Contenu de la section

Contenu de la section

Transposée d'une matrice

Définition

La *transposée* d'une matrice M de taille $m \times n$ est la matrice de taille $n \times m$, notée ${}^tM$, vérifiant :

$$({}^tM)_{ij} = M_{ji}$$

Exemple

La transposée de ... est ...

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}.$$

Contenu de la section

Inverse d'une matrice

Définition

Une matrice carrée A est dite *inversible* si il existe une matrice B de même taille telle que

$$AB = BA = I$$

La matrice B est appelée l'inverse de A, et on note $B = A^{-1}$.

Attention, quand on vérifie que B est l'inverse de A il faut bien calculer les deux produits AB et BA (car *a priori* ils sont différents).

Résultat

L'inverse de A est unique.

Démonstration.

Si B et C sont deux inverses de A, alors AC = I et BA = I donc

$$B = BI = BAC = IC = C$$

□

Exemple

La matrice identité I_3 est elle-même sa propre inverse

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

C'est vrai de toutes les matrices identité I_n pour tout $n \geq 1$.

La matrice identité est un exemple de matrice diagonale: c'est une matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux sur la diagonale (qui peuvent être tous différents).

Remarque

Si D et E sont des matrices diagonales, leur produit est encore une matrice diagonale.

$$\begin{pmatrix} D_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & D_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & E_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & E_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} D_{11}E_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_{22}E_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & D_{nn}E_{nn} \end{pmatrix}$$

Résultat

Si $D_{11},\dots,D_{nn}$ sont non-nuls, l'inverse de

$$D = \begin{pmatrix} D_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & D_{nn} \end{pmatrix} \text{ est } \begin{pmatrix} D_{11}^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_{22}^{-1} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & D_{nn}^{-1} \end{pmatrix}$$

Si l'un des coefficients diagonaux de D est nul, alors D n'est pas inversible.

À quoi sert inverser des matrices? I

Exemple

On considère le système suivant, d'inconnues x_1 et x_2:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

Il a pour unique solution $(x_1,x_2) = (2,1)$.

Démonstration.

Si (x_1,x_2) est une solution, alors $(x_1 + x_2) + (x_1 - x_2) = 3 + 1 = 4$, c'est-à-dire $2x_1 = 4$. Donc il faut $x_1 = 2$.
Comme $x_1 + x_2 = 3$ il faut donc $x_2 = 1$. D'où il **faut** $(x_1,x_2) = (2,1)$ (= condition nécessaire).
Inversement, en remplaçant $x_1 = 2$ et $x_2 = 1$ dans les équations, les égalités sont vérifiées. La condition nécessaire est donc suffisante. $\square$

À quoi sert inverser des matrices? II

Il existe une manière plus générale de traiter ces systèmes:

Exemple

Remarquons maintenant que ce même système:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

se réécrit comme un produit matriciel. En effet si on pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{et } \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

($\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{b}$ sont des matrices-colonne de taille 2×1), le système devient:

$$A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}.$$

Imaginons qu'on connaisse l'inverse de la matrice A. Alors la solution du système serait donnée ici par:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{x} = A^{-1}\overrightarrow{b}.$$

Contenu de la section

Trace d'une matrice

Définition

La *trace* d'une matrice carrée M est la somme de ses éléments diagonaux :

$$\mathrm{Tr}(M) = M_{11} + \cdots + M_{nn}$$

où $n \times n$ est la taille de la matrice.

Exemple

$$\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 5$$

Contenu de la section

Somme et produit

Résultat

Si $A, D \in \mathrm{Mat}(m,n)$*,* $B, C \in \mathrm{Mat}(n,p)$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$*, alors:*

- $A(B+C) = AB + AC$
- $(A+D)B = AB + DB$
- $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

Preuve de la première égalité.

En position ij, le membre de gauche vaut

$$\sum_{k=1}^{n} A_{ik}(B+C)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}(B_{kj} + C_{kj})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (A_{ik}B_{kj} + A_{ik}C_{kj}) = (AB)_{ij} + (AC)_{ij}$$

ce qui est égal au membre de droite. $\square$

Transposée et produit

Résultat

Si $A \in \mathrm{Mat}(m,n)$ *et* $B \in \mathrm{Mat}(n,p)$, *alors :*

$$^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$$

Attention à bien inverser l'ordre du produit! (Car $^tB\,^tA$ et $^tA\,^tB$ sont *a priori* différents)

Trace, somme et produit

Résultat

Si A,B sont des matrices carrées de même taille, si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}\,A + \mathrm{Tr}\,B \qquad \mathrm{Tr}(\lambda A) = \lambda\,\mathrm{Tr}(A)$$

$$\mathrm{Tr}({}^t(A)) = \mathrm{Tr}(A) \qquad \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$$

Exemple

En revanche, la trace du produit n'est pas égale au produit des traces :

$$\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) = \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right) = 0,$$

alors que

$$\mathrm{Tr}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \mathrm{Tr}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = 1.$$

Inverse, produit et transposée

Résultat

Si A,B sont des matrices inversibles de même taille, alors

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \quad (A^{-1})^{-1} = A \quad ({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$$

Comme pour la transposée, on inverse l'ordre des matrices quand on prend l'inverse d'un produit.

Démonstration.

Pour la première égalité, calculons :

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ABB^{-1}A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

De même pour $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$. Les autres inégalités sont laissées en exercice. $\square$

Contenu de la section

Un calcul pour se remettre en jambe

Question

Calculez $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$.

Réponse

En développant (par exemple) par rapport à la dernière colonne:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3} 6 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 \times 1 \times 3 = 18.$$

Ce même calcul reste vrai pour toute matrice triangulaire:

Résultat

Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients sur la diagonale. En particulier, le déterminant de la matrice identité I_n vaut 1.

Déterminant et opérations

Résultat

Le déterminant d'un produit de deux matrices carrées de même taille est le produit des déterminants :

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

En particulier, le déterminant de l'inverse est l'inverse du déterminant (si $\det A \neq 0$*):*

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.$$

Remarque

En revanche, le déterminant d'une somme *n'est pas* la somme des déterminants !

Résultat

Une matrice carrée A de taille $n \times n$ est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$.

Comment calculer rapidement un déterminant en général?

Généralement, une matrice n'est pas triangulaire. Et elle peut être de très grande taille. La calcul du déterminant en développant selon une ligne ou une colonne peut donc être long et compliqué.

On va voir une autre méthode pour calculer le déterminant. Elle se base sur le fait qu'on peut appliquer certaines opérations à une matrice donnée – par exemple sommer deux de ses lignes – sans changer la valeur du déterminant.

L'idéee sera alors d'appliquer un certain nombre de ces transformations pour simplifier la matrice au maximum et se ramener à un cas où le déterminant est simple.

Opérations sur une matrice et déterminant

Si M est une matrice, son déterminant ne varie pas lorsque

- nous ajoutons à l'une des lignes une combinaison linéaire des autres lignes
- nous ajoutons à l'une des colonnes une combinaison linéaire des autres colonnes

Si $L_1,\ldots,L_n$ représentent les lignes de la matrice M (chacune d'entre elles est donc une matrice-ligne), nous appelons combinaison linéaire de $L_1,\ldots,L_n$ la matrice-ligne suivante:

$$\lambda_1 L_1 + \cdots + \lambda_n L_n,$$

où $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ sont des nombres réels quelconques.

En revanche, son déterminant change de signe lorsque:

- nous échangeons deux lignes entre elles
- nous échangeons deux colonnes entre elles

Avec ces manipulations on peut transformer la matrice, en sommant à une ligne ou à une colonne une autre ligne ou colonne multipliée par un nombre réel, sans changer le déterminant.

L'intérêt est de faire apparaître des lignes ou des colonnes contenant beaucoup de 0, pour ensuite calculer facilement le déterminant.

Exemple

Ici nous remplaçons la première colonne C_1 par $C_1 - 2C_2$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -9.$$

Cette matrice est en particulier inversible.

Nous allons appliquer cette même méthode dans un instant pour résoudre des systèmes linéaires.

Contenu de la section

Calculer le déterminant et l'inverse d'une matrice sert en particulier à résoudre des équations.

Définition

- Une équation est une égalité faisant intervenir des quantités inconnues.
- Un *système d'équations* est une liste d'équations faisant intervenir des quantités inconnues (généralement nommées $x_1, \ldots, x_n$).
- Une *solution* d'un système d'équations est un élément $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que chaque égalité est vérifiée.
- Le système est *linéaire* si chaque équation est polynomiale de degré 1 en chacune des inconnues.

Exemple

Le système précédent

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$$

est un système linéaire.

Exemple

Une équation de plan dans $\mathbb{R}^3$:

$$ax+by+cz+d=0$$

est un exemple d'équation linéaire (c'est donc aussi un système).

Exemple

Les systèmes suivants ne sont pas linéaires :

$$\left\{\begin{array}{c} x^2+y=1 \\ x-y^2=2 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{c} \cos(x)+y=1 \\ \sin(x)+y^2=\pi \end{array}\right.$$

Ces systèmes sont beaucoup plus difficiles à résoudre que le système linéaire vu précédemment.

Sytèmes linéaires

Un système linéaire de k équations avec n inconnues $(x_1,\ldots,x_n)$ peut s′écrire de manière générale sous la forme :

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n = b_k \end{array}\right.$$

où les a_{ij} et b_i sont des constantes (c′est-à-dire ne dépendent pas des inconnues).

Systèmes linéaires comme produit de matrices

On peut écrire un tel système linéaire sous la forme

$$A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}.$$

où $A \in \mathbb{R}^{k\times n}$ est une matrice $k \times n$, $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^{k\times 1}$ est une matrice-colonne donnée, et $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^{1\times n}$ est la matrice-colonne des inconnues :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$$

Ceci car quand on calcule le produit matriciel entre A $(k \times n)$ et $\overrightarrow{x}$ $(n \times 1)$ on obtient une matrice de taille $k \times 1$ qui vaut:

$$A\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$$

Retour sur le produit matriciel

C'est pour représenter efficacement des équations linéaires que nous avons défini le produit matriciel « ligne par colonne »!

Définir juste un produit terme à terme ne serait pas suffisant pour écrire des systèmes linéaires sous forme de matrices (et donc les résoudre).

Contenu de la section

Comment résoudre un système linéaire? I

On considère d'abord un système carré, qui s'écrit:

$$A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b},$$

où A est une matrice carrée $n \times n$ et $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{b}$ sont des matrices-colonne $n \times 1$. On commence par le cas très simple où A est la matrice identité I_n. Alors le système s'écrit:

$$A\overrightarrow{x} = I_n\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire que le système est automatiquement résolu: les valeurs des inconnues sont $x_1 = b_1, \ldots, x_n = b_n$.

Comment résoudre un système linéaire? II

On regarde maintenant le système général d'inconnue $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$:

$$A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}.$$

(A n'est plus forcément carrée!) On l'écrit sous forme d'une *matrice augmentée*, où chaque ligne représente une équation du système :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ & & & \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} & b_k \end{array}\right]$$

Les opérations suivantes sur cette nouvelle matrice « augmentée » ne changent pas les solutions du système :

- Multiplier (ou diviser) une ligne par un réel non-nul ;
- Échanger plusieurs lignes entre elles ;
- Ajouter (ou retrancher) une combinaison linéaire des autres lignes à une ligne donnée.

La méthode du pivot de Gauss

L'idée de la méthode est la suivante: en partant de la matrice augmentée du système, on va enchaîner autant de transformations que nécessaire pour obtenir une matrice qui sera devenue la matrice identité (ou quelque chose de très proche). C'est la même idée que le calcul rapide du déterminant d'une matrice.

Car ceci ne change pas les solutions du système, qu'on pourra lire directement comme dans l'exemple précédent de la matrice identité.

Résultat

On peut résoudre de cette manière n'importe quel système linéaire!

Contenu de la section

Un exemple concret

Trouvons les solutions du système :

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=0 \\ 2x-y=\pi \end{cases}$$

Ce système s'écrit encore

$$A\overrightarrow{x}=\overrightarrow{b},$$

où

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \pi \end{pmatrix}.$$

La matrice augmentée du système est donc:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & \pi \end{array}\right]$$

On sélectionne un élément (en général sur la diagonale) qui nous servira à annuler d'autres entrées de la matrice: ce qu'on appelle un pivot.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & \pi \end{array}\right]$$

- On remplace L_2 par $L_2 - L_1$
- On remplace L_3 par $L_3 - 2L_1$

ce qui donne

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & \pi - 2 \end{array}\right].$$

Attention: à chaque étape il faut bien penser à aussi appliquer les opérations qu'on fait sur la matrice A au vecteur $\overrightarrow{b}$! (D'où l'intérêt d'écrire la matrice comme « augmentée »).

Nous choisissons le pivot suivant, toujours sur la diagonale, et recommençons :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & \pi-2 \end{array}\right].$$

- On remplace L_3 par $L_3 + 3L_2$. À cet instant, la matrice est devenue triangulaire:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & \pi-5 \end{array}\right].$$

- On continue à la transformer en l'identité: on remplace L_1 par $L_1 - L_2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & \pi-5 \end{array}\right].$$

On va maintenant faire disparaître les deux premiers éléments de la troisième colonne de la matrice.

Le pivot suivant vaut 4 et pas 1, alors nous divisons d'abord la troisième ligne par 4 :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\pi-5}{4} \end{array}\right].$$

Puis nous appliquons encore la même technique pour arriver à la matrice identité :

- $L_1 \leftarrow L_1 + L_3$
- $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3$

Il reste bien:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{\pi+3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -1 - \frac{\pi-5}{2} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{\pi-5}{4} \end{array}\right].$$

Le système de départ possède donc les mêmes solutions que le système représenté par

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{\pi+3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3-\pi}{2} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{\pi-5}{4} \end{array}\right].$$

c′est-à-dire

$$\begin{cases} x = \frac{\pi+3}{4} \\ y = \frac{3-\pi}{2} \\ z = \frac{\pi-5}{4} \end{cases}$$