Fonctions de plusieurs variables

Pourquoi des fonctions de plusieurs variables?

Notre but est ici de généraliser l'étude des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ au cadre des fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, où m et n sont des entiers quelconques. C'est-à-dire des fonctions qui dépendent de n variables et qui sont à valeurs dans $\mathbb{R}^m$.

Exemple

Ces fonctions apparaissent naturellement dans des contextes physiques très différents. Par exemple, la fonction qui

- à un point du plan associe son image par la rotation d'un angle θ autour de l'origine, est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Ici on a décrit le plan par deux coordonnées, donc par $\mathbb{R}^2$.
- à un point de la terre associe la température en ce point: c'est une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$
- à un point d'une rivière associe la vitesse du courant et la température de l'eau en ce point: c'est une fonction d'une partie de $\mathbb{R}^3$ (la rivière) dans $\mathbb{R}^2$.
- ...

Contenu de la section

Fonctions d'une variable réelle à valeurs vectorielles, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$

Définition

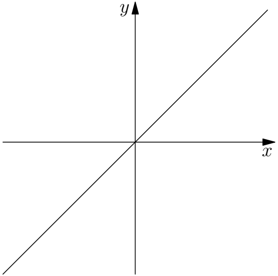
Une *fonction d'une variable réelle à valeurs vectorielles* est une fonction f définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, $n \geq 1$: $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$.

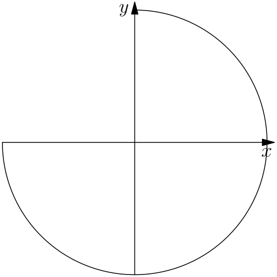
Une telle fonction décrit par exemple la trajectoire d'un point. À chaque valeur de la variable $t \in I$ correspond un point $f(t) \in \mathbb{R}^m$: on pense alors à $f(t)$ comme décrivant le déplacement du point dans $\mathbb{R}^m$ lorsque t évolue.

La valeur de n indique dans quel espace la courbe « vit » :

- Si $m = 1$, le mobile se déplace le long d'une droite ;
- si $m = 2$, le mobile se déplace dans un plan ;
- si $m = 3$, le mobile se déplace dans l'espace,
- etc.

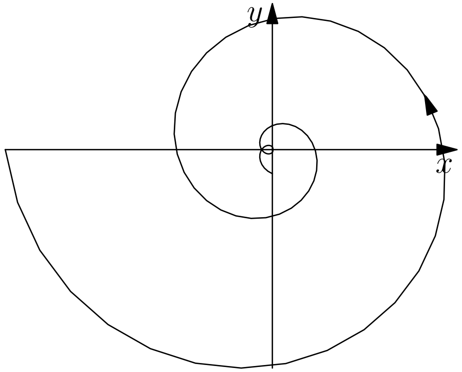
Exemple





$f : [-1,1] \to \mathbb{R} : t \mapsto (t,t)$ $\quad f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R} : t \mapsto (\cos t, \sin t)$

Dans les exemples ci-dessus, c'est l'ensemble image $\mathfrak{Im} f$ – c'est-à-dire la trajectoire du point – qui est représenté. Attention, ce n'est *pas* le graphe de f (f n'est plus une fonction réelle!).



$$f : [-5\pi, 3\pi/2] \to \mathbb{R} : t \mapsto (t^2 \cos t, t^2 \sin t)$$

Remarque

Représenter juste l'ensemble image $\mathfrak{Im} f$ – la trajectoire du mobile – ne donne pas suffisamment d'informations pour connaître le mouvement: deux trajectoire peuvent être parcourues dans des sens différents, à vitesse différente, etc...

Contenu de la section

Fonctions d'une variable réelle à valeurs vectorielles, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$

- Régularité des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$
- Courbes paramétrées
- Re-paramétrage d'une courbe paramétrée
- Longueur d'une courbe paramétrée
- Accélération et vecteur normal

Composantes de f

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ une fonction. Dire que f est à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ signifie que, pour chaque valeur de t, $f(t)$ peut être repéré par m valeurs: ses coordonnées. Nous les noterons $f_1(t), \dots, f_m(t)$. On peut en particulier écrire: pour tout $t \in I$,

$$f(t) = (f_1(t), \dots, f_m(t)).$$

Les $(f_i(t))_{1 \leq i \leq m}$ sont appelés les composantes (ou coordonnées) de la fonction f.

Il est naturel de vouloir étudier les propriétés de régularité pour des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$. Ces propriétés se déduiront entièrement des propriétés des fonctions coordonnées f_i.

Limites et continuité

Définition

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ une application, $a \in I$, et $\mathbf{L} = (L_1, \ldots, L_m) \in \mathbb{R}^m$.On dit que la limite de f en a est $\mathbf{L}$ si

$$\text{pour tout } 1 \leq i \leq m, \quad \lim_{x \to a} f_i(x) = L_i.$$

On écrit dans ce cas

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Définition

Une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ est *continue en $a \in I$* si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

La fonction f est dite *continue* si elle est continue en chaque point.

Dérivabilité

Définition

Une application $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ est dérivable en $a \in I$ si et seulement si pour tout $i = 1 \ldots m$, $f_i : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en a. Dans ce cas, la dérivée de f en a est donnée par

$$f'(a) = (f_1'(a), \ldots, f_m'(a)).$$

Attention $f'(a)$ est un élément de $\mathbb{R}^m$: c'est un vecteur. Si f est dérivable $f'(a)$ peut aussi s'obtenir comme:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{1}{x-a}\Big(f(x) - f(a)\Big),$$

en remarquant que le taux d'accroissement est désormais un vecteur de $\mathbb{R}^m$.

Contenu de la section

Fonctions d'une variable réelle à valeurs vectorielles, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$

- Régularité des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$
- Courbes paramétrées
- Re-paramétrage d'une courbe paramétrée
- Longueur d'une courbe paramétrée
- Accélération et vecteur normal

Courbes paramétrées

Définition

Une *courbe paramétrée* de $\mathbb{R}^m$ est une application dérivable

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$$

définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Une courbe paramétrée décrit la trajectoire d'un mobile au cours du temps en apportant des informations sur le mouvement du mobile.

Définition

- Le *vecteur vitesse* ou *vecteur tangent* d'une courbe paramétrée γ à l'instant t est donné par le vecteur $\gamma'(t)$.
- Sa norme $\|\gamma'(t)\|$ est parfois appelée la *vitesse numérique* à l'instant t.
- Le vecteur $\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$ est appelé *vecteur tangent unitaire* à l'instant t et est noté $T(t)$. Sa norme est toujours égale à 1.

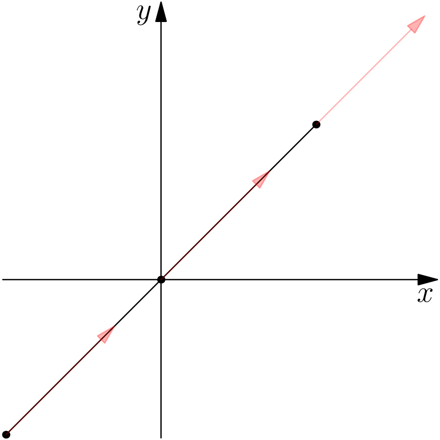
Rappel: la norme d'un vecteur $\overrightarrow{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ dans $\mathbb{R}^m$ est donnée par:

$$\|\overrightarrow{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_i^2}.$$

Elle se calcule aussi en fonction du produit scalaire comme suit:

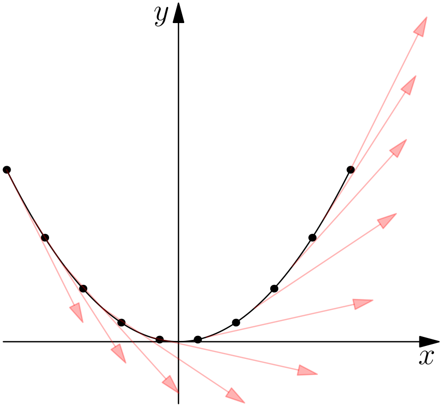
$$\|\overrightarrow{x}\|^2 = \langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{x} \rangle.$$

Exemple



$\gamma(t) = (t,t)$ donc $\gamma'(t) = (1,1)$, $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{2}$ et

$$T(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$



$\gamma(t) = (t,t^2)$, $\gamma'(t) = (1,2t)$, $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1+4t^2}$ et

$$T(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}},\frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}}\right).$$

Contenu de la section

Fonctions d'une variable réelle à valeurs vectorielles, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$

- Régularité des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$
- Courbes paramétrées
- Re-paramétrage d'une courbe paramétrée
- Longueur d'une courbe paramétrée
- Accélération et vecteur normal

Reparamétrages

On peut parcourir une trajectoire donnée de plusieurs manières :

- dans un sens ou dans l'autre,
- ou à différentes vitesses.

Ces comportements s'illustrent en changeant le paramétrage d'une courbe paramétrée:

Définition

Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^m$ une courbe paramétrée, où $I \subset \mathbb{R}$. Soit $J \subset \mathbb{R}$ un autre intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $\alpha : J \to I$ une bijection dérivable. On dit que la nouvelle courbe paramétrée

$$\eta : \begin{cases} J \to \mathbb{R}^m \\ t \mapsto \gamma \circ \alpha(t) = \gamma\big(\alpha(t)\big) \end{cases}$$

est une *re-paramétrisation* de γ. On dit que γ et η ont *même orientation* si l'application α est croissante.

Exemple de reparamétrages

On considère les deux paramétrages de la droite $y = x$:

$$\gamma(t) = (t,t), t \in \mathbb{R}, \text{ et } \quad \eta(s) = (\ln s, \ln s), s \in]0,\infty[.$$

Le reparamétrage est ici donné par $\eta = \gamma \circ \alpha$ où:

$$\alpha : \begin{cases} J =]0,+\infty[\to I = \mathbb{R} \\ s \mapsto \ln s \end{cases}$$

Dans les deux cas, la droite est parcourue en entier, car lorsque $s \to 0_+$, $\ln s \to -\infty$. Mais elle n'est pas parcourue à la même vitesse: les vecteurs vitesse sont en effet:

$$\gamma'(t) = (1,1), \quad \eta'(s) = \left(\frac{1}{s}, \frac{1}{s}\right)$$

et les vitesses instantanées sont:

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{2}, \quad \|\eta'(s)\| = \frac{\sqrt{2}}{s}.$$

Le premier paramétrage est donc parcouru à vitesse constante alors que le deuxième est parcouru de plus en plus lentement quand on augmente l'abscisse des points, c'est-à-dire quand $s \to +\infty$.

Contenu de la section

Fonctions d'une variable réelle à valeurs vectorielles, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$

- Régularité des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$
- Courbes paramétrées
- Re-paramétrage d'une courbe paramétrée
- Longueur d'une courbe paramétrée
- Accélération et vecteur normal

Longueur d'une courbe parametrée

Définition

Si $\gamma : I \to \mathbb{R}^m$ est dérivable et si $a,b \in I$, la *longueur* de la portion de courbe $\gamma([a,b])$ est donnée par l'intégrale :

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \mathrm{d}t.$$

Exemple

Le cercle trigonométrique est paramétré par:

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0,2\pi].$$

Son vecteur tangent est donné par $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$, sa vitesse instantanée par $\|\gamma'(t)\| = (\cos t)^2 + (\sin t)^2 = 1$, et donc sa longueur est donnée par:

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 1 \,\mathrm{d}t = 2\pi.$$

Contenu de la section

Fonctions d'une variable réelle à valeurs vectorielles, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$

- Régularité des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$
- Courbes paramétrées
- Re-paramétrage d'une courbe paramétrée
- Longueur d'une courbe paramétrée
- Accélération et vecteur normal

Accélération et vecteur normal

Ici $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ est une courbe paramétrée deux fois dérivable.

Définition

Le *vecteur accélération* de γ à l'instant t est le vecteur $\gamma''(t)$.

Exemple

La courbe $\gamma(t) = (t,t)$ vérifie $\gamma''(t) = (0,0)$: elle est bien parcourue à vitesse constante.

Définition

En un point où $T'(t) \neq 0$, le *vecteur normal unitaire* est donné par

$$N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}.$$

Ici $T(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$ est le vecteur tangent unitaire.

Résultat

Le vecteur normal unitaire est effectivement normal (orthogonal) au vecteur tangent T.

Démonstration.

Puisque $T(t)$ est de norme 1, on peut dériver l'égalité

$$\langle T(t), T(t) \rangle = 1$$

pour obtenir

$$\langle T'(t), T(t) \rangle + \langle T(t), T'(t) \rangle = 2\langle T'(t), T(t) \rangle = 0$$

ce qui, en divisant par 2 et par la norme de T', donne bien $\langle N(t), T(t) \rangle = 0$ comme attendu. $\square$

Remarque

Pour résumer:

- La notion de vitesse d'une courbe dépend de manière évidente du paramétrage choisi.
- La longueur d'une courbe entre deux points, en revanche, ne dépend pas du paramétrage choisi

Contenu de la section

Cas général des fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Contenu de la section

Cas général des fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Graphe

Application du plan vers la droite

Graphe d'une application

Définition

Rappelons que le graphe d'une application $f : A \to B$ est l'ensemble $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in A \times B\}$.

Lorsque $A, B \subset \mathbb{R}$, c'est-à-dire lorsque $m = n = 1$, il était naturel de dessiner cet ensemble dans le plan muni d'un repère cartésien.

Dans le cas général, on ne pourra plus dessiner le graphe de manière aussi simple: car lorsque $A \subset \mathbb{R}^n$ et $B = \mathbb{R}^m$, il faudrait pouvoir « dessiner » dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$, ce qu'on ne peut en général pas faire.

Graphe dans des cas particuliers

Notre esprit humain étant assez limité, il est impossible pour nous de voir des espaces de dimension plus grande que 3 ; ceci laisse les possibilités suivantes pour (n,m) :

- $(1,1)$: fonctions réelles (on connait bien la notion de graphe, ici)
- $(1,2)$: fonctions d'une variable réelle à valeurs dans le plan (on n'utilise pas beaucoup la notion de graphe, qui est une courbe dans l'espace)
- $(2,1)$: nouveau cas: fonctions de deux variables, à valeurs réelles. Le graphe est une surface dans l'espace.

Contenu de la section

Cas général des fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
Graphe
Application du plan vers la droite

Fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

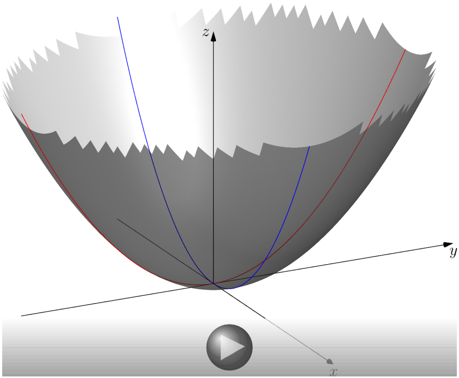
Définition

Pour une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, le graphe st

$$\Gamma_f = \{(x,y,f(x,y)) \text{ t.q. } x,y \in \operatorname{dom} f\},$$

c'est-à-dire l'ensemble des solutions de l'équation $z = f(x,y)$.

Bien souvent cet ensemble décrit une surface de l'espace (en coordonnées cartésiennes).



Exemple

Voici quelques expressions de fonctions $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, et l'interprétation géométrique du graphe :

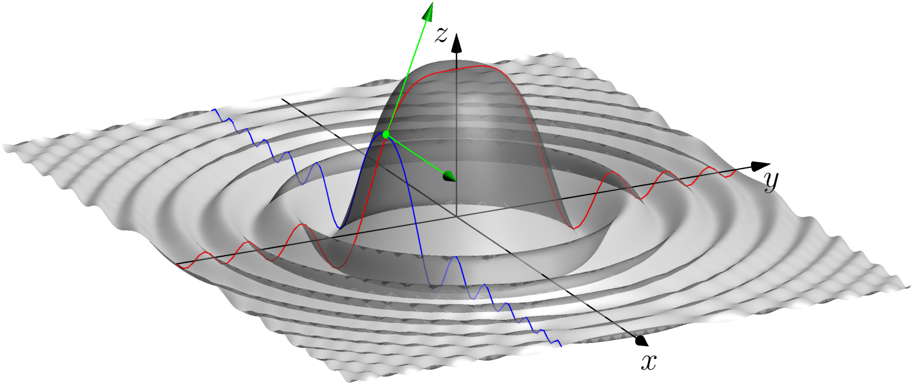
- $f(x,y) = k$, où $k \in \mathbb{R}$ est une constante : le graphe est le plan d'équation $z = k$, c'est-à-dire un plan parallèle au plan contenant les axes de coordonnées, à « hauteur » (positive ou négative) k ;
- $f(x,y) = ax + by$, où $a,b \in \mathbb{R}$ sont des constantes : le graphe est le plan d'équation $z = ax + by$;
- $f(x,y) = x^2 + y^2$: la hauteur est donnée par le carré de la distance entre (x,y) et l'origine, on appelle cela un paraboloïde de révolution ;
- $f(x,y) = \sqrt{r^2 - x^2 + y^2}$, où $r > 0$ est une constante : il s'agit d'une surface dont les points vérifient l'équation $z^2 + x^2 + y^2 = r^2$, c'est donc un morceau de la sphère centrée en l'origine de rayon r – il s'agit de l'hémisphère supérieur.

Trace d'une surface

Définition

La *trace* d'une surface dans un plan est l'intersection de la surface avec le plan.

Exemple



Dans l'exemple précédent :

- **En bleu** Une trace obtenue avec un plan dont la coordonnée y est constante.
- **En rouge** Une trace obtenue sur un plan dont la coordonnée x est constante égale à 0.
- **En vert** Les vecteurs tangents de ces courbes.

Courbes de niveau

Définition

La *courbe de niveau k* de la fonction $f : \operatorname{dom} f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est l'ensemble des points « d'altitude k »:

$$\{\mathbf{x} \in \operatorname{dom} f \text{ t.q. } f(x) = k\}.$$

(C'est la projection de la trace avec le plan horizontal d'équation $z = k$ dans le domaine.)

Contenu de la section

Limites et continuité pour les fonctions $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Régularité des fonctions $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Remarque

Comme dans le cas des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, nous allons définir divers niveaux de régularité :

- continuité
- dérivabilité (dans une direction)
- différentiabilité

Les fonctions différentiables seront les plus « agréables » des trois, et ce seront les fonctions qui retiendront notre attention.

Contenu de la section

Limites et continuité pour les fonctions $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
Limites

Une mise en garde

Contrairement au cas des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, la notion de limite ici ne se ramène pas simplement à celle vue pour les fonctions réelles. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, il y a plusieurs directions distinctes à la source: laquelle considérer?

Exemple

Soit f la fonction donnée par:

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \frac{x^2}{x^2+y^2}$$

D'une part

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{x^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

D'autre part

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

De quelle manière va-t-on donc définir la limite?

Point adhérent

Définition

Un point $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ est *adhérent* à un sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ si pour tout δ strictement positif, il existe $\mathbf{x} \in A$ tel que $\|\mathbf{a} - \mathbf{x}\| < \delta$.

On note $\operatorname{adh} A$ l'ensemble des points adhérents à A.

Rappel: $\|\mathbf{x} - a\|$ mesure, dans $\mathbb{R}^n$, la distance de $\mathbf{x}$ à a. Un point adhérent de A est donc un point qui peut être arbitrairement approché par des points de A.

Un point adhérent à A peut ne pas être dans l'ensemble A!

Exemple

0 et 1 sont points adhérents de l'intervalle ouvert $]0,1[$, mais ils ne sont pas dans l'intervalle.

Définition de limite

Définition

Considérons $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, un point $\mathbf{a} \in \operatorname{adh} A$, et un point $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^m$; on dit que la limite de f en $\mathbf{a}$ est $\mathbf{L}$ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall \mathbf{x} \in A, 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta \Rightarrow \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{L}\| < \epsilon.$$

Cette situation est notée $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{L}$.

C'est donc l'analogue de la définition vue pour les fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sauf que la norme remplace la valeur absolue.

Attention aussi à ce que les deux normes sont prises dans des espaces différents: $\|x - a\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$ et $\|f(x) - L\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^m$.

Exemple

Si $f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$, alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Démonstration.

Nous voulons montrer que pour tout $\epsilon > 0$,

$$\exists \delta > 0 : \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \|(x,y)-(0,0)\| < \delta \Rightarrow \|f(x,y)-0\| < \epsilon$$

c'est-à-dire

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow \left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| < \epsilon$$

Il s'agit de remarquer qu'on peut majorer $|x|^3$ et $|x|$ de la manière suivante: $\left|x^3\right| = |x|x^2 \leq |x|(x^2+y^2)$, et de même: $|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}$. Dès lors,

$$\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| \leq |x|\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = |x| \leq \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\|.$$

Choisissons alors $\epsilon > 0$. Alors il existe $\delta > 0$, par exemple défini par $\delta := \epsilon$, tel que si $\|(x,y)\| < \delta$, alors $|f(x,y)| \leq \|(x,y)\| < \epsilon$. Ce qui montre bien la limite cherchée. $\square$