# Annonce pour les étudiants en B1-INFO

**Pour les étudiants en B1-INFO seulement:** à partir de la semaine prochaine, vous serez séparés en 4 groupes d'exercices (et non plus 6), numérotés de 1 à 4.

Vous avez normalement reçu toutes les informations nécessaires de votre département, mais si vous avez des doutes sur votre groupe de TP vous devez contacter Maryka Peetroons:

Maryka.Peetroons@ulb.ac.be

## Sur le programme de la question théorique à l'examen de Janvier

La liste des questions théoriques possibles à l'examen de Janvier est disponible sur la page web du cours. La question théorique sera un des cinq (vraisemblablement) exercices de l'examen, donc un nombre de points non-négligeable.

La question théorique est une question de cours. La rédaction sera importante: on demande d'énoncer les théorèmes, propriétés, etc... de manière claire et précise.

# Sur le programme de la question théorique à l'examen de Janvier II

### Exemple

Supposons qu'on vous demande d'énoncer le théorème des accroissements finis. Alors écrire: « $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ » est une mauvaise réponse: qui est $f$? Qui est $c$?

La bonne réponse est l'énoncé vu en cours:
« Soit $f$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable dans $]a,b[$. Alors il existe un nombre $c \in ]a,b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

»

Il est inutile d'exagérer dans les détails, mais il faut donner les énoncés précis.

# Contenu de la section

# Contenu de la section

# Sytèmes linéaires

Un système linéaire de $k$ équations avec $n$ inconnues $(x_1,\dots,x_n)$ peut s′écrire de manière générale sous la forme :

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n = b_k \end{array}\right.$$

où les $a_{ij}$ et $b_i$ sont des constantes (c′est-à-dire ne dépendent pas des inconnues).

# Systèmes linéaires comme produit de matrices

On peut écrire un tel système linéaire sous la forme

$$A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}.$$

où $A \in \mathbb{R}^{k\times n}$ est une matrice $k \times n$, $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^{k\times 1}$ est une matrice-colonne donnée, et $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^{1\times n}$ est la matrice-colonne des inconnues :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$$

Ceci car quand on calcule le produit matriciel entre $A$ $(k \times n)$ et $\overrightarrow{x}$ $(n \times 1)$ on obtient une matrice de taille $k \times 1$ qui vaut:

$$A\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$$

# Contenu de la section

# Comment résoudre un système linéaire? I

On considère d'abord un système carré, qui s'écrit:

$$A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b},$$

où $A$ est une matrice carrée $n \times n$ et $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{b}$ sont des matrices-colonne $n \times 1$. On commence par le cas très simple où $A$ est la matrice identité $I_n$. Alors le système s'écrit:

$$A\overrightarrow{x} = I_n\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire que le système est automatiquement résolu: les valeurs des inconnues sont $x_1 = b_1, \dots, x_n = b_n$.

# Comment résoudre un système linéaire? II

On regarde maintenant le système général d'inconnue $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$:

$$A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}.$$

($A$ n'est plus forcément carrée!) On l'écrit sous forme d'une *matrice augmentée*, où chaque ligne représente une équation du système :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ & & & \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} & b_k \end{array}\right]$$

Les opérations suivantes sur cette nouvelle matrice « augmentée » ne changent pas les solutions du système :

- Multiplier (ou diviser) une ligne par un réel non-nul (Attention, en revanche cette opération multiplie le déterminant par ce réel) ;
- Échanger plusieurs lignes entre elles ;
- Ajouter (ou retrancher) une combinaison linéaire des autres lignes à une ligne donnée.

# La méthode du pivot de Gauss

L'idée de la méthode est la suivante: en partant de la matrice augmentée du système, on va enchaîner autant de transformations que nécessaire pour obtenir une matrice qui sera devenue la matrice identité (ou quelque chose de très proche).

Car ceci ne change pas les solutions du système, qu'on pourra lire directement comme dans l'exemple précédent de la matrice identité.

## Résultat

*On peut résoudre de cette manière n'importe quel système linéaire!*

# Contenu de la section

# Un exemple concret

Trouvons les solutions du système :

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=0 \\ 2x-y=\pi \end{cases}$$

Ce système s′écrit encore

$$A\overrightarrow{x}=\overrightarrow{b},$$

où

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \pi \end{pmatrix}.$$

La matrice augmentée du système est donc:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & \pi \end{array}\right]$$

On sélectionne un élément (en général sur la diagonale) qui nous servira à annuler d'autres entrées de la matrice: ce qu'on appelle un pivot.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & \pi \end{array}\right]$$

- On remplace $L_2$ par $L_2 - L_1$
- On remplace $L_3$ par $L_3 - 2L_1$

ce qui donne

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & \pi - 2 \end{array}\right].$$

**Attention:** à chaque étape il faut bien penser à aussi appliquer les opérations qu'on fait sur la matrice $A$ au vecteur $\overrightarrow{b}$ ! (D'où l'intérêt d'écrire la matrice comme « augmentée »).

Nous choisissons le pivot suivant et recommençons :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & \pi-2 \end{array}\right].$$

- On remplace $L_3$ par $L_3 + 3L_2$. À cet instant, la matrice est devenue triangulaire (ce serait suffisant si on voulait juste calculer le déterminant):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & \pi-5 \end{array}\right].$$

- On continue à la transformer en l'identité: on remplace $L_1$ par $L_1 - L_2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{4} & \pi-5 \end{array}\right].$$

On va maintenant faire disparaître les deux premiers éléments de la troisième colonne de la matrice en utilisant 4 comme pivot.

Le pivot vaut 4 et pas 1, alors nous divisons d'abord la troisième ligne par 4 :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\pi-5}{4} \end{array}\right].$$

Puis nous appliquons encore la même technique pour arriver à la matrice identité :

- $L_1 \leftarrow L_1 + L_3$
- $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3$

Il reste bien:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{\pi+3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -1 - \frac{\pi-5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\pi-5}{4} \end{array}\right].$$

Le système de départ possède donc les mêmes solutions que le système représenté par

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{\pi+3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3-\pi}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\pi-5}{4} \end{array}\right].$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} x = \frac{\pi+3}{4} \\ y = \frac{3-\pi}{2} \\ z = \frac{\pi-5}{4} \end{cases}$$

# Contenu de la section

# Un autre exemple

Supposons maintenant que le système soit donné par

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

Pas de pivot en ligne 2 ? Tant pis ! On divise donc $L_3$ par 2 et on l'utilise comme pivot. En faisant ensuite $L_2 \leftarrow L_2 - 4L_3$ puis $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$ il vient:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array}\right]$$

Dès lors le système devient :

$$\left\{\begin{array}{r} x+y=-1 \\ 0=0 \\ z=1 \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} x+y=-1 \\ 0=0 \\ z=1 \end{cases}$$

Ce système est particulier : la seconde équation est toujours vérifiée.

On n'a donc en réalité que deux équations pour trois inconnues. Il y a ici une *infinité* de solutions.

Les solutions sont tous les triplets de points de la forme

$$(x,-1-x,1), \quad \text{avec } x \in \mathbb{R}.$$

(ou $(-1-y,y,1)$ avec $y \in \mathbb{R}$, c'est équivalent !).

# Contenu de la section

# Opérations comme produits matriciels

Faisons un calcul en apparence naïf:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b & \lambda c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Ce calcul montre qu'une des opérations qu'on a appliquées dans la méthode du pivot de Gauss, c'est-à-dire multiplier la première ligne de la matrice par un réel $\lambda$... peut en fait s'obtenir comme un produit matriciel.

Pour multiplier la première ligne d'une matrice par $\lambda$, il suffit de multiplier cette matrice à gauche par la matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Opérations comme produits matriciels II

De la même manière, échanger les lignes s'obtient aussi comme un produit de matrices :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Et rajouter à une ligne une combinaison linéaire d'autres lignes aussi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & \mu \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d+\lambda a+\mu g & e+\lambda b+\mu h & f+\lambda c+\mu i \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Ici on a remplacé $L_2$ par $L_2 + \lambda L_1 + \mu L_3$.

# Inversion de matrices carrées avec le pivot de Gauss

## Remarque

Ainsi: les opérations utilisées dans la méthode du pivot de Gauss pour résoudre un système linéaire sont des produits matriciels. On en déduit une méthode pour inverser une matrice carrée:

- Partant d'une matrice carrée $M$, supposons avoir effectué une suite d'opérations transformant $M$ en la matrice identité.
- Notons les matrices associées à ces opérations : $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_k$. ($P_k$ est la dernière opération effectuée.)
- Ceci signifie que : $P_k \cdots P_2 P_1 M = I$.
- Et donc que $P_k \cdots P_2 P_1 = M^{-1}$ !
- Comme $P_k \cdots P_2 P_1 = P_k \cdots P_2 P_1 I$, il suffit d'appliquer la séquence d'opérations à la matrice identité elle-même pour avoir l'inverse de $M$.

# Un exemple concret

Cherchons à inverser la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nous écrivons la matrice augmentée de l'identité :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Et appliquons la méthode du pivot, en prenant soin d'appliquer simultanément à $M$ et à $I_3$ toutes les opérations qu'on effectue:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -3 & 6 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{3}{8} & \frac{-3}{4} & \frac{-1}{8} \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{8} & \frac{-3}{4} & \frac{-1}{8} \end{array}\right]$$

L′inverse de la matrice $M$ est alors ce que la matrice identité « augmentée » est devenue à la fin de toutes ces opérations, c′est-à-dire:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{4} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{4} \\ \frac{3}{8} & \frac{-3}{4} & \frac{-1}{8} \end{pmatrix}$$

# Un exercice

## Question

Calculez le déterminant de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$M$ est-elle inversible?

## Démonstration.

En remplaçant par exemple $L_3$ par $L_3 + 3L_2$ il vient:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 10 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \cdot (-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 10 & 4 \end{vmatrix} = 24.$$

Le déterminant de cette matrice est non nul, donc elle est bien inversible. □

## Exemple

Maintenant qu'on sait qu'elle est inversible, on va calculer l'inverse de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme avant, nous écrivons la matrice augmentée de l'identité :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

et appliquons la méthode du pivot. On cherche à transformer $M$ en l'identité par des transformations en prenant soin d'appliquer simultanément à $M$ et à $I_3$ toutes les opérations qu'on effectue:

On commence par multiplier la deuxième ligne par $-1$ puis par échanger les deux premières lignes:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Puis on remplace $L_3$ par $L_3 - 3L_1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & -2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 4 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

et enfin $L_3$ par $L_3 - 10L_2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 4 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & -10 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

On remplace ensuite $L_1$ par $L_1 + 2L_2$ puis on divise la dernière ligne par 24:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & -10 & 3 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{12} & \frac{1}{8} & \frac{1}{24} \end{array}\right]$$

Il reste enfin remplacer $L_2$ par $L_2 + 2L_3$ et $L_1$ par $L_1 + 5L_3$ pour trouver:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{12} & \frac{1}{8} & \frac{1}{24} \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{12} & -\frac{3}{8} & \frac{5}{24} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{12} & \frac{1}{8} & \frac{1}{24} \end{array}\right]$$

L′inverse de la matrice de départ est donc:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{12} & -\frac{3}{8} & \frac{5}{24} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{12} \\ -\frac{5}{12} & \frac{1}{8} & \frac{1}{24} \end{pmatrix}.$$

# Contenu de la section

# Contenu de la section

# Un exemple avec de la trigonométrie

## Résultat

*Soient $\theta,\beta$ des nombres réels et $A$ et $B$ définies par*

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

- *Pour tous $\theta,\beta \in \mathbb{R}$, on a $AB = BA$.*
- *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $A$ est inversible et son inverse est la matrice obtenue par $A$ en remplaçant $\theta$ par $-\theta$.*

# Démonstration.

$$AB = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\beta - \sin\theta\sin\beta & -\cos\theta\sin\beta - \sin\theta\cos\beta \\ \sin\theta\cos\beta + \cos\theta\sin\beta & -\sin\theta\sin\beta + \cos\theta\cos\beta \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\beta) & -\sin(\theta+\beta) \\ \sin(\theta+\beta) & \cos(\theta+\beta) \end{pmatrix}$$

où on a utilisé les formules donnant $\sin(\theta+\eta)$ et $\cos(\theta+\eta)$ pour la dernière égalité. (Rappel: ces formules sont à connaître).

Pour calculer $BA$ il suffit d'inverser les rôles de $\theta$ et $\eta$: on trouve donc $BA = AB$.

En particulier, si on choisit $\beta = -\theta$, on trouve $AB = BA = I_2$. Et donc la matrice $A$ admet un inverse par définition. L'inverse de $A$ est donc

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$\square$

# Interprétation géométrique

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

On peut associer à chaque matrice $A_\theta$ une transformation du plan – c'est-à-dire une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ – donnée par:

$$R_\theta : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto A_\theta \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} \cos\theta x_1 - \sin\theta x_2 \\ \sin\theta x_1 + \cos\theta x_2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

La transformation $R_\theta$ représente alors la rotation de centre O et d'angle $\theta$. Une manière de voir ça est de remarquer que l'image du point $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est exactement:

$$R_\theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}.$$

# Contenu de la section

# Applications linéaires

Soit $M$ une matrice réelle de taille $m \times n$. Elle définit une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ grâce au produit matriciel:

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^n \to & \mathbb{R}^p \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto & M \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \end{cases}$$

où on identifie la matrice-colonne $M \cdot \overrightarrow{x}$ (de taille $m \times 1$) à un vecteur de $\mathbb{R}^m$.

## Définition

Une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ définie de cette manière (à partir d'une matrice) est appelée application linéaire.

# Propriétés des applications linéaires

L'importance des applications linéaires se manifestera notamment en termes de différentielles de fonctions de plusieurs variables. Voici leur propriété principale:

### Résultat

*Soit* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *une application linéaire. Alors pour tous* $\mathbf{h},\mathbf{k} \in \mathbb{R}^n$ *et pour tous réels* $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ *on a:*

$$f\Big(\lambda\mathbf{h} + \mu\mathbf{k}\Big) = \lambda f(\mathbf{h}) + \mu f(\mathbf{k}).$$

### Démonstration.

La preuve suit de la définition en termes de produit matriciel:

$$f\Big(\lambda\mathbf{h} + \mu\mathbf{k}\Big) = M\Big(\lambda\mathbf{h} + \mu\mathbf{k}\Big) = \lambda M\mathbf{h} + \mu M\mathbf{k} = \lambda f(\mathbf{h}) + \mu f(\mathbf{k}).$$

$\square$