Équations différentielles ordinaires

Contenu de la section

Définitions

Définition

Une *équation différentielle ordinaire* (ÉDO)

Définitions

Définition

Une *équation différentielle ordinaire* (ÉDO) est une équation qui porte sur les dérivées d'une *fonction* inconnue, généralement notée y dans ce cours.

Définitions

Définition

Une *équation différentielle ordinaire* (ÉDO) est une équation qui porte sur les dérivées d'une *fonction* inconnue, généralement notée y dans ce cours. L'équation prend de manière générale la forme:

Définitions

Définition

Une *équation différentielle ordinaire* (ÉDO) est une équation qui porte sur les dérivées d'une *fonction* inconnue, généralement notée y dans ce cours. L'équation prend de manière générale la forme:

$$F(x, y, y', \dots, y^{\underline{n}}) = 0$$

Définitions

Définition

Une *équation différentielle ordinaire* (ÉDO) est une équation qui porte sur les dérivées d'une *fonction* inconnue, généralement notée y dans ce cours. L'équation prend de manière générale la forme:

$$F(x,y,y',\dots,y^{\underline{n}}) = 0$$

où F est une fonction de $n+1$ variables,

Définitions

Définition

Une *équation différentielle ordinaire* (ÉDO) est une équation qui porte sur les dérivées d'une *fonction* inconnue, généralement notée y dans ce cours. L'équation prend de manière générale la forme:

$$F(x,y,y',\ldots,y^{\underline{n}}) = 0$$

où F est une fonction de $n+1$ variables, y est la fonction inconnue

Définitions

Définition

Une *équation différentielle ordinaire* (ÉDO) est une équation qui porte sur les dérivées d'une *fonction* inconnue, généralement notée y dans ce cours. L'équation prend de manière générale la forme:

$$F(x,y,y',\ldots,y^{\underline{n}}) = 0$$

où F est une fonction de $n+1$ variables, y est la fonction inconnue et x est la variable de cette fonction.

Définitions

Définition

Une *équation différentielle ordinaire* (ÉDO) est une équation qui porte sur les dérivées d'une *fonction* inconnue, généralement notée y dans ce cours. L'équation prend de manière générale la forme:

$$F(x,y,y',\dots,y^{\underline{n}}) = 0$$

où F est une fonction de $n+1$ variables, y est la fonction inconnue et x est la variable de cette fonction.

Définition

Une *solution* de l'équation différentielle ci-dessus

Définitions

Définition

Une *équation différentielle ordinaire* (ÉDO) est une équation qui porte sur les dérivées d'une *fonction* inconnue, généralement notée y dans ce cours. L'équation prend de manière générale la forme:

$$F(x,y,y',\dots,y^{\underline{n}}) = 0$$

où F est une fonction de $n+1$ variables, y est la fonction inconnue et x est la variable de cette fonction.

Définition

Une *solution* de l'équation différentielle ci-dessus est une fonction $y : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$

Définitions

Définition

Une *équation différentielle ordinaire* (ÉDO) est une équation qui porte sur les dérivées d'une *fonction* inconnue, généralement notée y dans ce cours. L'équation prend de manière générale la forme:

$$F(x,y,y',\dots,y^{\underline{n}}) = 0$$

où F est une fonction de $n+1$ variables, y est la fonction inconnue et x est la variable de cette fonction.

Définition

Une *solution* de l'équation différentielle ci-dessus est une fonction $y : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, n fois dérivable sur cet intervalle

Définitions

Définition

Une *équation différentielle ordinaire* (ÉDO) est une équation qui porte sur les dérivées d'une *fonction* inconnue, généralement notée y dans ce cours. L'équation prend de manière générale la forme:

$$F(x,y,y',\dots,y^{\underline{n}}) = 0$$

où F est une fonction de $n+1$ variables, y est la fonction inconnue et x est la variable de cette fonction.

Définition

Une *solution* de l'équation différentielle ci-dessus est une fonction $y : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, n fois dérivable sur cet intervalle, et vérifiant

$$F(x,y(x),y'(x),\dots,y^{\underline{n}}(x)) = 0$$

pour toute valeur de $x \in I$.

Définition

Résoudre une équation différentielle, c'est trouver l'ensemble de ses solutions.

Définition

Résoudre une équation différentielle, c'est trouver l'ensemble de ses solutions.

Définition

Lorsque la dérivée de y d'ordre le plus élevé qui apparaît dans l'équation est une dérivée d'ordre n,

Définition

Résoudre une équation différentielle, c'est trouver l'ensemble de ses solutions.

Définition

Lorsque la dérivée de y d'ordre le plus élevé qui apparaît dans l'équation est une dérivée d'ordre n, on dit que l'équation est d'ordre n.

Définition

Résoudre une équation différentielle, c'est trouver l'ensemble de ses solutions.

Définition

Lorsque la dérivée de y d'ordre le plus élevé qui apparaît dans l'équation est une dérivée d'ordre n, on dit que l'équation est d'ordre n.

Remarque

Trouver l'ensemble des solutions d'une ÉDO quelconque est en général un problème très compliqué!

Définition

Résoudre une équation différentielle, c'est trouver l'ensemble de ses solutions.

Définition

Lorsque la dérivée de y d'ordre le plus élevé qui apparaît dans l'équation est une dérivée d'ordre n, on dit que l'équation est d'ordre n.

Remarque

Trouver l'ensemble des solutions d'une ÉDO quelconque est en général un problème très compliqué! Nous nous limiterons à étudier des classes particulières d'équations.

Exemples d'ÉDO

Exemple

Voici quelques exemples d'équations différentielles:

Exemples d'ÉDO

Exemple

Voici quelques exemples d'équations différentielles:

- $y'' + y = 0$: c'est une équation du deuxième ordre $(n = 2)$

Exemples d'ÉDO

Exemple

Voici quelques exemples d'équations différentielles:

- $y'' + y = 0$: c'est une équation du deuxième ordre $(n = 2)$
- $y' = ky\left(1 - \frac{y}{K}\right)$ est une équation du premier ordre $(n = 1)$: l'équation logistique

Exemples d'ÉDO

Exemple

Voici quelques exemples d'équations différentielles:

- $y'' + y = 0$: c'est une équation du deuxième ordre ($n = 2$)
- $y' = ky\left(1 - \frac{y}{K}\right)$ est une équation du premier ordre ($n = 1$): l'équation logistique
- $y' = f(x)$, où f est une fonction donnée, est une équation du premier ordre.

Exemples d'ÉDO

Exemple

Voici quelques exemples d'équations différentielles:

- $y'' + y = 0$: c'est une équation du deuxième ordre ($n = 2$)
- $y' = ky\left(1 - \frac{y}{K}\right)$ est une équation du premier ordre ($n = 1$): l'équation logistique
- $y' = f(x)$, où f est une fonction donnée, est une équation du premier ordre. Ses solutions sont toutes les primitives de f.

Exemples d'ÉDO

Exemple

Voici quelques exemples d'équations différentielles:

- $y'' + y = 0$: c'est une équation du deuxième ordre $(n = 2)$
- $y' = ky\left(1 - \frac{y}{K}\right)$ est une équation du premier ordre $(n = 1)$: l'équation logistique
- $y' = f(x)$, où f est une fonction donnée, est une équation du premier ordre. Ses solutions sont toutes les primitives de f.
- $y'y = 1$: c'est une équation du premier ordre

Exemples d'ÉDO

Exemple

Voici quelques exemples d'équations différentielles:

- $y'' + y = 0$: c'est une équation du deuxième ordre $(n = 2)$
- $y' = ky\left(1 - \frac{y}{K}\right)$ est une équation du premier ordre $(n = 1)$: l'équation logistique
- $y' = f(x)$, où f est une fonction donnée, est une équation du premier ordre. Ses solutions sont toutes les primitives de f.
- y'y = 1: c'est une équation du premier ordre
- ...

Origine et motivation

Les ÉDO sont omniprésentes en sciences:

Origine et motivation

Les ÉDO sont omniprésentes en sciences:

Exemple

L'ÉDO d'ordre 2 la plus connue est sûrement la 2ème loi de Newton:

$$mx''(t) = F(t)$$

Origine et motivation

Les ÉDO sont omniprésentes en sciences:

Exemple

L'ÉDO d'ordre 2 la plus connue est sûrement la 2ème loi de Newton:

$$mx''(t) = F(t)$$

qui exprime, au cours du mouvement, que $mx''(t)$ (l'accélération) égale la somme des forces s'exerçant au cours du mouvement.

Origine et motivation

Les ÉDO sont omniprésentes en sciences:

Exemple

L'ÉDO d'ordre 2 la plus connue est sûrement la 2ème loi de Newton:

$$mx''(t) = F(t)$$

qui exprime, au cours du mouvement, que $mx''(t)$ (l'accélération) égale la somme des forces s'exerçant au cours du mouvement. Très souvent, F dépend de $x(t)$ et $x'(t)$ (ressort, ressort amorti, etc...)

Origine et motivation

Les ÉDO sont omniprésentes en sciences:

Exemple

L'ÉDO d'ordre 2 la plus connue est sûrement la 2ème loi de Newton:

$$mx''(t) = F(t)$$

qui exprime, au cours du mouvement, que $mx''(t)$ (l'accélération) égale la somme des forces s'exerçant au cours du mouvement. Très souvent, F dépend de $x(t)$ et $x'(t)$ (ressort, ressort amorti, etc...)

Exemple

Les modèles de croissance de populations font intervenir des ÉDO.

Origine et motivation

Les ÉDO sont omniprésentes en sciences:

Exemple

L'ÉDO d'ordre 2 la plus connue est sûrement la 2ème loi de Newton:

$$mx''(t) = F(t)$$

qui exprime, au cours du mouvement, que $mx''(t)$ (l'accélération) égale la somme des forces s'exerçant au cours du mouvement. Très souvent, F dépend de $x(t)$ et $x'(t)$ (ressort, ressort amorti, etc...)

Exemple

Les modèles de croissance de populations font intervenir des ÉDO. Imaginons une population d'individus (cellules, lapins, ...)

Origine et motivation

Les ÉDO sont omniprésentes en sciences:

Exemple

L'ÉDO d'ordre 2 la plus connue est sûrement la 2ème loi de Newton:

$$mx''(t) = F(t)$$

qui exprime, au cours du mouvement, que $mx''(t)$ (l'accélération) égale la somme des forces s'exerçant au cours du mouvement. Très souvent, F dépend de $x(t)$ et $x'(t)$ (ressort, ressort amorti, etc...)

Exemple

Les modèles de croissance de populations font intervenir des ÉDO. Imaginons une population d'individus (cellules, lapins, ...) dont le nombre $y(t)$ varie à la fois proportionnellement au nombre d'individus existants

Origine et motivation

Les ÉDO sont omniprésentes en sciences:

Exemple

L'ÉDO d'ordre 2 la plus connue est sûrement la 2ème loi de Newton:

$$mx''(t) = F(t)$$

qui exprime, au cours du mouvement, que $mx''(t)$ (l'accélération) égale la somme des forces s'exerçant au cours du mouvement. Très souvent, F dépend de $x(t)$ et $x'(t)$ (ressort, ressort amorti, etc...)

Exemple

Les modèles de croissance de populations font intervenir des ÉDO. Imaginons une population d'individus (cellules, lapins, ...) dont le nombre $y(t)$ varie à la fois proportionnellement au nombre d'individus existants ET à l'écart avec le nombre maximal d'individus autorisés:

Origine et motivation

Les ÉDO sont omniprésentes en sciences:

Exemple

L'ÉDO d'ordre 2 la plus connue est sûrement la 2ème loi de Newton:

$$mx''(t) = F(t)$$

qui exprime, au cours du mouvement, que $mx''(t)$ (l'accélération) égale la somme des forces s'exerçant au cours du mouvement. Très souvent, F dépend de $x(t)$ et $x'(t)$ (ressort, ressort amorti, etc...)

Exemple

Les modèles de croissance de populations font intervenir des ÉDO. Imaginons une population d'individus (cellules, lapins, ...) dont le nombre $y(t)$ varie à la fois proportionnellement au nombre d'individus existants ET à l'écart avec le nombre maximal d'individus autorisés:

$$y'(t) = Ay(t)\Big(K - y(t)\Big).$$

C'est l'équation logistique qu'on étudiera plus tard.

Contenu de la section

Conditions supplémentaires

Remarque

En général, une équation différentielle admet plusieurs solutions – souvent une infinité.

Conditions supplémentaires

Remarque

En général, une équation différentielle admet plusieurs solutions – souvent une infinité. Résoudre une équation différentielle, cela revient à trouver toutes les solutions.

Conditions supplémentaires

Remarque

En général, une équation différentielle admet plusieurs solutions – souvent une infinité. Résoudre une équation différentielle, cela revient à trouver toutes les solutions.

Le plus souvent, on cherche uniquement une ou plusieurs *solutions particulières* vérifiant certaines conditions supplémentaires.

Conditions supplémentaires

Remarque

En général, une équation différentielle admet plusieurs solutions – souvent une infinité. Résoudre une équation différentielle, cela revient à trouver toutes les solutions.

Le plus souvent, on cherche uniquement une ou plusieurs *solutions particulières* vérifiant certaines conditions supplémentaires.

Exemple

Trouver l'ensemble des solutions de l'équation $y' = x \exp(-y)$ vérifiant $y(0) = 0$.

Conditions supplémentaires

Remarque

En général, une équation différentielle admet plusieurs solutions – souvent une infinité. Résoudre une équation différentielle, cela revient à trouver toutes les solutions.

Le plus souvent, on cherche uniquement une ou plusieurs *solutions particulières* vérifiant certaines conditions supplémentaires.

Exemple

Trouver l'ensemble des solutions de l'équation $y' = x \exp(-y)$ vérifiant $y(0) = 0$.
Ici, on ne cherche pas toutes les solutions : seulement celles qui s'annulent en $x = 0$.

Problème de Cauchy

Définition

Un problème de Cauchy

Problème de Cauchy

Définition

Un problème de Cauchy est la donnée d'une ÉDO d'ordre $n \geq 1$

$$F(x,y,y',\ldots,y^{\underline{n}})$$

définie sur un intervalle I,

Problème de Cauchy

Définition

Un problème de Cauchy est la donnée d'une ÉDO d'ordre $n \geq 1$

$$F(x, y, y', \ldots, y^{\underline{n}})$$

définie sur un intervalle I, d'un point $x_0 \in I$,

Problème de Cauchy

Définition

Un problème de Cauchy est la donnée d'une ÉDO d'ordre $n \geq 1$

$$F(x,y,y',\ldots,y^{\underline{n}})$$

définie sur un intervalle I, d'un point $x_0 \in I$, et d'une condition initiale en x_0:

Problème de Cauchy

Définition

Un problème de Cauchy est la donnée d'une ÉDO d'ordre $n \geq 1$

$$F(x,y,y',\dots,y^{\underline{n}})$$

définie sur un intervalle I, d'un point $x_0 \in I$, et d'une condition initiale en x_0:

$$y(x_0) = y_0,$$

Problème de Cauchy

Définition

Un problème de Cauchy est la donnée d'une ÉDO d'ordre $n \geq 1$

$$F(x,y,y',\dots,y^{\underline{n}})$$

définie sur un intervalle I, d'un point $x_0 \in I$, et d'une condition initiale en x_0:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0,$$

Problème de Cauchy

Définition

Un problème de Cauchy est la donnée d'une ÉDO d'ordre $n \geq 1$

$$F(x,y,y',\ldots,y^{\underline{n}})$$

définie sur un intervalle I, d'un point $x_0 \in I$, et d'une condition initiale en x_0:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad \ldots,$$

Problème de Cauchy

Définition

Un problème de Cauchy est la donnée d'une ÉDO d'ordre $n \geq 1$

$$F(x,y,y',\dots,y^{\underline{n}})$$

définie sur un intervalle I, d'un point $x_0 \in I$, et d'une condition initiale en x_0:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad \dots, \quad y^{\underline{n-1}}(x_0) = y_0^{\underline{n-1}},$$

Problème de Cauchy

Définition

Un problème de Cauchy est la donnée d'une ÉDO d'ordre $n \geq 1$

$$F(x,y,y',\dots,y^{\underline{n}})$$

définie sur un intervalle I, d'un point $x_0 \in I$, et d'une condition initiale en x_0:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad \dots, \quad y^{\underline{n-1}}(x_0) = y_0^{\underline{n-1}},$$

où $(y_0,y_0',\dots,y_0^{\underline{n-1}})$ sont des constantes données.

Problème de Cauchy

Définition

Un problème de Cauchy est la donnée d'une ÉDO d'ordre $n \geq 1$

$$F(x,y,y',\dots,y^{\underline{n}})$$

définie sur un intervalle I, d'un point $x_0 \in I$, et d'une condition initiale en x_0:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad \dots, \quad y^{\underline{n-1}}(x_0) = y_0^{\underline{n-1}},$$

où $(y_0, y_0', \dots, y_0^{\underline{n-1}})$ sont des constantes données.

Un problème de Cauchy consiste donc à chercher les solutions d'une ÉDO

Problème de Cauchy

Définition

Un problème de Cauchy est la donnée d'une ÉDO d'ordre $n \geq 1$

$$F(x,y,y',\ldots,y^{\underline{n}})$$

définie sur un intervalle I, d'un point $x_0 \in I$, et d'une condition initiale en x_0:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad \ldots, \quad y^{\underline{n-1}}(x_0) = y_0^{\underline{n-1}},$$

où $(y_0,y_0',\ldots,y_0^{\underline{n-1}})$ sont des constantes données.

Un problème de Cauchy consiste donc à chercher les solutions d'une ÉDO dont les valeurs de $y,y',\ldots,y^{\underline{n-1}}$ sont imposées à l'avance en un point donné x_0.

Problème de Cauchy

Définition

Un problème de Cauchy est la donnée d'une ÉDO d'ordre $n \geq 1$

$$F(x,y,y',\dots,y^{\underline{n}})$$

définie sur un intervalle I, d'un point $x_0 \in I$, et d'une condition initiale en x_0:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad \dots, \quad y^{\underline{n-1}}(x_0) = y_0^{\underline{n-1}},$$

où $(y_0,y_0',\dots,y_0^{\underline{n-1}})$ sont des constantes données.

Un problème de Cauchy consiste donc à chercher les solutions d'une ÉDO dont les valeurs de $y,y',\dots,y^{\underline{n-1}}$ sont imposées à l'avance en un point donné x_0. Il y a toujours n conditions initiales pour un problème d'ordre n.

Problème de Cauchy

Définition

Un problème de Cauchy est la donnée d'une ÉDO d'ordre $n \geq 1$

$$F(x,y,y',\dots,y^{\underline{n}})$$

définie sur un intervalle I, d'un point $x_0 \in I$, et d'une condition initiale en x_0:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad \dots, \quad y^{\underline{n-1}}(x_0) = y_0^{\underline{n-1}},$$

où $(y_0,y_0',\dots,y_0^{\underline{n-1}})$ sont des constantes données.

Un problème de Cauchy consiste donc à chercher les solutions d'une ÉDO dont les valeurs de $y,y',\dots,y^{\underline{n-1}}$ sont imposées à l'avance en un point donné x_0. Il y a toujours n conditions initiales pour un problème d'ordre n.

Remarque

Dans les cas que nous rencontrerons il y aura toujours une unique solution pour chaque problème de Cauchy donné.

Contenu de la section

Contenu de la section

3 ÉDO du premier ordre
- Forme normale
- Interprétation géométrique
- Équations à variables séparables

Définition

Rappel

Une équation du premier ordre est une équation pouvant faire intervenir y, y', et x.

Définition

Rappel

Une équation du premier ordre est une équation pouvant faire intervenir y, y', et x.

Définition

Une équation du premier ordre est *sous forme normale* si elle s'écrit

Définition

Rappel

Une équation du premier ordre est une équation pouvant faire intervenir y, y', et x.

Définition

Une équation du premier ordre est *sous forme normale* si elle s'écrit

$$y' = f(x,y)$$

pour une certaine fonction continue f.

Définition

Rappel

Une équation du premier ordre est une équation pouvant faire intervenir y, y', et x.

Définition

Une équation du premier ordre est *sous forme normale* si elle s'écrit

$$y' = f(x,y)$$

pour une certaine fonction continue f.

Exemple

- L'équation $y' = xy$ est sous forme normale ;

Définition

Rappel

Une équation du premier ordre est une équation pouvant faire intervenir y, y', et x.

Définition

Une équation du premier ordre est *sous forme normale* si elle s'écrit

$$y' = f(x,y)$$

pour une certaine fonction continue f.

Exemple

- L'équation $y' = xy$ est sous forme normale ;
- l'équation $yy' = x$ ne l'est pas.

Contenu de la section

Interprétation géométrique

Supposons avoir une solution $y : I \to \mathbb{R}$ de l'équation $y' = f(x,y)$,

Interprétation géométrique

Supposons avoir une solution $y : I \to \mathbb{R}$ de l'équation $y' = f(x,y)$, c'est-à-dire que

$$y'(x) = f\big(x,y(x)\big)$$

en tout point x de l'intervalle de définition de y.

Interprétation géométrique

Supposons avoir une solution $y : I \to \mathbb{R}$ de l'équation $y' = f(x,y)$, c'est-à-dire que

$$y'(x) = f\big(x,y(x)\big)$$

en tout point x de l'intervalle de définition de y. Considérons le point $(x,y(x))$ du graphe de y.

Interprétation géométrique

Supposons avoir une solution $y : I \to \mathbb{R}$ de l'équation $y' = f(x,y)$, c'est-à-dire que

$$y'(x) = f\big(x,y(x)\big)$$

en tout point x de l'intervalle de définition de y. Considérons le point $(x,y(x))$ du graphe de y. En ce point, le graphe admet une tangente dont la pente est $y'(x)$:

Interprétation géométrique

Supposons avoir une solution $y : I \to \mathbb{R}$ de l'équation $y' = f(x,y)$, c'est-à-dire que

$$y'(x) = f\big(x, y(x)\big)$$

en tout point x de l'intervalle de définition de y. Considérons le point $(x, y(x))$ du graphe de y. En ce point, le graphe admet une tangente dont la pente est $y'(x)$: c'est-à-dire $f(x, y(x))$ (car y vérifie l'ÉDO).

Interprétation géométrique

Supposons avoir une solution $y : I \to \mathbb{R}$ de l'équation $y' = f(x,y)$, c'est-à-dire que

$$y'(x) = f\big(x,y(x)\big)$$

en tout point x de l'intervalle de définition de y. Considérons le point $(x,y(x))$ du graphe de y. En ce point, le graphe admet une tangente dont la pente est $y'(x)$: c'est-à-dire $f(x,y(x))$ (car y vérifie l'ÉDO).

En d'autres termes: la pente d'une solution de l'équation différentielle ne dépend que du point du plan en lequel cette solution passe.

Interprétation géométrique

Supposons avoir une solution $y : I \to \mathbb{R}$ de l'équation $y' = f(x,y)$, c'est-à-dire que

$$y'(x) = f\big(x,y(x)\big)$$

en tout point x de l'intervalle de définition de y. Considérons le point $(x,y(x))$ du graphe de y. En ce point, le graphe admet une tangente dont la pente est $y'(x)$: c'est-à-dire $f(x,y(x))$ (car y vérifie l'ÉDO).

En d'autres termes: la pente d'une solution de l'équation différentielle ne dépend que du point du plan en lequel cette solution passe.

Nous pouvons alors, pour chaque point (x,y) du plan, dessiner la tangente que devrait avoir une solution passant par ce point:

Interprétation géométrique

Supposons avoir une solution $y : I \to \mathbb{R}$ de l'équation $y' = f(x,y)$, c'est-à-dire que

$$y'(x) = f\big(x,y(x)\big)$$

en tout point x de l'intervalle de définition de y. Considérons le point $(x,y(x))$ du graphe de y. En ce point, le graphe admet une tangente dont la pente est $y'(x)$: c'est-à-dire $f(x,y(x))$ (car y vérifie l'ÉDO).

En d'autres termes: la pente d'une solution de l'équation différentielle ne dépend que du point du plan en lequel cette solution passe.

Nous pouvons alors, pour chaque point (x,y) du plan, dessiner la tangente que devrait avoir une solution passant par ce point: c'est-à-dire représenter le vecteur

$$\big(1,f(x,y)\big).$$

Interprétation géométrique

Supposons avoir une solution $y : I \to \mathbb{R}$ de l'équation $y' = f(x,y)$, c'est-à-dire que

$$y'(x) = f\big(x,y(x)\big)$$

en tout point x de l'intervalle de définition de y. Considérons le point $(x,y(x))$ du graphe de y. En ce point, le graphe admet une tangente dont la pente est $y'(x)$: c'est-à-dire $f(x,y(x))$ (car y vérifie l'ÉDO).

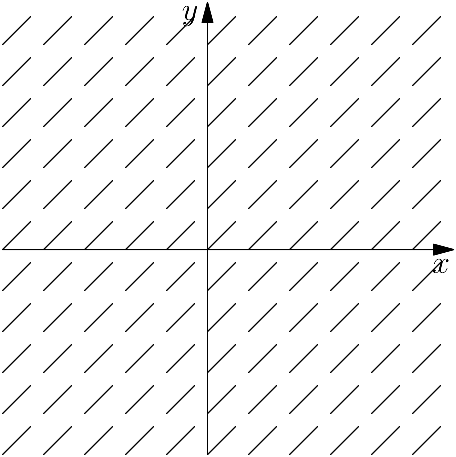
En d'autres termes: la pente d'une solution de l'équation différentielle ne dépend que du point du plan en lequel cette solution passe.

Nous pouvons alors, pour chaque point (x,y) du plan, dessiner la tangente que devrait avoir une solution passant par ce point: c'est-à-dire représenter le vecteur

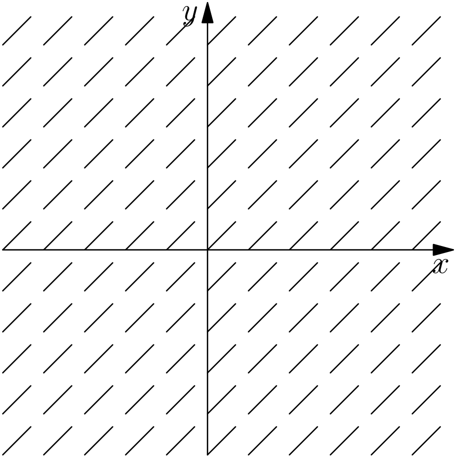
$$\big(1,f(x,y)\big).$$

Ceci donne lieu à un *champ des pentes* (encore appelé champ de vecteurs).

Champ des pentes pour l'équation $y' = 1$

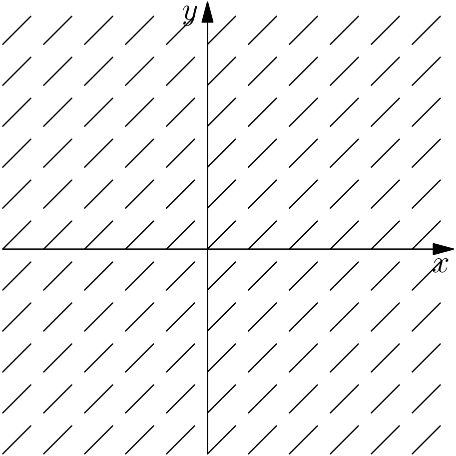


Champ des pentes pour l'équation $y' = 1$



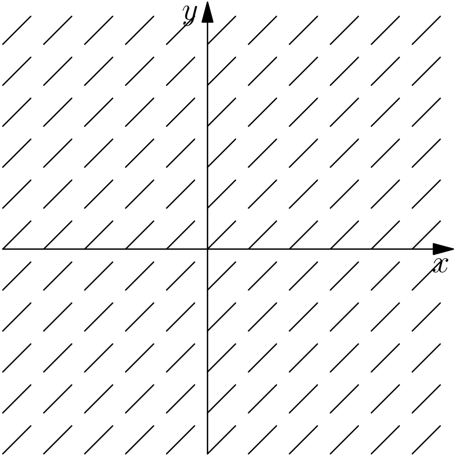
On regarde l'équation
$$y' = 1.$$

Champ des pentes pour l'équation $y' = 1$



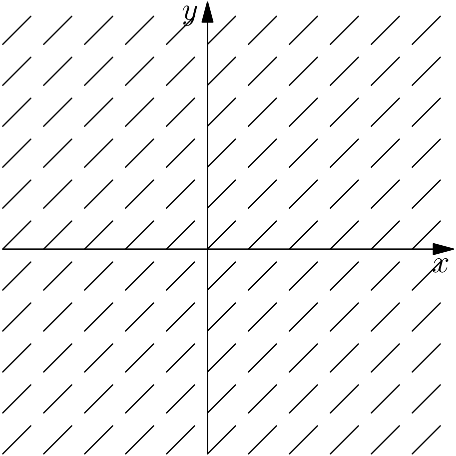
On regarde l'équation
$$y' = 1.$$
On a donc représenté le vecteur $(1,1)$ en tout point.

Champ des pentes pour l'équation $y' = 1$



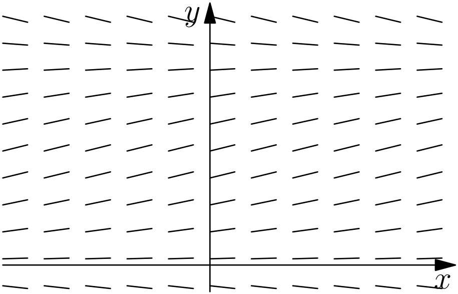
On regarde l'équation
$$y' = 1.$$
On a donc représenté le vecteur $(1,1)$ en tout point. Ici les solutions sont toutes les fonctions
$$y(x) = x + C.$$

Champ des pentes pour l'équation $y' = 1$

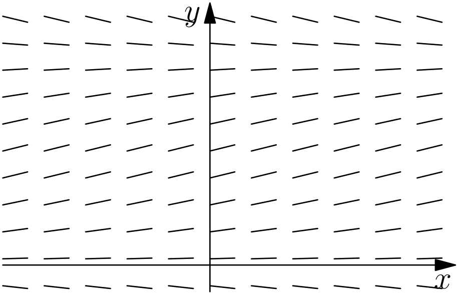


On regarde l'équation
$$y' = 1.$$
On a donc représenté le vecteur $(1,1)$ en tout point. Ici les solutions sont toutes les fonctions
$$y(x) = x + C.$$
Le champ de tangentes correspond aux dérivées de ces fonctions en tout point.

Champ des pentes pour l'équation $y' = y(1 - y)$



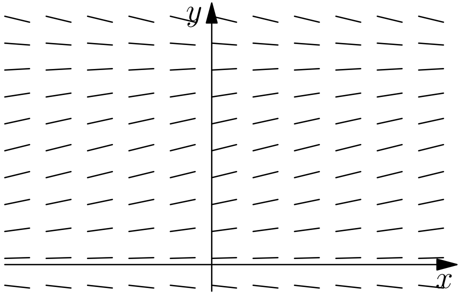
Champ des pentes pour l'équation $y' = y(1 - y)$



On regarde l'équation:

$$y' = y(1 - y).$$

Champ des pentes pour l'équation $y' = y(1-y)$



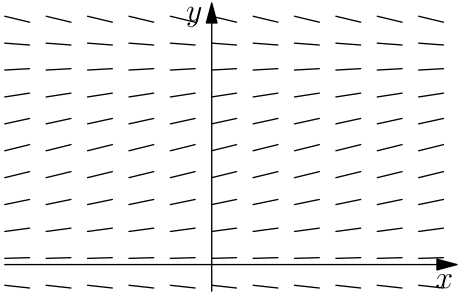
On regarde l'équation:

$$y' = y(1-y).$$

En un point (x,y) on a donc représenté le vecteur

$$(1, y(1-y)).$$

Champ des pentes pour l'équation $y' = y(1-y)$



On regarde l'équation:

$$y' = y(1-y).$$

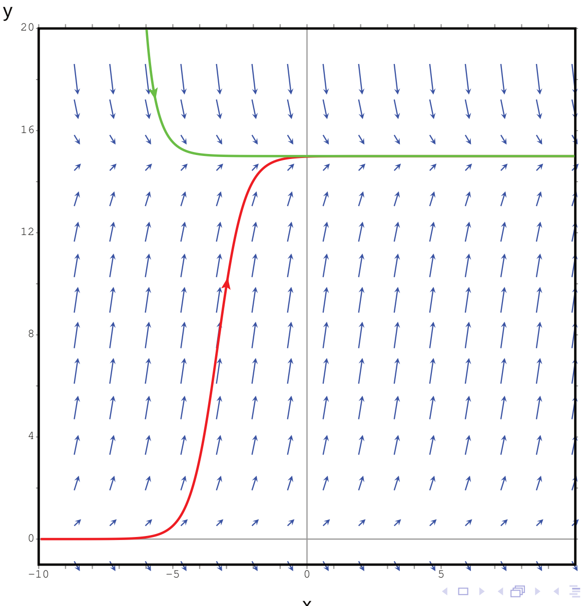
En un point (x,y) on a donc représenté le vecteur

$$(1, y(1-y)).$$

On ne connaît pas explicitement toutes les solutions de cette ÉDO ici, mais le champ de tangentes nous donne quand même une idée de l'allure des graphes des solutions.

De la sorte, une solution de l'ÉDO est une courbe qui reste tangente aux pentes en chacun des points par lesquels elle passe :

De la sorte, une solution de l'ÉDO est une courbe qui reste tangente aux pentes en chacun des points par lesquels elle passe :



Contenu de la section

Équations à variables séparables: la théorie

Définition

Si une ÉDO peut s'écrire sous la forme $q(y)y' + p(x) = 0$ pour certaines fonctions p et q données,

Équations à variables séparables: la théorie

Définition

Si une ÉDO peut s'écrire sous la forme $q(y)y' + p(x) = 0$ pour certaines fonctions p et q données, on dit que l'équation est *à variables séparées*.

Équations à variables séparables: la théorie

Définition

Si une ÉDO peut s'écrire sous la forme $q(y)y' + p(x) = 0$ pour certaines fonctions p et q données, on dit que l'équation est *à variables séparées.*

Attention: dans ce cas l'équation n'est pas sous forme normale;

Équations à variables séparables: la théorie

Définition

Si une ÉDO peut s'écrire sous la forme $q(y)y' + p(x) = 0$ pour certaines fonctions p et q données, on dit que l'équation est *à variables séparées.*

Attention: dans ce cas l'équation n'est pas sous forme normale; on dit qu'elle est sous forme séparée.

Équations à variables séparables: la théorie

Définition

Si une ÉDO peut s'écrire sous la forme $q(y)y' + p(x) = 0$ pour certaines fonctions p et q données, on dit que l'équation est *à variables séparées.*

Attention: dans ce cas l'équation n'est pas sous forme normale; on dit qu'elle est sous forme séparée.

Il existe une méthode générale pour résoudre de telles équations:

Équations à variables séparables: la théorie

Définition

Si une ÉDO peut s'écrire sous la forme $q(y)y' + p(x) = 0$ pour certaines fonctions p et q données, on dit que l'équation est *à variables séparées.*

Attention: dans ce cas l'équation n'est pas sous forme normale; on dit qu'elle est sous forme séparée.

Il existe une méthode générale pour résoudre de telles équations:

Soient P et Q des primitives de p et q, respectivement.

Équations à variables séparables: la théorie

Définition

Si une ÉDO peut s'écrire sous la forme $q(y)y' + p(x) = 0$ pour certaines fonctions p et q données, on dit que l'équation est *à variables séparées.*

Attention: dans ce cas l'équation n'est pas sous forme normale; on dit qu'elle est sous forme séparée.
Il existe une méthode générale pour résoudre de telles équations:
Soient P et Q des primitives de p et q, respectivement. Alors la dérivée de $Q(y(x)) + P(x)$ vaut:

$$\Big(Q(y) + P\Big)'(x)$$

Équations à variables séparables: la théorie

Définition

Si une ÉDO peut s'écrire sous la forme $q(y)y' + p(x) = 0$ pour certaines fonctions p et q données, on dit que l'équation est *à variables séparées.*

Attention: dans ce cas l'équation n'est pas sous forme normale; on dit qu'elle est sous forme séparée.

Il existe une méthode générale pour résoudre de telles équations: Soient P et Q des primitives de p et q, respectivement. Alors la dérivée de $Q(y(x)) + P(x)$ vaut:

$$\Big(Q(y) + P\Big)'(x) = q(y(x))y'(x) + p(x)$$

Équations à variables séparables: la théorie

Définition

Si une ÉDO peut s'écrire sous la forme $q(y)y' + p(x) = 0$ pour certaines fonctions p et q données, on dit que l'équation est *à variables séparées.*

Attention: dans ce cas l'équation n'est pas sous forme normale; on dit qu'elle est sous forme séparée.
Il existe une méthode générale pour résoudre de telles équations:
Soient P et Q des primitives de p et q, respectivement. Alors la dérivée de $Q(y(x)) + P(x)$ vaut:

$$\Big(Q(y) + P\Big)'(x) = q(y(x))y'(x) + p(x) = 0$$

d'après l'équation.

Équations à variables séparables: la théorie

Définition

Si une ÉDO peut s'écrire sous la forme $q(y)y' + p(x) = 0$ pour certaines fonctions p et q données, on dit que l'équation est *à variables séparées.*

Attention: dans ce cas l'équation n'est pas sous forme normale; on dit qu'elle est sous forme séparée.

Il existe une méthode générale pour résoudre de telles équations: Soient P et Q des primitives de p et q, respectivement. Alors la dérivée de $Q(y(x)) + P(x)$ vaut:

$$\Big(Q(y) + P\Big)'(x) = q(y(x))y'(x) + p(x) = 0$$

d'après l'équation. Dès lors il existe une constante réelle C telle que:

$$Q(y(x)) + P(x) = C.$$

Équations à variables séparables: la théorie

Définition

Si une ÉDO peut s'écrire sous la forme $q(y)y' + p(x) = 0$ pour certaines fonctions p et q données, on dit que l'équation est *à variables séparées.*

Attention: dans ce cas l'équation n'est pas sous forme normale; on dit qu'elle est sous forme séparée.
Il existe une méthode générale pour résoudre de telles équations: Soient P et Q des primitives de p et q, respectivement. Alors la dérivée de $Q(y(x)) + P(x)$ vaut:

$$\Big(Q(y) + P\Big)'(x) = q(y(x))y'(x) + p(x) = 0$$

d'après l'équation. Dès lors il existe une constante réelle C telle que:

$$Q(y(x)) + P(x) = C.$$

À partir de cette relation, il « suffit » ensuite de résoudre l'équation pour exprimer $y(x)$ en fonction de x.

Équations à variables séparables: la théorie

Définition

Si une ÉDO peut s'écrire sous la forme $q(y)y' + p(x) = 0$ pour certaines fonctions p et q données, on dit que l'équation est *à variables séparées.*

Attention: dans ce cas l'équation n'est pas sous forme normale; on dit qu'elle est sous forme séparée.
Il existe une méthode générale pour résoudre de telles équations:
Soient P et Q des primitives de p et q, respectivement. Alors la dérivée de $Q(y(x)) + P(x)$ vaut:

$$\Big(Q(y) + P\Big)'(x) = q(y(x))y'(x) + p(x) = 0$$

d'après l'équation. Dès lors il existe une constante réelle C telle que:

$$Q(y(x)) + P(x) = C.$$

À partir de cette relation, il « suffit » ensuite de résoudre l'équation pour exprimer $y(x)$ en fonction de x. Ceci se fait au cas par cas.

Et en pratique?

Exemple

Considérons l'équation

$$yy' + x = 0$$

Et en pratique?

Exemple

Considérons l'équation

$$yy' + x = 0 \quad \Longleftrightarrow$$

Et en pratique?

Exemple

Considérons l'équation

$$yy' + x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad q(y)y' + p(x) = 0,$$

Et en pratique?

Exemple

Considérons l'équation

$$yy' + x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad q(y)y' + p(x) = 0,$$

avec $q(y) = y$ et $p(x) = x$.

Et en pratique?

Exemple

Considérons l'équation

$$yy' + x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad q(y)y' + p(x) = 0,$$

avec $q(y) = y$ et $p(x) = x$. Des primitives de p et q sont respectivement:

$$Q(y) = \frac{1}{2}y^2 \quad \text{et} \quad P(x) = \frac{1}{2}x^2.$$

Et en pratique?

Exemple

Considérons l'équation

$$yy' + x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad q(y)y' + p(x) = 0,$$

avec $q(y) = y$ et $p(x) = x$. Des primitives de p et q sont respectivement:

$$Q(y) = \frac{1}{2}y^2 \quad \text{et} \quad P(x) = \frac{1}{2}x^2.$$

L'équation se réécrit donc comme:

$$\left(\frac{1}{2}(y(x))^2 + \frac{1}{2}x^2\right)' = 0,$$

Et en pratique?

Exemple

Considérons l'équation

$$yy' + x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad q(y)y' + p(x) = 0,$$

avec $q(y) = y$ et $p(x) = x$. Des primitives de p et q sont respectivement:

$$Q(y) = \frac{1}{2}y^2 \quad \text{et} \quad P(x) = \frac{1}{2}x^2.$$

L'équation se récrit donc comme:

$$\left(\frac{1}{2}(y(x))^2 + \frac{1}{2}x^2\right)' = 0,$$

ce qui signifie qu'il existe une constante K telle que

$$y(x)^2 + x^2 = 2K.$$

Et en pratique?

Exemple

Considérons l'équation

$$yy' + x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad q(y)y' + p(x) = 0,$$

avec $q(y) = y$ et $p(x) = x$. Des primitives de p et q sont respectivement:

$$Q(y) = \frac{1}{2}y^2 \quad \text{et} \quad P(x) = \frac{1}{2}x^2.$$

L'équation se récrit donc comme:

$$\left(\frac{1}{2}(y(x))^2 + \frac{1}{2}x^2\right)' = 0,$$

ce qui signifie qu'il existe une constante K telle que

$$y(x)^2 + x^2 = 2K.$$

On trouve donc, lorsque cette formule a un sens, $y(x) = \pm\sqrt{2K - x^2}$,

Et en pratique?

Exemple

Considérons l'équation

$$yy' + x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad q(y)y' + p(x) = 0,$$

avec $q(y) = y$ et $p(x) = x$. Des primitives de p et q sont respectivement:

$$Q(y) = \frac{1}{2}y^2 \quad \text{et} \quad P(x) = \frac{1}{2}x^2.$$

L'équation se récrit donc comme:

$$\left(\frac{1}{2}(y(x))^2 + \frac{1}{2}x^2\right)' = 0,$$

ce qui signifie qu'il existe une constante K telle que

$$y(x)^2 + x^2 = 2K.$$

On trouve donc, lorsque cette formule a un sens, $y(x) = \pm\sqrt{2K - x^2}$, ou simplement

$$y(x) = \pm\sqrt{C - x^2}$$

pour $C = 2K$.

Une méthode plus rapide

On considère toujours la même équation:

$$yy' + x = 0.$$

Une méthode plus rapide

On considère toujours la même équation:

$$yy' + x = 0.$$

On écrit la dérivée en notation de Leibniz: $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$,

Une méthode plus rapide

On considère toujours la même équation:

$$yy' + x = 0.$$

On écrit la dérivée en notation de Leibniz: $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$, et on réécrit l'équation de manière purement formelle comme :

$$y\,\mathrm{d}y = -x\,\mathrm{d}x.$$

Une méthode plus rapide

On considère toujours la même équation:

$$yy' + x = 0.$$

On écrit la dérivée en notation de Leibniz: $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$, et on réécrit l'équation de manière purement formelle comme :

$$y\,\mathrm{d}y = -x\,\mathrm{d}x.$$

On intègre ensuite, à gauche en y et à droite en x:

Une méthode plus rapide

On considère toujours la même équation:

$$yy' + x = 0.$$

On écrit la dérivée en notation de Leibniz: $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$, et on réécrit l'équation de manière purement formelle comme :

$$y\,\mathrm{d}y = -x\,\mathrm{d}x.$$

On intègre ensuite, à gauche en y et à droite en x:

$$\int y\,\mathrm{d}y = -\int x\,\mathrm{d}x$$

Une méthode plus rapide

On considère toujours la même équation:

$$yy' + x = 0.$$

On écrit la dérivée en notation de Leibniz: $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$, et on réécrit l'équation de manière purement formelle comme :

$$y\,\mathrm{d}y = -x\,\mathrm{d}x.$$

On intègre ensuite, à gauche en y et à droite en x:

$$\int y\,\mathrm{d}y = -\int x\,\mathrm{d}x \iff \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + K$$

pour une constante K,

Une méthode plus rapide

On considère toujours la même équation:

$$yy' + x = 0.$$

On écrit la dérivée en notation de Leibniz: $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$, et on réécrit l'équation de manière purement formelle comme :

$$y\,\mathrm{d}y = -x\,\mathrm{d}x.$$

On intègre ensuite, à gauche en y et à droite en x:

$$\int y\,\mathrm{d}y = -\int x\,\mathrm{d}x \iff \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + K$$

pour une constante K, ce qui donne encore:

$$y(x) = \pm\sqrt{2K - x^2}.$$

Une méthode plus rapide

On considère toujours la même équation:

$$yy' + x = 0.$$

On écrit la dérivée en notation de Leibniz: $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$, et on réécrit l'équation de manière purement formelle comme :

$$y\,\mathrm{d}y = -x\,\mathrm{d}x.$$

On intègre ensuite, à gauche en y et à droite en x:

$$\int y\,\mathrm{d}y = -\int x\,\mathrm{d}x \iff \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + K$$

pour une constante K, ce qui donne encore:

$$y(x) = \pm\sqrt{2K - x^2}.$$

Ce calcul est exactement équivalent à intégrer l'équation (en x) et écrire un changement de variable, car:

$$\int y(x)y'(x)\,\mathrm{d}x =$$

Une méthode plus rapide

On considère toujours la même équation:

$$yy' + x = 0.$$

On écrit la dérivée en notation de Leibniz: $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$, et on réécrit l'équation de manière purement formelle comme :

$$y\,\mathrm{d}y = -x\,\mathrm{d}x.$$

On intègre ensuite, à gauche en y et à droite en x:

$$\int y\,\mathrm{d}y = -\int x\,\mathrm{d}x \iff \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + K$$

pour une constante K, ce qui donne encore:

$$y(x) = \pm\sqrt{2K - x^2}.$$

Ce calcul est exactement équivalent à intégrer l'équation (en x) et écrire un changement de variable, car:

$$\int y(x)y'(x)\,\mathrm{d}x = \int u\,\mathrm{d}u =$$

Une méthode plus rapide

On considère toujours la même équation:

$$yy' + x = 0.$$

On écrit la dérivée en notation de Leibniz: $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$, et on réécrit l'équation de manière purement formelle comme :

$$y\,\mathrm{d}y = -x\,\mathrm{d}x.$$

On intègre ensuite, à gauche en y et à droite en x:

$$\int y\,\mathrm{d}y = -\int x\,\mathrm{d}x \iff \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + K$$

pour une constante K, ce qui donne encore:

$$y(x) = \pm\sqrt{2K - x^2}.$$

Ce calcul est exactement équivalent à intégrer l'équation (en x) et écrire un changement de variable, car:

$$\int y(x)y'(x)\,\mathrm{d}x = \int u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}u^2 + C =$$

Une méthode plus rapide

On considère toujours la même équation:

$$yy' + x = 0.$$

On écrit la dérivée en notation de Leibniz: $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x,$ et on réécrit l'équation de manière purement formelle comme :

$$y\,\mathrm{d}y = -x\,\mathrm{d}x.$$

On intègre ensuite, à gauche en y et à droite en x:

$$\int y\,\mathrm{d}y = -\int x\,\mathrm{d}x \iff \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + K$$

pour une constante K, ce qui donne encore:

$$y(x) = \pm\sqrt{2K - x^2}.$$

Ce calcul est exactement équivalent à intégrer l'équation (en x) et écrire un changement de variable, car:

$$\int y(x)y'(x)\,\mathrm{d}x = \int u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}u^2 + C = \frac{1}{2}y(x)^2 + C,$$

où on a posé $u = y(x)$.

Une méthode plus rapide

On considère toujours la même équation:

$$yy' + x = 0.$$

On écrit la dérivée en notation de Leibniz: $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$, et on réécrit l'équation de manière purement formelle comme :

$$y\,\mathrm{d}y = -x\,\mathrm{d}x.$$

On intègre ensuite, à gauche en y et à droite en x:

$$\int y\,\mathrm{d}y = -\int x\,\mathrm{d}x \iff \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + K$$

pour une constante K, ce qui donne encore:

$$y(x) = \pm\sqrt{2K - x^2}.$$

Ce calcul est exactement équivalent à intégrer l'équation (en x) et écrire un changement de variable, car:

$$\int y(x)y'(x)\,\mathrm{d}x = \int u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}u^2 + C = \frac{1}{2}y(x)^2 + C,$$

où on a posé $u = y(x)$. Ces deux méthodes sont donc les mêmes.

Un autre exemple

Exemple

On considère l'équation

$$y' + xy = 0$$

et on essaye d'appliquer la méthode précédente.

Un autre exemple

Exemple

On considère l'équation

$$y' + xy = 0$$

et on essaye d'appliquer la méthode précédente.

Attention

Un autre exemple

Exemple

On considère l'équation

$$y' + xy = 0$$

et on essaye d'appliquer la méthode précédente.

Attention

L'astuce $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ ne fonctionne que dans le cas où l'équation est sous forme séparée.

Un autre exemple

Exemple

On considère l'équation

$$y' + xy = 0$$

et on essaye d'appliquer la méthode précédente.

Attention

L'astuce $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ ne fonctionne que dans le cas où l'équation est sous forme séparée. Par exemple on ne peut *pas* résoudre $y' + xy = 0$ en écrivant

Un autre exemple

Exemple

On considère l'équation

$$y' + xy = 0$$

et on essaye d'appliquer la méthode précédente.

Attention

L'astuce $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ ne fonctionne que dans le cas où l'équation est sous forme séparée. Par exemple on ne peut *pas* résoudre $y' + xy = 0$ en écrivant

$$\int \mathrm{d}y + \int xy\,\mathrm{d}x = 0.$$

Un autre exemple

Exemple

On considère l'équation

$$y' + xy = 0$$

et on essaye d'appliquer la méthode précédente.

Attention

L'astuce $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ ne fonctionne que dans le cas où l'équation est sous forme séparée. Par exemple on ne peut *pas* résoudre $y' + xy = 0$ en écrivant

$$\int \mathrm{d}y + \int xy\,\mathrm{d}x = 0.$$

Ça n'a pas grand intérêt d'intégrer $xy(x)$ par rapport à x:

Un autre exemple

Exemple

On considère l'équation

$$y' + xy = 0$$

et on essaye d'appliquer la méthode précédente.

Attention

L'astuce $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ ne fonctionne que dans le cas où l'équation est sous forme séparée. Par exemple on ne peut *pas* résoudre $y' + xy = 0$ en écrivant

$$\int \mathrm{d}y + \int xy\,\mathrm{d}x = 0.$$

Ça n'a pas grand intérêt d'intégrer $xy(x)$ par rapport à x: ça voudrait dire intégrer $xy(x)$ sans connaître $y(x)$, donc on ne pourrait pas calculer de primitive.

Un autre exemple (suite)

Question

En mettant l'équation

$$y' + xy = 0$$

sous la forme séparée:

$$\frac{y'}{y} + x = 0$$

déterminez toutes ses solutions.

Réponse

Pour s'en sortir ici, il faut mettre l'équation sous forme séparée:

Réponse

Pour s'en sortir ici, il faut mettre l'équation sous forme séparée:

$$\frac{y'}{y} + x = 0 \quad \text{pour } y \neq 0.$$

Réponse

Pour s'en sortir ici, il faut mettre l'équation sous forme séparée:

$$\frac{y'}{y} + x = 0 \quad \text{pour } y \neq 0.$$

Et ensuite calculer :

Réponse

Pour s'en sortir ici, il faut mettre l'équation sous forme séparée:

$$\frac{y'}{y} + x = 0 \quad \text{pour } y \neq 0.$$

Et ensuite calculer :

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} + \int x \, \mathrm{d}x = 0$$

pour obtenir la solution.

Réponse

Pour s'en sortir ici, il faut mettre l'équation sous forme séparée:

$$\frac{y'}{y} + x = 0 \quad \text{pour } y \neq 0.$$

Et ensuite calculer :

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} + \int x \, \mathrm{d}x = 0$$

pour obtenir la solution. On obtient alors :

Réponse

Pour s'en sortir ici, il faut mettre l'équation sous forme séparée:

$$\frac{y'}{y} + x = 0 \quad \text{pour } y \neq 0.$$

Et ensuite calculer :

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} + \int x \,\mathrm{d}x = 0$$

pour obtenir la solution. On obtient alors :

$$\ln|y| + \frac{x^2}{2} = C$$

Réponse

Pour s'en sortir ici, il faut mettre l'équation sous forme séparée:

$$\frac{y'}{y} + x = 0 \quad \text{pour } y \neq 0.$$

Et ensuite calculer :

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} + \int x \, \mathrm{d}x = 0$$

pour obtenir la solution. On obtient alors :

$$\ln|y| + \frac{x^2}{2} = C$$

d'où $|y(x)| = C \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$, où C est une constante.

Réponse

Pour s'en sortir ici, il faut mettre l'équation sous forme séparée:

$$\frac{y'}{y} + x = 0 \quad \text{pour } y \neq 0.$$

Et ensuite calculer :

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} + \int x \,\mathrm{d}x = 0$$

pour obtenir la solution. On obtient alors :

$$\ln|y| + \frac{x^2}{2} = C$$

d'où $|y(x)| = C\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$, où C est une constante. Comme $\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) > 0$ ne s'annule jamais, y non plus: on pourra donc écrire

Réponse

Pour s'en sortir ici, il faut mettre l'équation sous forme séparée:

$$\frac{y'}{y} + x = 0 \quad \text{pour } y \neq 0.$$

Et ensuite calculer :

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} + \int x \,\mathrm{d}x = 0$$

pour obtenir la solution. On obtient alors :

$$\ln|y| + \frac{x^2}{2} = C$$

d'où $|y(x)| = C \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$, où C est une constante. Comme $\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) > 0$ ne s'annule jamais, y non plus: on pourra donc écrire

$$y(x) = \pm C \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

Réponse

Pour s'en sortir ici, il faut mettre l'équation sous forme séparée:

$$\frac{y'}{y} + x = 0 \quad \text{pour } y \neq 0.$$

Et ensuite calculer :

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} + \int x \, \mathrm{d}x = 0$$

pour obtenir la solution. On obtient alors :

$$\ln|y| + \frac{x^2}{2} = C$$

d'où $|y(x)| = C \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$, où C est une constante. Comme $\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) > 0$ ne s'annule jamais, y non plus: on pourra donc écrire

$$y(x) = \pm C \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = \tilde{C} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

où $\tilde{C} = \pm C$ et ainsi enlever les valeurs absolues.

3 ÉDO du premier ordre

- Forme normale
- Interprétation géométrique
- Équations à variables séparables
  - Théorie
  - Des exemples
  - L'équation logistique

L'équation logistique

Considérons l'équation logistique pour $k, K > 0$:

$$y' = ky\left(1 - \frac{y}{K}\right).$$

L'équation logistique

Considérons l'équation logistique pour $k, K > 0$:

$$y' = ky\left(1 - \frac{y}{K}\right).$$

Elle est à variables séparables

L'équation logistique

Considérons l'équation logistique pour $k, K > 0$:

$$y' = ky\left(1 - \frac{y}{K}\right).$$

Elle est à variables séparables, et nous pouvons l'écrire :

$$\frac{y'}{y\left(1 - \frac{y}{K}\right)} = k$$

L'équation logistique

Considérons l'équation logistique pour $k,K > 0$:

$$y' = ky\left(1 - \frac{y}{K}\right).$$

Elle est à variables séparables, et nous pouvons l'écrire :

$$\frac{y'}{y\left(1 - \frac{y}{K}\right)} = k \text{ et donc :}$$

L′équation logistique

Considérons l′équation logistique pour $k, K > 0$:

$$y' = ky\left(1 - \frac{y}{K}\right).$$

Elle est à variables séparables, et nous pouvons l′écrire :

$$\frac{y'}{y\left(1-\frac{y}{K}\right)} = k \text{ et donc : } \int \frac{\mathrm{d}y}{y\left(1-\frac{y}{K}\right)} = kx + C.$$

L'équation logistique

Considérons l'équation logistique pour $k, K > 0$:

$$y' = ky\left(1 - \frac{y}{K}\right).$$

Elle est à variables séparables, et nous pouvons l'écrire :

$$\frac{y'}{y\left(1-\frac{y}{K}\right)} = k \text{ et donc : } \int \frac{\mathrm{d}y}{y\left(1-\frac{y}{K}\right)} = kx + C.$$

L'intégrale indéfinie se résout en décomposant en fractions simples :

L'équation logistique

Considérons l'équation logistique pour $k, K > 0$:

$$y' = ky\left(1 - \frac{y}{K}\right).$$

Elle est à variables séparables, et nous pouvons l'écrire :

$$\frac{y'}{y\left(1-\frac{y}{K}\right)} = k \text{ et donc : } \int \frac{\mathrm{d}y}{y\left(1-\frac{y}{K}\right)} = kx + C.$$

L'intégrale indéfinie se résout en décomposant en fractions simples :

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y\left(1-\frac{y}{K}\right)} =$$

L'équation logistique

Considérons l'équation logistique pour $k, K > 0$:

$$y' = ky\left(1 - \frac{y}{K}\right).$$

Elle est à variables séparables, et nous pouvons l'écrire :

$$\frac{y'}{y\left(1-\frac{y}{K}\right)} = k \text{ et donc : } \int \frac{\mathrm{d}y}{y\left(1-\frac{y}{K}\right)} = kx + C.$$

L'intégrale indéfinie se résout en décomposant en fractions simples :

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y\left(1-\frac{y}{K}\right)} = \int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{K-y}\right)\mathrm{d}y =$$

L'équation logistique

Considérons l'équation logistique pour $k, K > 0$:

$$y' = ky\left(1 - \frac{y}{K}\right).$$

Elle est à variables séparables, et nous pouvons l'écrire :

$$\frac{y'}{y\left(1 - \frac{y}{K}\right)} = k \text{ et donc : } \int \frac{\mathrm{d}y}{y\left(1 - \frac{y}{K}\right)} = kx + C.$$

L'intégrale indéfinie se résout en décomposant en fractions simples :

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y\left(1 - \frac{y}{K}\right)} = \int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{K - y}\right)\mathrm{d}y = kx + C$$

L'équation logistique

Considérons l'équation logistique pour $k, K > 0$:

$$y' = ky\left(1 - \frac{y}{K}\right).$$

Elle est à variables séparables, et nous pouvons l'écrire :

$$\frac{y'}{y\left(1-\frac{y}{K}\right)} = k \text{ et donc : } \int \frac{\mathrm{d}y}{y\left(1-\frac{y}{K}\right)} = kx + C.$$

L'intégrale indéfinie se résout en décomposant en fractions simples :

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y\left(1-\frac{y}{K}\right)} = \int\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{K-y}\right)\mathrm{d}y = kx + C$$

dont on déduit

L'équation logistique

Considérons l'équation logistique pour $k, K > 0$:

$$y' = ky\left(1 - \frac{y}{K}\right).$$

Elle est à variables séparables, et nous pouvons l'écrire :

$$\frac{y'}{y\left(1 - \frac{y}{K}\right)} = k \text{ et donc : } \int \frac{\mathrm{d}y}{y\left(1 - \frac{y}{K}\right)} = kx + C.$$

L'intégrale indéfinie se résout en décomposant en fractions simples :

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y\left(1 - \frac{y}{K}\right)} = \int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{K - y}\right) \mathrm{d}y = kx + C$$

dont on déduit

$$\ln |y(x)|$$

L'équation logistique

Considérons l'équation logistique pour $k, K > 0$:

$$y' = ky\left(1 - \frac{y}{K}\right).$$

Elle est à variables séparables, et nous pouvons l'écrire :

$$\frac{y'}{y\left(1-\frac{y}{K}\right)} = k \text{ et donc : } \int \frac{\mathrm{d}y}{y\left(1-\frac{y}{K}\right)} = kx + C.$$

L'intégrale indéfinie se résout en décomposant en fractions simples :

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y\left(1-\frac{y}{K}\right)} = \int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{K-y}\right)\mathrm{d}y = kx + C$$

dont on déduit

$$\ln|y(x)| - \ln|K - y(x)| =$$

L'équation logistique

Considérons l'équation logistique pour $k, K > 0$:

$$y' = ky\left(1 - \frac{y}{K}\right).$$

Elle est à variables séparables, et nous pouvons l'écrire :

$$\frac{y'}{y\left(1-\frac{y}{K}\right)} = k \text{ et donc : } \int \frac{\mathrm{d}y}{y\left(1-\frac{y}{K}\right)} = kx + C.$$

L'intégrale indéfinie se résout en décomposant en fractions simples :

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y\left(1-\frac{y}{K}\right)} = \int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{K-y}\right)\mathrm{d}y = kx + C$$

dont on déduit

$$\ln|y(x)| - \ln|K - y(x)| = \ln\left|\frac{y(x)}{K - y(x)}\right| =$$

L'équation logistique

Considérons l'équation logistique pour $k, K > 0$:

$$y' = ky\left(1 - \frac{y}{K}\right).$$

Elle est à variables séparables, et nous pouvons l'écrire :

$$\frac{y'}{y\left(1 - \frac{y}{K}\right)} = k \text{ et donc : } \int \frac{\mathrm{d}y}{y\left(1 - \frac{y}{K}\right)} = kx + C.$$

L'intégrale indéfinie se résout en décomposant en fractions simples :

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y\left(1 - \frac{y}{K}\right)} = \int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{K - y}\right)\mathrm{d}y = kx + C$$

dont on déduit

$$\ln|y(x)| - \ln|K - y(x)| = \ln\left|\frac{y(x)}{K - y(x)}\right| = kx + C$$

L'équation logistique

Considérons l'équation logistique pour $k, K > 0$:

$$y' = ky\left(1 - \frac{y}{K}\right).$$

Elle est à variables séparables, et nous pouvons l'écrire :

$$\frac{y'}{y\left(1-\frac{y}{K}\right)} = k \text{ et donc : } \int \frac{\mathrm{d}y}{y\left(1-\frac{y}{K}\right)} = kx + C.$$

L'intégrale indéfinie se résout en décomposant en fractions simples :

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y\left(1-\frac{y}{K}\right)} = \int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{K-y}\right)\mathrm{d}y = kx + C$$

dont on déduit

$$\ln|y(x)| - \ln|K - y(x)| = \ln\left|\frac{y(x)}{K-y(x)}\right| = kx + C \text{ d'où}$$

L'équation logistique

Considérons l'équation logistique pour $k, K > 0$:

$$y' = ky\left(1 - \frac{y}{K}\right).$$

Elle est à variables séparables, et nous pouvons l'écrire :

$$\frac{y'}{y\left(1 - \frac{y}{K}\right)} = k \text{ et donc : } \int \frac{\mathrm{d}y}{y\left(1 - \frac{y}{K}\right)} = kx + C.$$

L'intégrale indéfinie se résout en décomposant en fractions simples :

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y\left(1 - \frac{y}{K}\right)} = \int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{K - y}\right)\mathrm{d}y = kx + C$$

dont on déduit

$$\ln|y(x)| - \ln|K - y(x)| = \ln\left|\frac{y(x)}{K - y(x)}\right| = kx + C \text{ d'où } \frac{y(x)}{K - y(x)} = \pm e^{C} \exp(kx).$$

L'équation logistique

Considérons l'équation logistique pour $k, K > 0$:

$$y' = ky\left(1 - \frac{y}{K}\right).$$

Elle est à variables séparables, et nous pouvons l'écrire :

$$\frac{y'}{y\left(1-\frac{y}{K}\right)} = k \text{ et donc : } \int \frac{\mathrm{d}y}{y\left(1-\frac{y}{K}\right)} = kx + C.$$

L'intégrale indéfinie se résout en décomposant en fractions simples :

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y\left(1-\frac{y}{K}\right)} = \int\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{K-y}\right)\mathrm{d}y = kx + C$$

dont on déduit

$$\ln|y(x)| - \ln|K-y(x)| = \ln\left|\frac{y(x)}{K-y(x)}\right| = kx + C \text{ d'où } \frac{y(x)}{K-y(x)} = \pm e^{C}\exp(kx).$$

Dès lors :

L'équation logistique

Considérons l'équation logistique pour $k, K > 0$:

$$y' = ky\left(1 - \frac{y}{K}\right).$$

Elle est à variables séparables, et nous pouvons l'écrire :

$$\frac{y'}{y\left(1 - \frac{y}{K}\right)} = k \text{ et donc : } \int \frac{\mathrm{d}y}{y\left(1 - \frac{y}{K}\right)} = kx + C.$$

L'intégrale indéfinie se résout en décomposant en fractions simples :

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y\left(1 - \frac{y}{K}\right)} = \int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{K - y}\right)\mathrm{d}y = kx + C$$

dont on déduit

$$\ln|y(x)| - \ln|K - y(x)| = \ln\left|\frac{y(x)}{K - y(x)}\right| = kx + C \text{ d'où } \frac{y(x)}{K - y(x)} = \pm e^{C}\exp(kx).$$

$$\text{Dès lors : } y(x) = \frac{K\tilde{C}\exp(kx)}{1 + \tilde{C}\exp(kx)}.$$

L'équation logistique

Considérons l'équation logistique pour $k, K > 0$:

$$y' = ky\left(1 - \frac{y}{K}\right).$$

Elle est à variables séparables, et nous pouvons l'écrire :

$$\frac{y'}{y\left(1-\frac{y}{K}\right)} = k \text{ et donc : } \int \frac{\mathrm{d}y}{y\left(1-\frac{y}{K}\right)} = kx + C.$$

L'intégrale indéfinie se résout en décomposant en fractions simples :

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y\left(1-\frac{y}{K}\right)} = \int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{K-y}\right)\mathrm{d}y = kx + C$$

dont on déduit

$$\ln|y(x)| - \ln|K - y(x)| = \ln\left|\frac{y(x)}{K-y(x)}\right| = kx + C \text{ d'où } \frac{y(x)}{K-y(x)} = \pm e^{C}\exp(kx).$$

$$\text{Dès lors : } y(x) = \frac{K\tilde{C}\exp(kx)}{1+\tilde{C}\exp(kx)}.$$

(la nouvelle constante $\tilde{C}$ est définie comme $\tilde{C} = \pm\exp(C)$.)

Un problème de Cauchy

Exemple

On étudie maintenant un problème de Cauchy pour l'équation logistique.

Un problème de Cauchy

Exemple

On étudie maintenant un problème de Cauchy pour l'équation logistique. On choisit $y_0 \in \mathbb{R}$ et on demande que $y(0)$ soit égal à y_0:

Un problème de Cauchy

Exemple

On étudie maintenant un problème de Cauchy pour l'équation logistique. On choisit $y_0 \in \mathbb{R}$ et on demande que $y(0)$ soit égal à y_0:

$$\begin{cases} y' = ky\left(1 - \frac{y}{K}\right) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Un problème de Cauchy

Exemple

On étudie maintenant un problème de Cauchy pour l'équation logistique. On choisit $y_0 \in \mathbb{R}$ et on demande que $y(0)$ soit égal à y_0:

$$\begin{cases} y' = ky\left(1 - \frac{y}{K}\right) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

La solution générale $y(x)$ s'écrit sous la forme suivante:

$$\frac{y(x)}{K - y(x)} = \tilde{C}\exp(kx) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

pour une certaine constante $\tilde{C}$.

Un problème de Cauchy

Exemple

On étudie maintenant un problème de Cauchy pour l'équation logistique. On choisit $y_0 \in \mathbb{R}$ et on demande que $y(0)$ soit égal à y_0:

$$\begin{cases} y' = ky\left(1 - \frac{y}{K}\right) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

La solution générale $y(x)$ s'écrit sous la forme suivante:

$$\frac{y(x)}{K - y(x)} = \tilde{C}\exp(kx) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

pour une certaine constante $\tilde{C}$. Il s'agit donc de déterminer $\tilde{C}$ en fonction de y_0 pour avoir $y(0) = y_0$.

Un problème de Cauchy

Exemple

On étudie maintenant un problème de Cauchy pour l'équation logistique. On choisit $y_0 \in \mathbb{R}$ et on demande que $y(0)$ soit égal à y_0:

$$\begin{cases} y' = ky\left(1 - \frac{y}{K}\right) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

La solution générale $y(x)$ s'écrit sous la forme suivante:

$$\frac{y(x)}{K - y(x)} = \tilde{C} \exp(kx) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

pour une certaine constante $\tilde{C}$. Il s'agit donc de déterminer $\tilde{C}$ en fonction de y_0 pour avoir $y(0) = y_0$. Cette condition s'écrit:

$$\frac{y_0}{K - y_0} = \tilde{C}.$$

Un problème de Cauchy

Exemple

On étudie maintenant un problème de Cauchy pour l'équation logistique. On choisit $y_0 \in \mathbb{R}$ et on demande que $y(0)$ soit égal à y_0:

$$\begin{cases} y' = ky\left(1 - \frac{y}{K}\right) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

La solution générale $y(x)$ s'écrit sous la forme suivante:

$$\frac{y(x)}{K - y(x)} = \tilde{C}\exp(kx) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

pour une certaine constante $\tilde{C}$. Il s'agit donc de déterminer $\tilde{C}$ en fonction de y_0 pour avoir $y(0) = y_0$. Cette condition s'écrit:

$$\frac{y_0}{K - y_0} = \tilde{C}.$$

On en déduit l'expression de la solution du problème de Cauchy:

Un problème de Cauchy

Exemple

On étudie maintenant un problème de Cauchy pour l'équation logistique. On choisit $y_0 \in \mathbb{R}$ et on demande que $y(0)$ soit égal à y_0:

$$\begin{cases} y' = ky\left(1 - \frac{y}{K}\right) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

La solution générale $y(x)$ s'écrit sous la forme suivante:

$$\frac{y(x)}{K - y(x)} = \tilde{C}\exp(kx) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

pour une certaine constante $\tilde{C}$. Il s'agit donc de déterminer $\tilde{C}$ en fonction de y_0 pour avoir $y(0) = y_0$. Cette condition s'écrit:

$$\frac{y_0}{K - y_0} = \tilde{C}.$$

On en déduit l'expression de la solution du problème de Cauchy:

$$y(x) =$$

Un problème de Cauchy

Exemple

On étudie maintenant un problème de Cauchy pour l'équation logistique. On choisit $y_0 \in \mathbb{R}$ et on demande que $y(0)$ soit égal à y_0:

$$\begin{cases} y' = ky\left(1 - \frac{y}{K}\right) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

La solution générale $y(x)$ s'écrit sous la forme suivante:

$$\frac{y(x)}{K - y(x)} = \tilde{C} \exp(kx) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

pour une certaine constante $\tilde{C}$. Il s'agit donc de déterminer $\tilde{C}$ en fonction de y_0 pour avoir $y(0) = y_0$. Cette condition s'écrit:

$$\frac{y_0}{K - y_0} = \tilde{C}.$$

On en déduit l'expression de la solution du problème de Cauchy:

$$y(x) = \frac{K \frac{y_0}{K - y_0} \exp kx}{1 + \frac{y_0}{K - y_0} \exp kx} =$$

Un problème de Cauchy

Exemple

On étudie maintenant un problème de Cauchy pour l'équation logistique. On choisit $y_0 \in \mathbb{R}$ et on demande que $y(0)$ soit égal à y_0:

$$\begin{cases} y' = ky\left(1 - \frac{y}{K}\right) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

La solution générale $y(x)$ s'écrit sous la forme suivante:

$$\frac{y(x)}{K - y(x)} = \tilde{C}\exp(kx) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

pour une certaine constante $\tilde{C}$. Il s'agit donc de déterminer $\tilde{C}$ en fonction de y_0 pour avoir $y(0) = y_0$. Cette condition s'écrit:

$$\frac{y_0}{K - y_0} = \tilde{C}.$$

On en déduit l'expression de la solution du problème de Cauchy:

$$y(x) = \frac{K\frac{y_0}{K-y_0}\exp kx}{1 + \frac{y_0}{K-y_0}\exp kx} = \frac{Ky_0 \exp kx}{K + y_0(\exp kx - 1)}.$$

La formule générale pour la solution du problème de Cauchy:

$$\begin{cases} y' = ky\left(1 - \frac{y}{K}\right) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

La formule générale pour la solution du problème de Cauchy:

$$\begin{cases} y' = ky\left(1 - \frac{y}{K}\right) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

donnée par

$$y(x) = \frac{Ky_0 \exp kx}{K + y_0(\exp kx - 1)}$$

La formule générale pour la solution du problème de Cauchy:

$$\begin{cases} y' = ky\left(1 - \frac{y}{K}\right) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

donnée par

$$y(x) = \frac{Ky_0 \exp kx}{K + y_0(\exp kx - 1)}$$

permet en particulier de retrouver les deux solutions constantes:

$y = 0$ (associée à $y_0 = 0$)

La formule générale pour la solution du problème de Cauchy:

$$\begin{cases} y' = ky\left(1 - \frac{y}{K}\right) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

donnée par

$$y(x) = \frac{Ky_0 \exp kx}{K + y_0(\exp kx - 1)}$$

permet en particulier de retrouver les deux solutions constantes: $y = 0$ (associée à $y_0 = 0$) et $y = K$ (associée à $y_0 = K$).

La formule générale pour la solution du problème de Cauchy:

$$\begin{cases} y' = ky\left(1 - \frac{y}{K}\right) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

donnée par

$$y(x) = \frac{Ky_0 \exp kx}{K + y_0(\exp kx - 1)}$$

permet en particulier de retrouver les deux solutions constantes: $y = 0$ (associée à $y_0 = 0$) et $y = K$ (associée à $y_0 = K$). Il suffit pour cela de choisir $y_0 = 0$ ou $y_0 = K$ dans la formule ci-dessus.