Matrices

Contenu de la section

Contenu de la section

Que sont les matrices?

Les matrices sont juste... des tableaux de nombres. (Qu'on utilise d'une certaine certaine manière, bien sûr!)

Elles sont omniprésentes dans tous les domaines des sciences et leur utilisation est fondamentale pour:

- Résoudre des systèmes d'équations linéaires
- Construire des modèles de probabilité
- Résoudre numériquement des systèmes d'équations différentielles (modéliser la coque d'un bâteau, etc...)
- Construire des algorithmes de page-ranking (cherchez sur internet « Matrice de G**gle »)
- Améliorer les methodes de traitement d'image
- Et bien plus encore...

Définition rigoureuse

Définition

Soient deux entiers naturels $m \geq 1$ et $n \geq 1$. Une *matrice réelle* de taille $m \times n$ est un tableau rectangulaire ayant m lignes et n colonnes. On le note entre parenthèses.

Attention à l'ordre des indices: $m \times n$ désigne toujours m lignes et n colonnes.

Exemple

Ceci sont des matrices :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \pi & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ e+\pi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\pi \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \dots$$

Définition

Pour une matrice M de taille $m \times n$:

- Si $n = 1$, la matrice est appelée *matrice-colonne* (c'est juste une colonne!);
- si par contre $m = 1$, la matrice est appelée *matrice-ligne*;
- si enfin $m = n$, la matrice est appelée *matrice carrée* ;
- le nombre réel se trouvant à l'intersection de la i^{e} ligne et de la j^{e} colonne de la matrice est noté M_{ij} . Les M_{ij} sont appelés composantes (ou éléments) de la matrice M;
- on note $\mathrm{Mat}(m,n)$ ou $\mathbb{R}^{m \times n}$ l'ensemble de toutes les matrices de taille $m \times n$.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} M_{11} & \dots & M_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{m1} & \dots & M_{mn} \end{pmatrix}$$

Égalite de matrices

Définition

Deux matrices M et N sont égales si elles ont la même taille, disons $m \times n$, et les mêmes éléments :

$$M = N \iff M_{ij} = N_{ij} \quad \text{pour tout } i = 1, \ldots, m \text{ et tout } j = 1, \ldots, n$$

Exercice

Déterminer x pour que M et N soit égales :

$$\begin{pmatrix} 0 & x^2 \\ 1 & \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x^4 & \pi \end{pmatrix}$$

Réponse

Il faut $x^2 = 1$ et $1 = x^4$. La seule possibilité est $x = 1$.

Contenu de la section

Somme de deux matrices

Définition

Si M et N sont deux matrices de même taille $m \times n$, leur somme $M + N$ est la matrice $m \times n$ dont les éléments sont les $M_{ij} + N_{ij}$. Autrement dit:

$$(M + N)_{ij} = M_{ij} + N_{ij}.$$

La somme a encore la même taille que M et que N!

Exemple

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sqrt{2} & \pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 + \sqrt{2} & \pi \end{pmatrix}$$

Pour sommer deux matrices, on somme leurs composantes terme à terme.

Matrice nulle

Définition

Une matrice constituée uniquement de 0 est appelée *matrice nulle*.
On la note parfois 0, ou $0_{m\times n}$ pour indiquer sa taille.

Résultat

La matrice nulle est neutre dans l'addition matricielle: pour toute matrice M de taille $m \times n$,

$$M + 0_{m\times n} = 0_{m\times n} + M = M.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Résultat

La somme matricielle de deux matrices M et N de même taille est donc une opération :

$$+ : \mathrm{Mat}(m,n) \times \mathrm{Mat}(m,n) \to \mathrm{Mat}(m,n)$$

ayant les propriétés :

Commutativité $M + N = N + M$

Associativité $(M+N)+P = M+(N+P)$. *On écrira généralement $M+N+P$ sans parenthèses.*

Existence d'un neutre $M + 0 = 0 + M = M$

Existence d'un opposé *Pour toute matrice M, il existe une matrice $-M$ telle que $M + (-M) = (-M) + M = 0$.*

Remarque

Ces propriétés font que $(\mathrm{Mat}(m,n),+)$ (lire: « l'ensemble des matrices de taille $m \times n$ muni de l'addition matricielle ») forme un *groupe commutatif* (ou *groupe additif*).

Remarque

On connait d'autres groupes commutatifs : $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{Z},+)$. Attention, $(\mathbb{N},+)$ n'en est pas un! (L'opposé d'un entier n'est plus dans $\mathbb{N}$)

Voici un autre exemple de groupe commutatif : $(\mathbb{R}\backslash\{0\},\cdot)$:

- le neutre s'appelle 1,
- « l'opposé » est alors l'inverse (et tout nombre non nul admet un inverse)

Dans ce cas, on parlera de *groupe multiplicatif commutatif*.

Produit d'une matrice par un scalaire (ou nombre réel)

Définition

Si $\lambda \in \mathbb{R}$, et M est une matrice $m \times n$, le produit λM est une matrice de taille $m \times n$ dont les coefficients sont :

$$(\lambda M)_{ij} = \lambda M_{ij}.$$

pour des indices $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$.

Exemple

$$5\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 15 \end{pmatrix}$$

Pour multiplier une matrice par un réel, on multiplie toutes les composantes de la matrice par ce réel.

Produit matriciel

Définition

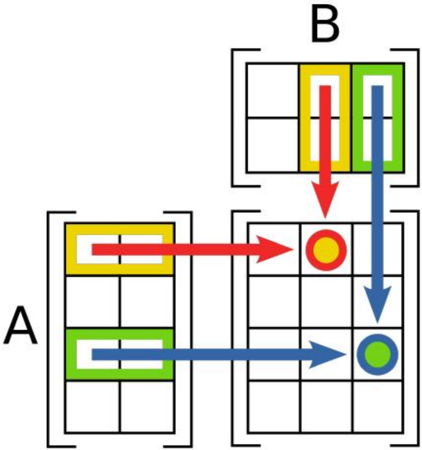
Si M est une matrice de taille $m \times n$ et N une matrice de taille $n \times p$, on définit leur produit matriciel MN comme la matrice de taille $m \times p$ dont les composantes sont données par:

$$(MN)_{ik} = \sum_{j=1}^{n} M_{ij} N_{jk} \quad \forall i = 1, \ldots, m; k = 1, \ldots, p.$$

Attention à la compatibilité des tailles!

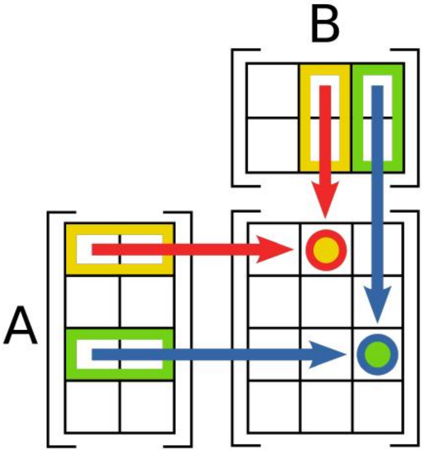
Contrairement à ce qui se passe pour la somme et le produit par un scalaire, les composantes du produit de deux matrices ne sont pas juste le produit des composantes! Ce produit est parfois appelé le produit « ligne par colonne ».

Illustration avec un produit 4×2 et 2×3



$$(MN)_{12} = \sum_{j=1}^{2} M_{1j} N_{j2} = M_{11} N_{12} + M_{12} N_{22}$$

Illustration avec un produit 4×2 et 2×3 II



$$(MN)_{33} = \sum_{j=1}^{2} M_{3j} N_{j3} = M_{31}N_{13} + M_{32}N_{23}$$

Question

Calculez le produit matriciel des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sqrt{2} & \pi \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \pi \\ 0 & 3 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Réponse

Par définition du produit matriciel,

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 0 \times 1 + 1 \times 0 & 0 \times 0 + 1 \times 3 & 0 \times \pi + 1 \times \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \times 1 + \pi \times 0 & \sqrt{2} \times 0 + \pi \times 3 & \sqrt{2} \times \pi + \pi \times \sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 3\pi & 2\sqrt{2}\pi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Matrice identité

Définition

Une matrice carrée de taille $n \times n$ possédant des 0 partout, sauf sur la diagonale où il n'y a que des 1 est appelée *matrice identité*. On la note généralement I ou I_n.

Exemple

Les matrices identité 2×2 et 3×3 sont :

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice identité est un élément neutre pour le produit des matrices:

Résultat

Si M est une matrice de taille $m \times n$, alors :

$$MI_n = M = I_m M.$$

Remarquez qu'on a multiplié par une matrice identité différente à gauche et à droite! (Il faut respecter les tailles dans le produit matriciel).

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Matrices de même taille

Remarque

En particulier, le produit de deux matrices carrées de taille $n \times n$ est encore une matrice carrée de taille $n \times n$.

Remarque

Attention, le produit matriciel est très différent du produit de nombres réels:

- le produit MN n'est en général pas égal au produit NM
- certaines matrices n'ont pas d'inverse.

Le déterminant

À toute matrice carrée (peu importe sa taille) nous allons associer un nombre réel, appelé le déterminant, qu'on va définir dans un instant.

Ce nombre permettra d'obtenir de nombreuses informations sur la matrice (notamment sur l'existence d'un inverse).

Étant donné une matrice carrée M de taille $n \times n$, son déterminant $\det M$ est défini par récurrence sur n :

Définition

- **Si $n = 1$:** Le déterminant d'une matrice 1×1 est égal au seul nombre de la matrice: $\det M = M_{11}$.
- **Si $n \geq 2$:** Le déterminant d'une matrice quelconque est obtenu de la manière suivante :
  1. On choisit une ligne ou colonne de M, peu importe laquelle. Par exemple la i ème ligne.
  2. Pour chaque élément M_{ij} de la i ème ligne, lorsque j va de 1 à n, on calcule le déterminant de la matrice obtenue en enlevant la i^{e} ligne et la j^{e} colonne de A, qui est de taille $n - 1 \times n - 1$. On le note D_{ij}.
  3. Le déterminant de M est la somme tous les produits $(-1)^{i+j} M_{ij} D_{ij}$ lorsque j va de 1 à n, c'est-à-dire lorsqu'on parcourt la i-ème ligne :

$$\det M = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{i+j} M_{ij} D_{ij}.$$

Déterminant des matrices 2×2

Pour une matrice 2×2,

$$\det M = \sum_{i=1}^{2} (-1)^{i+j} M_{ij} D_{ij}.$$

Exemple

Considérons la matrice, et développons selon la première colonne

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} 1 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} 2 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot (-3) = 10$$

Remarque

Dans le cas des matrices 2×2, le même calcul que celui qu'on vient de faire donne une formule générale **à retenir:**

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

« La diagonale descendante moins la diagonale montante ! »

Notation

On peut aussi décider de calculer le déterminant en développant le long de la j ème colonne. Le procédé est le même et la formule sera dans ce cas:

$$\det M = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} M_{ij} D_{ij}.$$

Cette manière de calculer le déterminant ne dépend pas de la ligne ou de la colonne choisie.

Définition

Le déterminant d'une matrice $\begin{pmatrix} M_{11} & \dots & M_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{k1} & \dots & M_{kn} \end{pmatrix}$ se note $\begin{vmatrix} M_{11} & \dots & M_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{k1} & \dots & M_{kn} \end{vmatrix}$.

Remarque

En général on va chercher à développer selon les rangées où il y a autant de 0 que possible afin d'éviter les calculs !

Exemple

Développons le déterminant 3×3 suivant selon la seconde colonne.

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} &= (-1)^{1+2} 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\
&+ (-1)^{2+2} 0 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\
&= -3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 0 - \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -3(-2-0) - (1-10) = 6 + 9 = 15
\end{aligned}
$$

Les signes dans le cas général

Rappel

$$\det M = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} M_{ij} D_{ij} = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{i+j} M_{ij} D_{ij}$$

Le signe attribué alterne d'un élément au suivant, il est donc facile de s'en rappeler par le schéma suivant :

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \\ + & - & + & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}$$