Contenu de la section

Contenu de la section

Point adhérent: Rappel

Définition

Un point $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ est *adhérent* à un sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ si pour tout δ strictement positif, il existe $\mathbf{x} \in A$ tel que $\|\mathbf{a} - \mathbf{x}\| < \delta$.

On note $\mathrm{adh}\, A$ l'ensemble des points adhérents à A.

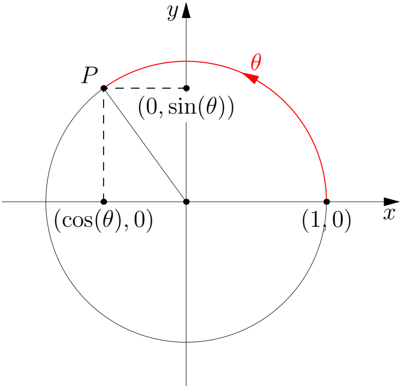
Rappel: $\|\mathbf{x} - a\|$ mesure, dans $\mathbb{R}^n$, la distance de $\mathbf{x}$ à a. Un point adhérent de A est donc un point qui peut être arbitrairement approché par des points de A.

Un point adhérent à A peut ne pas être dans l'ensemble A!

Exemple

On considère le disque unité ouvert:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x^2 + y^2 < 1\}.$$



Le bord de ce disque, qui est le cercle trigonométrique $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \text{ tels que } x^2 + y^2 = 1\}$, n'est pas dans D. Mais tous les points du bord sont des points d'adhérence de D.

En général, si $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, les points d'adhérence de A sont les points où on peut parler de limite de f (si elle existe!).

Définition de limite

Définition

Considérons $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, un point $\mathbf{a} \in \operatorname{adh} A$, et un point $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^m$; on dit que la limite de f en $\mathbf{a}$ est $\mathbf{L}$ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall \mathbf{x} \in A, 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta \Rightarrow \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{L}\| < \epsilon.$$

Cette situation est notée $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{L}$.

C'est donc l'analogue de la définition vue pour les fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sauf que la norme remplace la valeur absolue.

Attention aussi à ce que les deux normes sont prises dans des espaces différents: $\|x - a\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$ et $\|f(x) - L\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^m$.

Exemple

Si $f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$, alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Démonstration.

Nous voulons montrer que pour tout $\epsilon > 0$,

$$\exists\delta > 0 : \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \|(x,y)-(0,0)\| < \delta \Rightarrow \|f(x,y)-0\| < \epsilon$$

c'est-à-dire

$$\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0 : \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow \left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| < \epsilon$$

Il s'agit de remarquer qu'on peut majorer $|x|^3$ et $|x|$ de la manière suivante: $\left|x^3\right| = |x|x^2 \leq |x|(x^2+y^2)$, et de même: $|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}$. Dès lors,

$$\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| \leq |x|\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = |x| \leq \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\|.$$

Choisissons alors $\epsilon > 0$. Alors il existe $\delta > 0$, par exemple défini par $\delta := \epsilon$, tel que si $\|(x,y)\| < \delta$, alors $|f(x,y)| \leq \|(x,y)\| < \epsilon$. Ce qui montre bien la limite cherchée. $\square$

Contenu de la section

Continuité

Définition

Une application $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est dite continue au point $\mathbf{a}$ si

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}).$$

Globalement, f est dite continue si elle est continue en tout point de son domaine.

Remarque

Pour $n = 1$, ces définitions sont exactement les mêmes que les définitions déjà données dans les chapitres sur les fonctions réelles (où $m = 1$) et dans celui sur les courbes paramétrées (où m est quelconque).

Exemple

La fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \frac{x^3}{x^2+y^2}$$

est continue sur son domaine (ceci découle juste de la formule).

Et l'application:

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

est encore continue sur $\mathbb{R}^2$, car on a montré plus haut que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = 0.$$

Question

Montrez, en utilisant la définition, que l'application $f : (x,y) \mapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Réponse

Considérons un point $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Remarquons que

$$\|(x,y) - (a,b)\| < \delta$$

se réécrit exactement (par définition) comme:

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta.$$

Soit $\epsilon > 0$. Choisissons $\delta = \epsilon$: alors si $\|(x,y) - (a,b)\| < \delta$ on a

$$\|f(x,y) - f(a,b)\| = |x-a| = \sqrt{(x-a)^2} \leq \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta = \epsilon.$$

Ce qui prouve bien la limite cherchée.

Exercice

Montrez de même que la fonction $(x,y) \mapsto y$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Règles de calcul

Résultat (Règles de calcul)

Soient $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *deux fonctions continues en* $\mathbf{a}$*, alors*

- $f+g$, $f-g$, fg *sont continues en* $\mathbf{a}$ *;*
- *si* $g(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$*, alors* f/g *est continue en* $\mathbf{a}$*.*

Par ailleurs, si f *est continue en* $\mathbf{a}$ *et* g *est continue en* $f(\mathbf{a})$*, alors* $g \circ f$ *est continue en* $\mathbf{a}$*.*

Remarque

Ceci prouve que toutes les fonctions pour lesquelles nous avons une formule en terme des fonctions élémentaires (polynomiales, racines, trigonométriques, logarithmes) sont continues sur leur domaine.

Pour trouver des fonctions non-continues, il faudra donc regarder du côté des fonctions données « par morceaux ».

Fonctions continues et courbes paramétrées

En particulier, le résultat sur la composée des applications continues fournit le résultat suivant :

Corollaire

Soit $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *qui admet une limite* $\mathbf{L}$ *en* $\mathbf{a}$*. Alors, pour toute courbe paramétrée* $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$*, avec* $0 \in I$*, telle que* $\gamma(0) = \mathbf{a}$*, on a:*

$$\lim_{t \to 0} f(\gamma(t)) = \mathbf{L}.$$

Remarque

Ce résultat dit que si la limite existe, alors elle vaut la même valeur quelle que soit la façon dont on approche le point $\mathbf{a}$ dans $\mathbb{R}^m$ (« au départ »).

En particulier: pour trouver une fonction **non**-continue en 0 (disons), il faudra chercher une fonction qui a une limite différente en fonction de la manière dont on s'approche de 0.

Exemple

La fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \frac{x^2}{x^2+y^2}$$

est continue sur son domaine, mais

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

n'est *pas* continue. En effet, choisissons de se rapprocher de 0 en parcourant l'axe Ox: on prend donc $\gamma(t) = (t,0)$. On trouve, pour $t \neq 0$:

$$f(\gamma(t)) = f(t,0) = \frac{t^2}{t^2} = 1.$$

Choisissons ensuite de s'approche de 0 en parcourant l'axe Oy: en prenant $\eta(t) = (0,t)$. On trouve, pour $t \neq 0$:

$$f(\eta(t)) = f(0,t) = \frac{0}{0+t^2} = 0,$$

et les deux limites pour $t \to 0$ sont donc différentes.

Question

Considérons $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ étendue par 0 en l′origine, c′est-à-dire

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) = (0,0), \\ \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

f est-elle continue en 0?

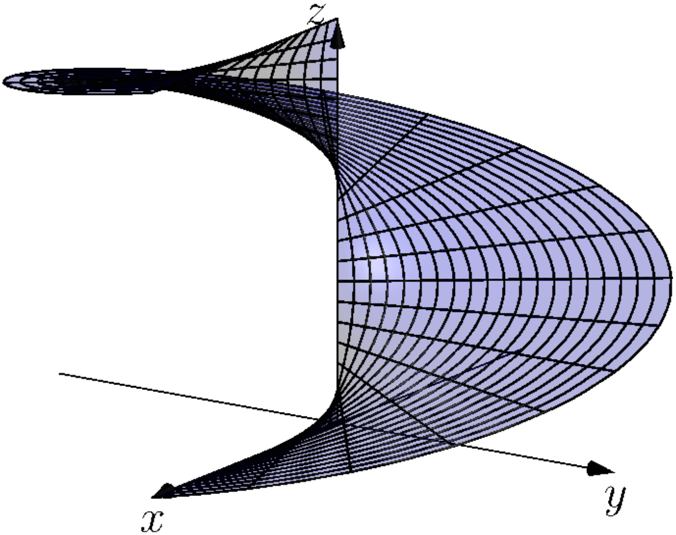
Réponse

Prenons d′abord $\gamma(t) = (t,0)$ de sorte que $f(\gamma(t)) = \frac{t \cdot 0}{x^2+0^2} = 0$ pour tout $t \neq 0$. Bien sûr $\lim_{t\to 0} f(\gamma(t)) = \lim_{t \to 0} 0 = 0$.
Prenons maintenant $\gamma(t) = (t,t)$, de sorte que $f(\gamma(t)) = \frac{1}{2}$ pour tout $t \neq 0$. La limite est désormais différente, donc f n′admet pas de limite en (0,0).

Par contre, f est continue partout ailleurs.

Exemple

Une « fonction en colimaçon » autour de l'axe des z n'est pas continue en $(0,0)$:



Contenu de la section

Une mise en garde

Remarque

Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, la notion de dérivée définie via $f(\mathbf{x}+\delta)$ n'a plus de sens, car ici $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\delta \in \mathbb{R}$.

Et même si on remplace $\delta \in \mathbb{R}$ par un vecteur $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$, vouloir définir la dérivée comme la limite du taux d'accroissement:

$$\frac{f(\mathbf{x}+\mathbf{h})-f(\mathbf{x})}{\mathbf{h}}$$

n'a pas de sens non plus, car on ne peut pas diviser par un vecteur.

On va remplacer cette définition par la notion de dérivée directionnelle: en choisissant une direction fixée, on verra f comme une fonction d'une seule variable quand on la restreint à cette direction.

Point intérieur

Définition

Un point $\mathbf{a}$ est intérieur à un ensemble A s'il existe $\epsilon > 0$ tel que $B(\mathbf{a},\epsilon) \subset A$. On note $\operatorname{int} A$ l'ensemble des points intérieurs à A.

Exemple

le point $(0,0)$ est intérieur au disque unité défini par

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Plus généralement, un point est intérieur à un ensemble si on peut « bouger un peu » autour de ce point tout en restant dans l'ensemble. Les points intérieurs sont les points où la notion de dérivée a du sens.

Contenu de la section

Dérivées directionnelles

Définition

Soit $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application, $\mathbf{a} \in \operatorname{int} A$ un point intérieur à A et $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$. La *dérivée directionnelle* de f au point $\mathbf{a}$ dans la direction $\overrightarrow{v}$, si elle existe, est l'élément de $\mathbb{R}^m$ donné par

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{v}}(\mathbf{a}) := \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\overrightarrow{v}) - f(\mathbf{a})}{t}.$$

Il existe un cas particulier très important où le vecteur $\overrightarrow{v}$ est un des vecteurs de base $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$. Si $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{e_i}$ pour un i entre 1 et n, on parle alors de la i^{e} *dérivée partielle* en a. On la note alors

- $\partial_i f(\mathbf{a})$ ou,
- $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$ ou,
- $\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a})$ (pour la première dérivée partielle), ou $\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a})$ (pour la seconde dérivée partielle), etc.

Interprétation de la dérivée directionnelle

Pour interpréter $\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{v}}(\mathbf{a})$, considérons la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ définie par
$$g(t) := f(\mathbf{a} + t\overrightarrow{v}).$$
La fonction g n'est autre que la fonction f restreinte à la droite passant par $\mathbf{a}$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{v}$. La dérivée directionnelle en $\overrightarrow{v}$ est donc la dérivée de g en 0:
$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{v}}(\mathbf{a}) = g'(0).$$

Dans le cas des dérivées partielles: ceci signifie qu'on gèle la valeur de toutes les variables $(x_1, \ldots, x_n)$ – sauf de la i-ème – et qu'on regarde les valeurs de la fonction sur l'axe Ox_i.

Calcul des dérivées partielles

Les dérivées partielles se calculent simplement. Pour une fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de trois variables (x,y,z), par exemple, la dérivée partielle de $f(x,y,z)$ par rapport à y se calcule en considérant x et z constantes, et en derivant « normalement » par rapport à y.

Exemple

Notons $f(x,y,z) = xy + x^2 + zy$. Les dérivées partielles en un point (x,y,z) sont :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = y + 2x \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x + z \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = y$$

Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto xy^2$, alors en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy.$$

On calcule la dérivée directionnelle dans la direction $(1,1)$:

$$\frac{\partial f}{\partial(1,1)}(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{f((x,y)+t(1,1)) - f(x,y)}{t} =$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{(x+t)(y+t)^2 - xy^2}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(x+t)(y^2+2yt+t^2) - xy^2}{t} =$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{x(y^2+2yt+t^2) + t(y^2+2yt+t^2) - xy^2}{t} =$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{2xyt + xt^2 + t(y^2+2yt+t^2)}{t} =$$

$$\lim_{t\to 0} \left(2xy + xt + y^2 + 2yt + t^2\right) = 2xy + y^2$$

Contenu de la section

Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto (x + yx, x^2 - y)$, alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (1 + y, 2x) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x, -1).$$

Comme dans le cas des courbes paramétrées, on peut voir f comme un couple de fonctions

$$f = (f_1, f_2), \quad f_1(x,y) = x + yx, \quad f_2(x,y) = x^2 - y.$$

Ici chaque f_i, $i = 1,2$, est une fonction $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

On écrira en particulier :

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = 1 + y \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = x$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = 2x \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = -1.$$

Matrice Jacobienne

Définition

Soit $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ qu'on ecrit comme $f = (f_1, \ldots, f_m)$, où $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. La matrice *jacobienne* de f au point $\mathbf{a} \in \operatorname{int} A$ est la matrice de taille $m \times n$ formée par les dérivées partielles de f en $\mathbf{a}$:

$$J_f(a) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Note: $f(\mathrm{x}) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$.

Lorsque $m = 1$, la jacobienne ne comporte qu'une seule ligne, et on peut donc l'assimiler à un vecteur qui est appelé le *gradient* de f au point $\mathbf{a}$:

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right) \in \mathbb{R}^n.$$

Exemple

Si $f(x,y) = x^2y^3$, les dérivées partielles en un point (a,b) de $\mathbb{R}^2$ sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 2ab^3 \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 3a^2b^2.$$

La matrice jacobienne, ou gradient ici, est donnée par

$$(2ab^3, 3a^2b^2).$$

Plus généralement, la dérivée directionnelle dans la direction (u,v) au point (a,b) est

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial (u,v)}(a,b) &= \lim_{t\to 0} \frac{f((a,b)+t(u,v)) - f(a,b)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{(a+tu)^2(b+tv)^3}{t} \\
&= 2ab^3u + 3a^2b^2v
\end{aligned}$$

(faites le calcul pour vous en convaincre!)