons définir l'**intégrale définie** d'une fonction entre deux bornes. Ce sera un nombre qui représente l'**aire d'une région délimitée par le graphe d'une fonction**.

# Contenu de la section

## Intégrales définies

Introduction

Définition

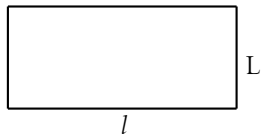
Théorème fondamental

Intégration définie et indéfinie

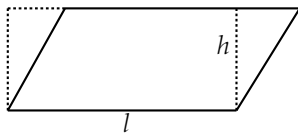
Quelques propriétés de l'intégrale

Intégrales généralisées

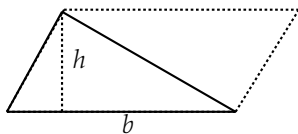
# Aires de figures connues, formées de segments de droites



$$\text{aire} = L \times l$$



$$\text{aire} = l \times h$$

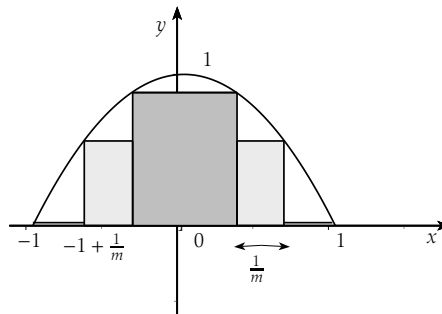


$$\text{aire} = \frac{b \times h}{2}$$

## Aires de figures courbes

Comment montrer que l'aire d'un disque est  $\pi r^2$ , où  $r$  est le rayon?

Comment calculer l'aire sous l'arc de parabole d'équation  $y = 1 - x^2$ ?



Voici comment nous allons définir cette aire. Pour chaque valeur de  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , nous subdivisons la région sous la courbe en rectangles de largeur  $\frac{1}{m}$ . En prenant la limite lorsque  $m \rightarrow \infty$  (c'est-à-dire lorsque la subdivision devient très fine) nous pouvons espérer obtenir une valeur pour l'aire.

Cette valeur sera notée  $\int_{-1}^1 (1 - x^2) dx$ : elle désigne l'aire comprise entre la courbe  $y = 1 - x^2$  et l'axe des abscisses.

# Contenu de la section

## Intégrales définies

Introduction

**Définition**

Théorème fondamental

Intégration définie et indéfinie

Quelques propriétés de l'intégrale

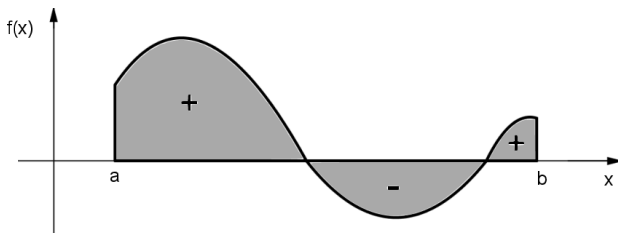
Intégrales généralisées

## « Définition »

Soit  $a, b$  deux nombres réels avec  $a < b$  et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur  $[a, b]$ . Nous allons noter

$$\int_a^b f(x) dx$$

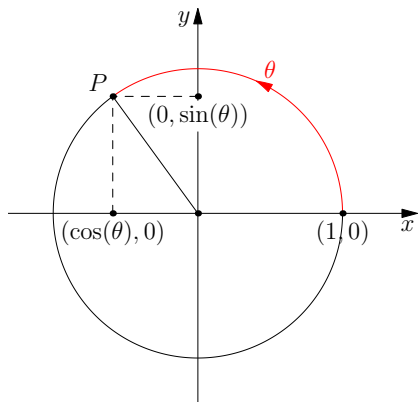
l'aire algébrique de la surface comprise entre l'axe des abscisses, le graphe de  $f$ , et les deux droites d'équations respectives  $x = a$  et  $x = b$ .



Les portions au-dessus du graphe seront comptées positivement, celles en-dessous négativement. Cette aire est définie en subdivisant la région grise en rectangles de plus en plus étroits et en prenant la limite.



## Un exemple: l'aire du disque



Le cercle de centre 0 et de rayon 1 a pour équation:

$$x^2 + y^2 = 1.$$

En particulier l'aire du demi-disque supérieur (contenu dans les  $y \geq 0$ ) est l'aire comprise entre l'axe des abscisses et la courbe d'équation

$$y = \sqrt{1 - x^2}, \quad \text{avec } x \in [-1, 1],$$

et vaut donc  $\int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx$ .

Or, l'aire du disque unité vaut  $\pi$ , donc l'aire du demi-disque vaut  $\frac{\pi}{2}$ .

Ceci nous donne donc l'égalité:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

# Échange des bornes

## Définition

Lorsque  $\int_a^b f(t) dt$  existe, on définit  $\int_b^a f(t) dt$  comme:

$$\int_b^a f(t) dt := - \int_a^b f(t) dt.$$

## Remarque

En d'autres termes : **renverser les bornes change le signe de l'intégrale définie.**

# Contenu de la section

## Intégrales définies

Introduction

Définition

**Théorème fondamental**

Intégration définie et indéfinie

Quelques propriétés de l'intégrale

Intégrales généralisées

## Comment calculer une intégrale?

L'intégrale d'une fonction continue sur un segment est l'aire algébrique sous la courbe. Comment **calculer** cette aire?

### Théorème (Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral)

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  et soit  $a$  un point de  $I$ . Alors la fonction

$$F : I \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$$

est **l'unique primitive de  $f$  qui s'annule en  $x = a$** .

### Remarque

Ceci nous donne **une manière de calculer  $\int_a^x f(t) dt$** : il suffit pour cela de calculer une primitive qui s'annule en  $a$  (ce qu'on sait faire dans beaucoup de cas, même si pas dans tous), et d'évaluer sa valeur en  $x$ .

Concrètement:

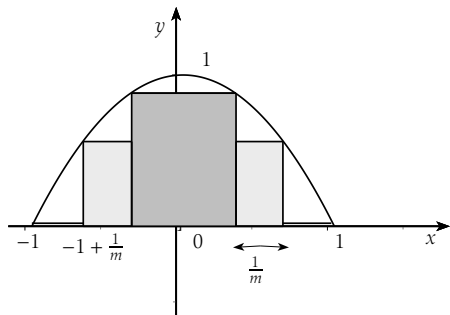
### Corollaire

Soit  $G$  une primitive *quelconque* de  $f$ . Alors  $G(x) - G(a)$  est une primitive de  $f$  *et s'annule en  $a$* , et donc :

$$\int_a^x f(t) dt = G(x) - G(a) = \left[ G(t) \right]_{t=a}^{t=x}.$$

On n'a donc même pas besoin de faire attention aux constantes: il suffit de connaître *une* primitive de  $f$ .

## Un exemple



### Question

Quelle est l'aire délimitée par l'arc de parabole d'équation  $y = 1 - x^2$  et l'axe des abscisses ?

### Démonstration.

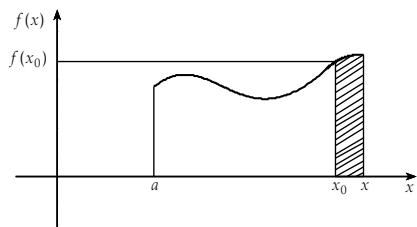
Cette aire vaut  $\int_{-1}^1 (1 - x^2) dx$ . Une primitive de  $1 - x^2$  sur  $\mathbb{R}$  est

$F(x) = x - \frac{x^3}{3}$ . Par le théorème fondamental, l'aire sous la parabole vaut donc :

$$\int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = F(1) - F(-1) = 1 - \frac{1}{3} - \left( -1 - \frac{(-1)^3}{3} \right) = \frac{4}{3}.$$



## Idée de la preuve du théorème fondamental



Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Définissons :

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

La dérivée de cette fonction  $F$  au point  $x_0$  est donnée par :

$$\begin{aligned} F'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\int_{x_0}^x f(t) dt}{x - x_0} \end{aligned}$$

Lorsque  $x$  est très proche de  $x_0$ , on peut considérer que les valeurs de  $f$  sur  $[x_0, x]$  sont très proches de  $f(x_0)$ . Et donc que

$$\int_{x_0}^x f(t) dt = f(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0),$$

de sorte que :

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

# Contenu de la section

## Intégrales définies

Introduction

Définition

Théorème fondamental

**Intégration définie et indéfinie**

Quelques propriétés de l'intégrale

Intégrales généralisées



## Le changement de variables partie II

Au vu du théorème fondamental, les formules de recherche de primitive s'adaptent pour calculer des intégrales définies.

En particulier, le changement de variables marche encore. Si on intègre en  $x$  entre  $a$  et  $b$ , en posant  $t = g(x)$ , on intègre en  $t$  entre  $g(a)$  et  $g(b)$ . On obtient alors :

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt.$$

## Exemple

On veut calculer

$$I = \int_{-1}^0 \sqrt{3x+4} \, dx.$$

En posant  $t = 3x + 4$ , nous avons  $dt = 3 \, dx$ . Dès lors :

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3} \int_1^4 \sqrt{t} \, dt \\ &= \frac{1}{3} \left[ \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 \\ &= \frac{2}{9} \left[ \sqrt{t^3} \right]_1^4 = \frac{2}{9} [8 - 1] = \frac{14}{9} \end{aligned}$$

Vous pouvez vérifier qu'on obtiendrait le même résultat si on calculait une primitive de  $\sqrt{3x+4}$  et qu'on calculait la différence de ses valeurs en 0 et  $-1$ .

## L'aire du disque, de nouveau

### Question

Montrez par le calcul que

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

### Démonstration.

Pour ça, utilisez le changement de variable:  $x = \sin t$ , avec  $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .

Ceci donne:  $dx = \cos t dt$  et comme  $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , on a

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-(\sin t)^2} = \sqrt{(\cos t)^2} = \cos t.$$

La formule de changement de variable donne alors:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cos t dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt.$$

Les formules de trigo donnent:  $2\cos^2 t = 1 + \cos(2t)$ . De sorte que:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos(2t)) dt = \frac{1}{2} \pi.$$



# Contenu de la section

## Intégrales définies

Introduction

Définition

Théorème fondamental

Intégration définie et indéfinie

**Quelques propriétés de l'intégrale**

Intégrales généralisées

## Additivité du domaine d'intégration

### Résultat

*Soit  $f$  une fonction continue. Pour  $c \in \mathbb{R}$ , si deux des trois intégrales suivantes existent, la troisième existe aussi et*

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

*C'est l'additivité par rapport au domaine d'intégration.*

# Linearité de l'intégrale

## Résultat

*Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions intégrables sur l'intervalle  $[a,b]$  et si  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , alors*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x) \, dx = \alpha \int_a^b f(x) \, dx + \beta \int_a^b g(x) \, dx.$$

C'est la même propriété que pour les primitives!

# Signe et intégrale

## Résultat

Soit  $f$  une fonction réelle continue sur  $[a,b]$  vérifiant avec  $f(x) \geq 0$  pour tout  $x$  de  $[a,b]$ . Alors

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

Si  $f \geq 0$  nous avons même l'équivalence :

$$\int_a^b f(x) dx = 0 \iff \forall x \in [a,b] : f(x) = 0.$$

C'est normal, car si  $f \geq 0$ , l'aire algébrique sous sa courbe est positive.

## Corollaire

En particulier, si  $f(x) \leq g(x)$  pour tout  $x \in [a,b]$ , alors  $\int_a^b f \leq \int_a^b g$ .

# Contenu de la section

## Intégrales définies

Introduction

Définition

Théorème fondamental

Intégration définie et indéfinie

Quelques propriétés de l'intégrale

**Intégrales généralisées**



Dans la définition de l'intégrale définie

$$\int_a^b f(x) dx,$$

nous avons supposé

- ▶  $a, b \in \mathbb{R}$ , et
- ▶  $f$  est une fonction continue sur  $[a, b]$ .

Les applications requièrent (au moins) deux généralisations de ce concept :

- ▶ lorsque  $f$  est définie sur  $]a, b[$ , et
- ▶ lorsque  $a$  ou  $b$  est infini.

## Intégrales définies

Introduction

Définition

Théorème fondamental

Intégration définie et indéfinie

Quelques propriétés de l'intégrale

## Intégrales généralisées

Cas d'une fonction non bornée

Cas d'un domaine non borné

## Cas d'une fonction non bornée

### Définition

Pour une fonction  $f$  continue sur  $[a, b[$ , nous posons

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{u \rightarrow b \\ <}} \int_a^u f(x) dx$$

Si cette limite existe. Lorsque la limite est réelle, on dit que **l'intégrale converge**.

On procède similairement pour une fonction définie et continue sur  $]a, b]$ .

## Exemple

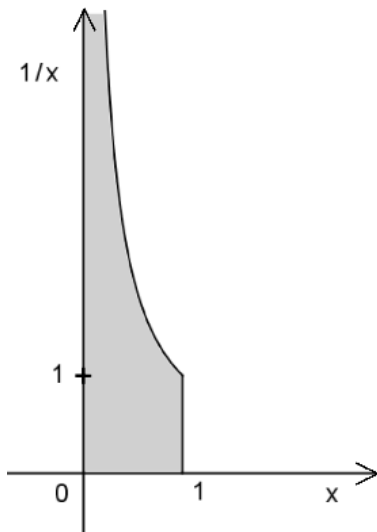
### Exemple

Considérons  $]0,1] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ >}} \int_u^1 \frac{1}{x} dx \\ &= \lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ >}} (\ln(1) - \ln(u)) \\ &= - \lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ >}} \ln(u) = +\infty \end{aligned}$$

Donc l'intégrale  $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$  **ne converge pas**, plus précisément elle tend vers  $+\infty$ .

L'aire grise dans la figure de droite est donc **infinie**.



## Exemple

Soit  $a$  un nombre réel, avec  $a > 0$  et  $a \neq 1$ . Considérons la fonction

$$f_a : ]0,1] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x^a} = x^{-a}$$

Alors

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ >}} \int_u^1 \frac{1}{x^a} dx &= \lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ >}} \left[ \frac{1}{1-a} x^{1-a} \right]_u^1 \\ &= \frac{1}{1-a} \lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ >}} (1 - u^{1-a}) \end{aligned}$$

Donc :

- ▶ Si  $a < 1$ , alors l'intégrale **converge et vaut**  $\frac{1}{1-a}$ , tandis que
- ▶ si  $a \geq 1$ , l'intégrale **ne converge pas** (le cas  $a = 1$  ayant été fait ci-dessus.)

## Intégrales définies

Introduction

Définition

Théorème fondamental

Intégration définie et indéfinie

Quelques propriétés de l'intégrale

## Intégrales généralisées

Cas d'une fonction non bornée

Cas d'un domaine non borné

## Cas d'un domaine non borné

### Définition

Lorsqu'on considère une fonction  $f : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  continue, nous posons

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_a^T f(x) dx$$

Si cette dernière limite existe. Lorsque la limite est réelle, on dit que l'intégrale converge.

## Exemple

Soit

$$f : [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}.$$

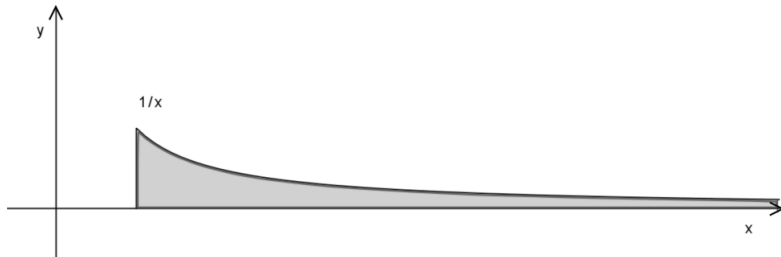
Alors

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_1^T \frac{1}{x} dx = \lim_{T \rightarrow +\infty} (\ln(T) - \ln(1)) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \ln(T) = +\infty.$$

Donc l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$  **diverge vers  $+\infty$ .**



Ainsi, la surface en gris sur le graphique



est d'aire infinie.

## Exercice

Soit  $a$  un nombre réel, avec  $a > 0$  et  $a \neq 1$ . Considérons la fonction

$$f_a : [1, \infty[ \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x^a}$$

Prouvez que la fonction est **intégrable sur  $[1, \infty[$  si et seulement si  $a > 1$ .**

## Contenu de la section

Commentaires sur le test du 31 Octobre

## Test du 31 Octobre:

Remarques générales:

- ▶ La moyenne est plutôt bonne (autour de 11,5)
- ▶ Vous avez eu des problèmes:
  1. Parce que vous **ne lisez pas attentivement l'énoncé**. Par exemple: « **Laquelle** des argumentations suivantes est correcte » ... implique bien qu'il n'y en a qu'une!
  2. Parce que **vous ne connaissez pas suffisamment bien votre cours**. Formules de trigo, sens de « tas » de lettres, contre-exemples de fonctions surjectives, etc...

On va voir la correction de deux exercices (Les autres ont été faits en cours ou TD presque à l'identique).

**N'oubliez pas que l'examen de Janvier sera plus difficile!** (Ce ne sera pas un QCM, il y aura plus de matière, vous devrez détailler les calculs ...)

## Exercice de trigonométrie

### Question

Que vaut  $\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right)$ ?

### Réponse

Il fallait appliquer la formule du sinus de la somme, **qui est à connaître**: pour tous réels  $A$  et  $B$ ,

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A.$$

Donc, pour  $A = x$  et  $B = \frac{\pi}{6}$ :

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) &= \sin x \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6} \cos x \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x. \end{aligned}$$

Les valeurs particulières de  $\cos \frac{\pi}{6}$  et  $\sin \frac{\pi}{6}$  sont aussi à connaître.

## Exercice sur les fonctions

### Résultat

*La fonction non-surjective à trouver parmi la liste était*

$$f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2.$$

### Démonstration.

Une fonction  $f : A \rightarrow B$  est **surjective** si pour tout réel  $y \in B$  il existe un réel  $x \in A$  **tel que  $y = f(x)$** . (Ce réel n'est pas forcément unique)

Pour cette fonction  $f$  il suffit de choisir  $y = -1$ : il n'existe pas de réel  $x$  tel que  $x^2 = -1$ , car le carré d'un nombre **est toujours positif ou nul**.

Donc  $f$  n'est pas surjective. □