Séance de révisions pour l′examen de Janvier

Séance de révisions pour l'examen de Janvier

L'examen du 21 Janvier 2019 portera sur :

Séance de révisions pour l'examen de Janvier

L'examen du 21 Janvier 2019 portera sur :

- Le contenu vu en cours et en séances d'exercices

Séance de révisions pour l'examen de Janvier

L'examen du 21 Janvier 2019 portera sur :

- Le contenu vu en cours et en séances d'exercices
- Du début du cours jusqu'au chapitre sur les matrices (inclus)

Séance de révisions pour l'examen de Janvier

L'examen du 21 Janvier 2019 portera sur :

- Le contenu vu en cours et en séances d'exercices
- Du début du cours jusqu'au chapitre sur les matrices (inclus)

Le Lundi 17 décembre (dernière séance avant les vacances) sera une séance de révisions sur le programme de l'examen.

Contenu de la section

Contenu de la section

ÉDO linéaires du premier ordre

Définition

Une équation différentielle *du premier ordre* est dite *linéaire* si elle est écrite sous la forme :

ÉDO linéaires du premier ordre

Définition

Une équation différentielle *du premier ordre* est dite *linéaire* si elle est écrite sous la forme :

$$q(x)y' + p(x)y = f(x) \tag{EL}$$

où p,q,f sont des fonctions (de x) données.

ÉDO linéaires du premier ordre

Définition

Une équation différentielle *du premier ordre* est dite *linéaire* si elle est écrite sous la forme :

$$q(x)y' + p(x)y = f(x) \tag{EL}$$

où p,q,f sont des fonctions (de x) données.

- Les fonctions p et q sont appelés les « coefficients ».

ÉDO linéaires du premier ordre

Définition

Une équation différentielle *du premier ordre* est dite *linéaire* si elle est écrite sous la forme :

$$q(x)y' + p(x)y = f(x) \tag{EL}$$

où p,q,f sont des fonctions (de x) données.

- Les fonctions p et q sont appelés les « coefficients ». Ces coefficients sont parfois constants (c'est-à-dire qu'ils ne dépendent pas de x) mais en général ce sont des fonctions de x.

ÉDO linéaires du premier ordre

Définition

Une équation différentielle *du premier ordre* est dite *linéaire* si elle est écrite sous la forme :

$$q(x)y' + p(x)y = f(x) \tag{EL}$$

où p,q,f sont des fonctions (de x) données.

- Les fonctions p et q sont appelés les « coefficients ». Ces coefficients sont parfois constants (c'est-à-dire qu'ils ne dépendent pas de x) mais en général ce sont des fonctions de x.
- La fonction f est appelée le « second membre » de l'équation.

ÉDO linéaires du premier ordre

Définition

Une équation différentielle *du premier ordre* est dite *linéaire* si elle est écrite sous la forme :

$$q(x)y' + p(x)y = f(x) \tag{EL}$$

où p,q,f sont des fonctions (de x) données.

- Les fonctions p et q sont appelés les « coefficients ». Ces coefficients sont parfois constants (c'est-à-dire qu'ils ne dépendent pas de x) mais en général ce sont des fonctions de x.
- La fonction f est appelée le « second membre » de l'équation.

Définition

Si $f(x) = 0$ pour tout x on dit que l'équation est *linéaire homogène*.

ÉDO linéaires du premier ordre

Définition

Une équation différentielle *du premier ordre* est dite *linéaire* si elle est écrite sous la forme :

$$q(x)y' + p(x)y = f(x) \tag{EL}$$

où p, q, f sont des fonctions (de x) données.

- Les fonctions p et q sont appelés les « coefficients ». Ces coefficients sont parfois constants (c'est-à-dire qu'ils ne dépendent pas de x) mais en général ce sont des fonctions de x.
- La fonction f est appelée le « second membre » de l'équation.

Définition

Si $f(x) = 0$ pour tout x on dit que l'équation est *linéaire homogène*. À l'équation (EL) on associe souvent la même équation avec $f = 0$, qu'on appelle équation linéaire homogène associée (ELHA):

$$q(x)y' + p(x)y = 0.$$

Des exemples

Exemple

- $2y' + y = 0$

Des exemples

Exemple

- $2y' + y = 0$ (linéaire, homogène, à coefficients constants)

Des exemples

Exemple

- $2y' + y = 0$ (linéaire, homogène, à coefficients constants)
- $2y' + y = x^2$

Des exemples

Exemple

- $2y' + y = 0$ (linéaire, homogène, à coefficients constants)
- $2y' + y = x^2$ (linéaire, non-homogène, à coefficients constants)

Des exemples

Exemple

- $2y' + y = 0$ (linéaire, homogène, à coefficients constants)
- $2y' + y = x^2$ (linéaire, non-homogène, à coefficients constants)
- $2xy' + y = 1$

Des exemples

Exemple

- $2y' + y = 0$ (linéaire, homogène, à coefficients constants)
- $2y' + y = x^2$ (linéaire, non-homogène, à coefficients constants)
- $2xy' + y = 1$ (linéaire, non-homogène, à coefficients non-constants)

Des exemples

Exemple

- $2y' + y = 0$ (linéaire, homogène, à coefficients constants)
- $2y' + y = x^2$ (linéaire, non-homogène, à coefficients constants)
- $2xy' + y = 1$ (linéaire, non-homogène, à coefficients non-constants)
- $y'^2 + y = x$

Des exemples

Exemple

- $2y' + y = 0$ (linéaire, homogène, à coefficients constants)
- $2y' + y = x^2$ (linéaire, non-homogène, à coefficients constants)
- $2xy' + y = 1$ (linéaire, non-homogène, à coefficients non-constants)
- $y'^2 + y = x$ (non-linéaire)

Des exemples

Exemple

- $2y' + y = 0$ (linéaire, homogène, à coefficients constants)
- $2y' + y = x^2$ (linéaire, non-homogène, à coefficients constants)
- $2xy' + y = 1$ (linéaire, non-homogène, à coefficients non-constants)
- $y'^2 + y = x$ (non-linéaire)
- $y' + \sin(y) = x$

Des exemples

Exemple

- $2y' + y = 0$ (linéaire, homogène, à coefficients constants)
- $2y' + y = x^2$ (linéaire, non-homogène, à coefficients constants)
- $2xy' + y = 1$ (linéaire, non-homogène, à coefficients non-constants)
- $y'^2 + y = x$ (non-linéaire)
- $y' + \sin(y) = x$ (non-linéaire)

Des exemples

Exemple

- $2y' + y = 0$ (linéaire, homogène, à coefficients constants)
- $2y' + y = x^2$ (linéaire, non-homogène, à coefficients constants)
- $2xy' + y = 1$ (linéaire, non-homogène, à coefficients non-constants)
- $y'^2 + y = x$ (non-linéaire)
- $y' + \sin(y) = x$ (non-linéaire)

Nous allons voir dans la suite une méthode générale pour résoudre toutes les équations linéaires d'ordre 1.

Rôle de l'équation homogène

Notre but est de trouver toutes les solutions de l'équation linéaire:

$$q(x)y' + p(x)y = f(x). \tag{EL}$$

Rôle de l'équation homogène

Notre but est de trouver toutes les solutions de l'équation linéaire:

$$q(x)y' + p(x)y = f(x). \tag{EL}$$

Supposons qu'on connaisse *une* solution particulière de cette équation linéaire (SPEL), notons-la y_{SPEL}.

Rôle de l'équation homogène

Notre but est de trouver toutes les solutions de l'équation linéaire:

$$q(x)y' + p(x)y = f(x). \tag{EL}$$

Supposons qu'on connaisse *une* solution particulière de cette équation linéaire (SPEL), notons-la y_{SPEL}. Soit y une autre solution de (EL), et soit $z = y - y_{SPEL}$.

Rôle de l'équation homogène

Notre but est de trouver toutes les solutions de l'équation linéaire:

$$q(x)y' + p(x)y = f(x). \tag{EL}$$

Supposons qu'on connaisse *une* solution particulière de cette équation linéaire (SPEL), notons-la y_{SPEL}. Soit y une autre solution de (EL), et soit $z = y - y_{SPEL}$. Alors nous pouvons calculer $q(x)z' + p(x)z$:

Rôle de l'équation homogène

Notre but est de trouver toutes les solutions de l'équation linéaire:

$$q(x)y' + p(x)y = f(x). \tag{EL}$$

Supposons qu'on connaisse *une* solution particulière de cette équation linéaire (SPEL), notons-la y_{SPEL}. Soit y une autre solution de (EL), et soit $z = y - y_{SPEL}$. Alors nous pouvons calculer $q(x)z' + p(x)z$:

$$q(x)z' + p(x)z = q(x)(y - y_{SPEL})' + p(x)(y - y_{SPEL})$$

Rôle de l'équation homogène

Notre but est de trouver toutes les solutions de l'équation linéaire:

$$q(x)y' + p(x)y = f(x). \qquad \text{(EL)}$$

Supposons qu'on connaisse *une* solution particulière de cette équation linéaire (SPEL), notons-la y_{SPEL}. Soit y une autre solution de (EL), et soit $z = y - y_{SPEL}$. Alors nous pouvons calculer $q(x)z' + p(x)z$:

$$\begin{aligned} q(x)z' + p(x)z &= q(x)(y - y_{SPEL})' + p(x)(y - y_{SPEL}) \\ &= q(x)y' - q(x)y'_{SPEL} + p(x)y - p(x)y_{SPEL} \end{aligned}$$

Rôle de l'équation homogène

Notre but est de trouver toutes les solutions de l'équation linéaire:

$$q(x)y' + p(x)y = f(x). \tag{EL}$$

Supposons qu'on connaisse *une* solution particulière de cette équation linéaire (SPEL), notons-la y_{SPEL}. Soit y une autre solution de (EL), et soit $z = y - y_{SPEL}$. Alors nous pouvons calculer $q(x)z' + p(x)z$:

$$\begin{aligned} q(x)z' + p(x)z &= q(x)(y - y_{SPEL})' + p(x)(y - y_{SPEL}) \\ &= q(x)y' - q(x)y'_{SPEL} + p(x)y - p(x)y_{SPEL} \\ &= (q(x)y' + p(x)y) - (q(x)y'_{SPEL} + p(x)y_{SPEL}) \end{aligned}$$

Rôle de l'équation homogène

Notre but est de trouver toutes les solutions de l'équation linéaire:

$$q(x)y' + p(x)y = f(x). \tag{EL}$$

Supposons qu'on connaisse *une* solution particulière de cette équation linéaire (SPEL), notons-la y_{SPEL}. Soit y une autre solution de (EL), et soit $z = y - y_{SPEL}$. Alors nous pouvons calculer $q(x)z' + p(x)z$:

$$\begin{aligned} q(x)z' + p(x)z &= q(x)(y - y_{SPEL})' + p(x)(y - y_{SPEL}) \\ &= q(x)y' - q(x)y'_{SPEL} + p(x)y - p(x)y_{SPEL} \\ &= (q(x)y' + p(x)y) - (q(x)y'_{SPEL} + p(x)y_{SPEL}) \\ &= f(x) - f(x) \end{aligned}$$

Rôle de l'équation homogène

Notre but est de trouver toutes les solutions de l'équation linéaire:

$$q(x)y' + p(x)y = f(x). \tag{EL}$$

Supposons qu'on connaisse *une* solution particulière de cette équation linéaire (SPEL), notons-la y_{SPEL}. Soit y une autre solution de (EL), et soit $z = y - y_{SPEL}$. Alors nous pouvons calculer $q(x)z' + p(x)z$:

$$\begin{aligned}
q(x)z' + p(x)z &= q(x)(y - y_{SPEL})' + p(x)(y - y_{SPEL}) \\
&= q(x)y' - q(x)y'_{SPEL} + p(x)y - p(x)y_{SPEL} \\
&= (q(x)y' + p(x)y) - (q(x)y'_{SPEL} + p(x)y_{SPEL}) \\
&= f(x) - f(x) = 0.
\end{aligned}$$

Rôle de l'équation homogène

Notre but est de trouver toutes les solutions de l'équation linéaire:

$$q(x)y' + p(x)y = f(x). \tag{EL}$$

Supposons qu'on connaisse *une* solution particulière de cette équation linéaire (SPEL), notons-la y_{SPEL}. Soit y une autre solution de (EL), et soit $z = y - y_{SPEL}$. Alors nous pouvons calculer $q(x)z' + p(x)z$:

$$\begin{aligned} q(x)z' + p(x)z &= q(x)(y - y_{SPEL})' + p(x)(y - y_{SPEL}) \\ &= q(x)y' - q(x)y'_{SPEL} + p(x)y - p(x)y_{SPEL} \\ &= (q(x)y' + p(x)y) - (q(x)y'_{SPEL} + p(x)y_{SPEL}) \\ &= f(x) - f(x) = 0. \end{aligned}$$

Rôle de l'équation homogène

Notre but est de trouver toutes les solutions de l'équation linéaire:

$$q(x)y' + p(x)y = f(x). \tag{EL}$$

Supposons qu'on connaisse *une* solution particulière de cette équation linéaire (SPEL), notons-la y_{SPEL}. Soit y une autre solution de (EL), et soit $z = y - y_{SPEL}$. Alors nous pouvons calculer $q(x)z' + p(x)z$:

$$\begin{aligned}
q(x)z' + p(x)z &= q(x)(y - y_{SPEL})' + p(x)(y - y_{SPEL}) \\
&= q(x)y' - q(x)y'_{SPEL} + p(x)y - p(x)y_{SPEL} \\
&= (q(x)y' + p(x)y) - (q(x)y'_{SPEL} + p(x)y_{SPEL}) \\
&= f(x) - f(x) = 0.
\end{aligned}$$

En d'autres termes: z est une solution de l'équation linéaire homogène associée (ÉLHA).

Rôle de l'équation homogène

Notre but est de trouver toutes les solutions de l'équation linéaire:

$$q(x)y' + p(x)y = f(x). \tag{EL}$$

Supposons qu'on connaisse *une* solution particulière de cette équation linéaire (SPEL), notons-la y_{SPEL}. Soit y une autre solution de (EL), et soit $z = y - y_{SPEL}$. Alors nous pouvons calculer $q(x)z' + p(x)z$:

$$\begin{aligned} q(x)z' + p(x)z &= q(x)(y - y_{SPEL})' + p(x)(y - y_{SPEL}) \\ &= q(x)y' - q(x)y'_{SPEL} + p(x)y - p(x)y_{SPEL} \\ &= (q(x)y' + p(x)y) - (q(x)y'_{SPEL} + p(x)y_{SPEL}) \\ &= f(x) - f(x) = 0. \end{aligned}$$

En d'autres termes: z est une solution de l'équation linéaire homogène associée (ÉLHA).

Ainsi: si on connaît une solution particulière de l'équation (EL) et toutes les solutions de l'équation homogène (qui est plus simple!), on connaîtra toutes les solutions de (EL).

Méthode générale de résolution d′une équation linéaire

L′observation précédente nous permet de décomposer la résolution d′une équation linéaire en 4 étapes sucessives:

Méthode générale de résolution d'une équation linéaire

L'observation précédente nous permet de décomposer la résolution d'une équation linéaire en 4 étapes sucessives:

1. Étape 1: Résolution de l'équation linéaire homogène associée (avec $f \equiv 0$).

Méthode générale de résolution d'une équation linéaire

L'observation précédente nous permet de décomposer la résolution d'une équation linéaire en 4 étapes sucessives:

1. Étape 1: Résolution de l'équation linéaire homogène associée (avec $f \equiv 0$). Le but est de trouver toutes les solutions de l'équation homogène.

Méthode générale de résolution d'une équation linéaire

L'observation précédente nous permet de décomposer la résolution d'une équation linéaire en 4 étapes sucessives:

1. Étape 1: Résolution de l'équation linéaire homogène associée (avec $f \equiv 0$). Le but est de trouver toutes les solutions de l'équation homogène.
2. Étape 2: trouver une solution particulière de l'équation linéaire, avec f.

Méthode générale de résolution d'une équation linéaire

L'observation précédente nous permet de décomposer la résolution d'une équation linéaire en 4 étapes sucessives:

1. Étape 1: Résolution de l'équation linéaire homogène associée (avec $f \equiv 0$). Le but est de trouver toutes les solutions de l'équation homogène.
2. Étape 2: trouver une solution particulière de l'équation linéaire, avec f.
3. Étape 3: écrire la solution générale de l'équation linéaire comme la somme

Méthode générale de résolution d'une équation linéaire

L'observation précédente nous permet de décomposer la résolution d'une équation linéaire en 4 étapes sucessives:

1. Étape 1: Résolution de l'équation linéaire homogène associée (avec $f \equiv 0$). Le but est de trouver toutes les solutions de l'équation homogène.
2. Étape 2: trouver une solution particulière de l'équation linéaire, avec f.
3. Étape 3: écrire la solution générale de l'équation linéaire comme la somme de la solution particulière de l'équation linéaire

Méthode générale de résolution d'une équation linéaire

L'observation précédente nous permet de décomposer la résolution d'une équation linéaire en 4 étapes sucessives:

1. Étape 1: Résolution de l'équation linéaire homogène associée (avec $f \equiv 0$). Le but est de trouver toutes les solutions de l'équation homogène.
2. Étape 2: trouver une solution particulière de l'équation linéaire, avec f.
3. Étape 3: écrire la solution générale de l'équation linéaire comme la somme de la solution particulière de l'équation linéaire et de la solution générale de l'équation homogène

Méthode générale de résolution d′une équation linéaire

L′observation précédente nous permet de décomposer la résolution d′une équation linéaire en 4 étapes sucessives:

1. Étape 1: Résolution de l′équation linéaire homogène associée (avec $f \equiv 0$). Le but est de trouver toutes les solutions de l′équation homogène.
2. Étape 2: trouver une solution particulière de l′équation linéaire, avec f.
3. Étape 3: écrire la solution générale de l′équation linéaire comme la somme de la solution particulière de l′équation linéaire et de la solution générale de l′équation homogène
4. Étape 4 (si requise): Déterminer une solution exacte grâce au conditions initiales d′un problème de Cauchy

Méthode générale de résolution d'une équation linéaire

L'observation précédente nous permet de décomposer la résolution d'une équation linéaire en 4 étapes sucessives:

1. Étape 1: Résolution de l'équation linéaire homogène associée (avec $f \equiv 0$). Le but est de trouver toutes les solutions de l'équation homogène.
2. Étape 2: trouver une solution particulière de l'équation linéaire, avec f.
3. Étape 3: écrire la solution générale de l'équation linéaire comme la somme de la solution particulière de l'équation linéaire et de la solution générale de l'équation homogène
4. Étape 4 (si requise): Déterminer une solution exacte grâce au conditions initiales d'un problème de Cauchy

Nous allons voir des méthodes pour effectuer chacune de ces étapes.

Contenu de la section

L'équation linéaire homogène associée (ÉLHA) est l'équation où on a remplacé f par 0 :

L'équation linéaire homogène associée (ÉLHA) est l'équation où on a remplacé f par 0 :

$$q(x)y' + p(x)y = 0. \tag{ÉLHA}$$

L'équation linéaire homogène associée (ÉLHA) est l'équation où on a remplacé f par 0 :

$$q(x)y' + p(x)y = 0. \tag{ÉLHA}$$

C'est une équation à variables séparables quand on la réécrit comme:

L'équation linéaire homogène associée (ÉLHA) est l'équation où on a remplacé f par 0 :

$$q(x)y' + p(x)y = 0. \tag{ÉLHA}$$

C'est une équation à variables séparables quand on la réécrit comme:

$$\frac{y'}{y} + \frac{p(x)}{q(x)} = 0.$$

L'équation linéaire homogène associée (ÉLHA) est l'équation où on a remplacé f par 0 :

$$q(x)y' + p(x)y = 0. \tag{ÉLHA}$$

C'est une équation à variables séparables quand on la réécrit comme:

$$\frac{y'}{y} + \frac{p(x)}{q(x)} = 0.$$

Elle se résout donc comme:

L'équation linéaire homogène associée (ÉLHA) est l'équation où on a remplacé f par 0 :

$$q(x)y' + p(x)y = 0. \tag{ÉLHA}$$

C'est une équation à variables séparables quand on la réécrit comme:

$$\frac{y'}{y} + \frac{p(x)}{q(x)} = 0.$$

Elle se résout donc comme:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x,$$

L'équation linéaire homogène associée (ÉLHA) est l'équation où on a remplacé f par 0 :

$$q(x)y' + p(x)y = 0. \tag{ÉLHA}$$

C'est une équation à variables séparables quand on la réécrit comme:

$$\frac{y'}{y} + \frac{p(x)}{q(x)} = 0.$$

Elle se résout donc comme:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x,$$

ce qui donne encore, comme on l'a vu au dernier cours:

L'équation linéaire homogène associée (ÉLHA) est l'équation où on a remplacé f par 0 :

$$q(x)y' + p(x)y = 0. \tag{ÉLHA}$$

C'est une équation à variables séparables quand on la réécrit comme:

$$\frac{y'}{y} + \frac{p(x)}{q(x)} = 0.$$

Elle se résout donc comme:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x,$$

ce qui donne encore, comme on l'a vu au dernier cours:

$$y_{SGEH}(x) = C\exp\left(-\Phi(x)\right)$$

L'équation linéaire homogène associée (ÉLHA) est l'équation où on a remplacé f par 0 :

$$q(x)y' + p(x)y = 0. \tag{ÉLHA}$$

C'est une équation à variables séparables quand on la réécrit comme:

$$\frac{y'}{y} + \frac{p(x)}{q(x)} = 0.$$

Elle se résout donc comme:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x,$$

ce qui donne encore, comme on l'a vu au dernier cours:

$$y_{SGEH}(x) = C\exp\left(-\Phi(x)\right) \qquad \text{où } \Phi(x) = \int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x$$

L'équation linéaire homogène associée (ÉLHA) est l'équation où on a remplacé f par 0 :

$$q(x)y' + p(x)y = 0. \tag{ÉLHA}$$

C'est une équation à variables séparables quand on la réécrit comme:

$$\frac{y'}{y} + \frac{p(x)}{q(x)} = 0.$$

Elle se résout donc comme:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x,$$

ce qui donne encore, comme on l'a vu au dernier cours:

$$y_{SGEH}(x) = C\exp\left(-\Phi(x)\right) \qquad \text{où } \Phi(x) = \int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x$$

et C est une constante d'intégration.

L'équation linéaire homogène associée (ÉLHA) est l'équation où on a remplacé f par 0 :

$$q(x)y' + p(x)y = 0. \tag{ÉLHA}$$

C'est une équation à variables séparables quand on la réécrit comme:

$$\frac{y'}{y} + \frac{p(x)}{q(x)} = 0.$$

Elle se résout donc comme:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x,$$

ce qui donne encore, comme on l'a vu au dernier cours:

$$y_{SGEH}(x) = C\exp\left(-\Phi(x)\right) \qquad \text{où } \Phi(x) = \int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x$$

et C est une constante d'intégration. Le sigle SGEH signifie

L'équation linéaire homogène associée (ÉLHA) est l'équation où on a remplacé f par 0 :

$$q(x)y' + p(x)y = 0. \tag{ÉLHA}$$

C'est une équation à variables séparables quand on la réécrit comme:

$$\frac{y'}{y} + \frac{p(x)}{q(x)} = 0.$$

Elle se résout donc comme:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x,$$

ce qui donne encore, comme on l'a vu au dernier cours:

$$y_{SGEH}(x) = C\exp\left(-\Phi(x)\right) \qquad \text{où } \Phi(x) = \int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x$$

et C est une constante d'intégration. Le sigle SGEH signifie : solution **g**énérale de l'**é**quation **h**omogène.

L'équation linéaire homogène associée (ÉLHA) est l'équation où on a remplacé f par 0 :

$$q(x)y' + p(x)y = 0. \tag{ÉLHA}$$

C'est une équation à variables séparables quand on la réécrit comme:

$$\frac{y'}{y} + \frac{p(x)}{q(x)} = 0.$$

Elle se résout donc comme:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x,$$

ce qui donne encore, comme on l'a vu au dernier cours:

$$y_{SGEH}(x) = C\exp\left(-\Phi(x)\right) \qquad \text{où } \Phi(x) = \int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x$$

et C est une constante d'intégration. Le sigle SGEH signifie : **s**olution **g**énérale de l'**é**quation **h**omogène. « Générale » car nous avons de la sorte toutes les solutions de l'équation (ÉLHA)

L'équation linéaire homogène associée (ÉLHA) est l'équation où on a remplacé f par 0 :

$$q(x)y' + p(x)y = 0. \tag{ÉLHA}$$

C'est une équation à variables séparables quand on la réécrit comme:

$$\frac{y'}{y} + \frac{p(x)}{q(x)} = 0.$$

Elle se résout donc comme:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x,$$

ce qui donne encore, comme on l'a vu au dernier cours:

$$y_{SGEH}(x) = C\exp\left(-\Phi(x)\right) \qquad \text{où } \Phi(x) = \int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x$$

et C est une constante d'intégration. Le sigle SGEH signifie : **s**olution **g**énérale de l'**é**quation **h**omogène. « Générale » car nous avons de la sorte toutes les solutions de l'équation (ÉLHA) (une solution pour chaque valeur de C).

Un exemple

Question

Déterminer la solution générale de l'équation homogène

$$y' - \frac{2}{x}y = 0.$$

Un exemple

Question

Déterminer la solution générale de l'équation homogène

$$y' - \frac{2}{x}y = 0.$$

Réponse

On commence par mettre l'équation sous forme séparée:

$$\frac{y'}{y} - \frac{2}{x} = 0.$$

Un exemple

Question

Déterminer la solution générale de l'équation homogène

$$y' - \frac{2}{x} y = 0.$$

Réponse

On commence par mettre l'équation sous forme séparée:

$$\frac{y'}{y} - \frac{2}{x} = 0.$$

On la résout alors en intégrant:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} - 2 \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = 0$$

Un exemple

Question

Déterminer la solution générale de l'équation homogène

$$y' - \frac{2}{x}y = 0.$$

Réponse

On commence par mettre l'équation sous forme séparée:

$$\frac{y'}{y} - \frac{2}{x} = 0.$$

On la résout alors en intégrant:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} - 2\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = 0 \iff \ln|y| - 2\ln|x| = \tilde{C}$$

Un exemple

Question

Déterminer la solution générale de l'équation homogène

$$y' - \frac{2}{x}y = 0.$$

Réponse

On commence par mettre l'équation sous forme séparée:

$$\frac{y'}{y} - \frac{2}{x} = 0.$$

On la résout alors en intégrant:

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}y}{y} - 2\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = 0 &\iff \ln|y| - 2\ln|x| = \tilde{C} \\ &\iff \ln|y| - \ln(x^2) = \tilde{C} \end{aligned}$$

Un exemple

Question

Déterminer la solution générale de l'équation homogène

$$y' - \frac{2}{x}y = 0.$$

Réponse

On commence par mettre l'équation sous forme séparée:

$$\frac{y'}{y} - \frac{2}{x} = 0.$$

On la résout alors en intégrant:

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}y}{y} - 2\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = 0 &\iff \ln|y| - 2\ln|x| = \tilde{C} \\ &\iff \ln|y| - \ln(x^2) = \tilde{C} \\ &\iff y(x) = Cx^2 \end{aligned}$$

avec $C = \pm\exp(\tilde{C})$.

Contenu de la section

Trouver des solutions particulières de l’équation linéaire

Rappelons que, maintenant qu’on connaît toutes les solutions de l’équation homogène, connaître une solution particulière de l’équation linéaire permet de trouver toutes les solutions de l’équation.

Trouver des solutions particulières de l'équation linéaire

Rappelons que, maintenant qu'on connaît toutes les solutions de l'équation homogène, connaître une solution particulière de l'équation linéaire permet de trouver toutes les solutions de l'équation.

Il arrive dans certains cas qu'une solution particulière apparaisse de manière évidente.

Trouver des solutions particulières de l'équation linéaire

Rappelons que, maintenant qu'on connaît toutes les solutions de l'équation homogène, connaître une solution particulière de l'équation linéaire permet de trouver toutes les solutions de l'équation.

Il arrive dans certains cas qu'une solution particulière apparaisse de manière évidente. Nul besoin dans ce cas d'aller chercher plus loin.

Trouver des solutions particulières de l'équation linéaire

Rappelons que, maintenant qu'on connaît toutes les solutions de l'équation homogène, connaître une solution particulière de l'équation linéaire permet de trouver toutes les solutions de l'équation.

Il arrive dans certains cas qu'une solution particulière apparaisse de manière évidente. Nul besoin dans ce cas d'aller chercher plus loin.

Exemple

L'équation $\exp(x^2)y' + y = 1$ admet une solution évidente :

Trouver des solutions particulières de l'équation linéaire

Rappelons que, maintenant qu'on connaît toutes les solutions de l'équation homogène, connaître une solution particulière de l'équation linéaire permet de trouver toutes les solutions de l'équation.

Il arrive dans certains cas qu'une solution particulière apparaisse de manière évidente. Nul besoin dans ce cas d'aller chercher plus loin.

Exemple

L'équation $\exp(x^2)y' + y = 1$ admet une solution évidente : $y(x) = 1$.

Trouver des solutions particulières de l'équation linéaire

Rappelons que, maintenant qu'on connaît toutes les solutions de l'équation homogène, connaître une solution particulière de l'équation linéaire permet de trouver toutes les solutions de l'équation.

Il arrive dans certains cas qu'une solution particulière apparaisse de manière évidente. Nul besoin dans ce cas d'aller chercher plus loin.

Exemple

L'équation $\exp(x^2)y' + y = 1$ admet une solution évidente : $y(x) = 1$.
En effet, pour ce choix de y, $y'(x) = 0$ et donc l'équation est satisfaite.

Trouver des solutions particulières de l'équation linéaire

Rappelons que, maintenant qu'on connaît toutes les solutions de l'équation homogène, connaître une solution particulière de l'équation linéaire permet de trouver toutes les solutions de l'équation.

Il arrive dans certains cas qu'une solution particulière apparaisse de manière évidente. Nul besoin dans ce cas d'aller chercher plus loin.

Exemple

L'équation $\exp(x^2)y' + y = 1$ admet une solution évidente : $y(x) = 1$.
En effet, pour ce choix de y, $y'(x) = 0$ et donc l'équation est satisfaite.

Il existe toutefois une méthode qui permet de s'en sortir à chaque fois: la méthode de variation de la constante.

Méthode de variation de la constante

L'idée est de chercher une solution particulière sous la forme:

$$y_{SPEL} = u(x) \exp(-\Phi(x)),$$

Méthode de variation de la constante

L'idée est de chercher une solution particulière sous la forme:

$$y_{SPEL} = u(x)\exp\left(-\Phi(x)\right), \quad \text{où } \Phi(x) = \int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x$$

Méthode de variation de la constante

L'idée est de chercher une solution particulière sous la forme:

$$y_{SPEL} = u(x)\exp(-\Phi(x)), \quad \text{où } \Phi(x) = \int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x$$

où u est une fonction à déterminer.

Méthode de variation de la constante

L'idée est de chercher une solution particulière sous la forme:

$$y_{SPEL} = u(x)\exp\left(-\Phi(x)\right), \quad \text{où } \Phi(x) = \int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x$$

où u est une fonction à déterminer. Nous reconnaissons ici l'expression de y_{SGEH} où nous avons remplacé la constante par une fonction inconnue.

Méthode de variation de la constante

L'idée est de chercher une solution particulière sous la forme:

$$y_{SPEL} = u(x)\exp\left(-\Phi(x)\right), \quad \text{où } \Phi(x) = \int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x$$

où u est une fonction à déterminer. Nous reconnaissons ici l'expression de y_{SGEH} où nous avons remplacé la constante par une fonction inconnue. La fonction y_{SPEL} ci-dessus est solution de l'équation (EL) si et seulement si:

Méthode de variation de la constante

L'idée est de chercher une solution particulière sous la forme:

$$y_{SPEL} = u(x)\exp(-\Phi(x)), \quad \text{où } \Phi(x) = \int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$$

où u est une fonction à déterminer. Nous reconnaissons ici l'expression de y_{SGEH} où nous avons remplacé la constante par une fonction inconnue. La fonction y_{SPEL} ci-dessus est solution de l'équation (EL) si et seulement si:

$$q(x)y'_{SPEL} + p(x)y_{SPEL} = f(x)$$

Méthode de variation de la constante

L'idée est de chercher une solution particulière sous la forme:

$$y_{SPEL} = u(x)\exp(-\Phi(x)), \quad \text{où } \Phi(x) = \int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$$

où u est une fonction à déterminer. Nous reconnaissons ici l'expression de y_{SGEH} où nous avons remplacé la constante par une fonction inconnue. La fonction y_{SPEL} ci-dessus est solution de l'équation (EL) si et seulement si:

$$q(x)y'_{SPEL} + p(x)y_{SPEL} = f(x)$$

c'est-à-dire

Méthode de variation de la constante

L'idée est de chercher une solution particulière sous la forme:

$$y_{SPEL} = u(x)\exp\left(-\Phi(x)\right), \quad \text{où } \Phi(x) = \int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x$$

où u est une fonction à déterminer. Nous reconnaissons ici l'expression de y_{SGEH} où nous avons remplacé la constante par une fonction inconnue. La fonction y_{SPEL} ci-dessus est solution de l'équation (EL) si et seulement si:

$$q(x)y'_{SPEL} + p(x)y_{SPEL} = f(x)$$

c'est-à-dire

$$q(x)\Big(u'\exp\left(-\Phi(x)\right)$$

Méthode de variation de la constante

L'idée est de chercher une solution particulière sous la forme:

$$y_{SPEL} = u(x)\exp(-\Phi(x)), \quad \text{où } \Phi(x) = \int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x$$

où u est une fonction à déterminer. Nous reconnaissons ici l'expression de y_{SGEH} où nous avons remplacé la constante par une fonction inconnue. La fonction y_{SPEL} ci-dessus est solution de l'équation (EL) si et seulement si:

$$q(x)y'_{SPEL} + p(x)y_{SPEL} = f(x)$$

c'est-à-dire

$$q(x)\left(u'\exp(-\Phi(x)) - \frac{p(x)}{q(x)}u\exp(-\Phi(x))\right)$$

Méthode de variation de la constante

L'idée est de chercher une solution particulière sous la forme:

$$y_{SPEL} = u(x)\exp(-\Phi(x)), \quad \text{où } \Phi(x) = \int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x$$

où u est une fonction à déterminer. Nous reconnaissons ici l'expression de y_{SGEH} où nous avons remplacé la constante par une fonction inconnue. La fonction y_{SPEL} ci-dessus est solution de l'équation (EL) si et seulement si:

$$q(x)y'_{SPEL} + p(x)y_{SPEL} = f(x)$$

c'est-à-dire

$$q(x)\left(u'\exp(-\Phi(x)) - \frac{p(x)}{q(x)}u\exp(-\Phi(x))\right) + p(x)u\exp(-\Phi(x))$$

Méthode de variation de la constante

L'idée est de chercher une solution particulière sous la forme:

$$y_{SPEL} = u(x)\exp(-\Phi(x)), \quad \text{où } \Phi(x) = \int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x$$

où u est une fonction à déterminer. Nous reconnaissons ici l'expression de y_{SGEH} où nous avons remplacé la constante par une fonction inconnue. La fonction y_{SPEL} ci-dessus est solution de l'équation (EL) si et seulement si:

$$q(x)y'_{SPEL} + p(x)y_{SPEL} = f(x)$$

c'est-à-dire

$$q(x)\left(u'\exp(-\Phi(x)) - \frac{p(x)}{q(x)}u\exp(-\Phi(x))\right) + p(x)u\exp(-\Phi(x)) = f(x)$$

Méthode de variation de la constante

L'idée est de chercher une solution particulière sous la forme:

$$y_{SPEL} = u(x)\exp(-\Phi(x)), \quad \text{où } \Phi(x) = \int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x$$

où u est une fonction à déterminer. Nous reconnaissons ici l'expression de y_{SGEH} où nous avons remplacé la constante par une fonction inconnue. La fonction y_{SPEL} ci-dessus est solution de l'équation (EL) si et seulement si:

$$q(x)y'_{SPEL} + p(x)y_{SPEL} = f(x)$$

c'est-à-dire

$$q(x)\left(u'\exp(-\Phi(x)) - \frac{p(x)}{q(x)}u\exp(-\Phi(x))\right) + p(x)u\exp(-\Phi(x)) = f(x)$$

ou encore, puisque les deux derniers termes se simplifient, si :

Méthode de variation de la constante

L'idée est de chercher une solution particulière sous la forme:

$$y_{SPEL} = u(x)\exp(-\Phi(x)), \quad \text{où } \Phi(x) = \int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x$$

où u est une fonction à déterminer. Nous reconnaissons ici l'expression de y_{SGEH} où nous avons remplacé la constante par une fonction inconnue. La fonction y_{SPEL} ci-dessus est solution de l'équation (EL) si et seulement si:

$$q(x)y'_{SPEL} + p(x)y_{SPEL} = f(x)$$

c'est-à-dire

$$q(x)\left(u'\exp(-\Phi(x)) - \frac{p(x)}{q(x)}u\exp(-\Phi(x))\right) + p(x)u\exp(-\Phi(x)) = f(x)$$

ou encore, puisque les deux derniers termes se simplifient, si :

$$q(x)u'\exp(-\Phi(x)) = f(x)$$

Méthode de variation de la constante

L'idée est de chercher une solution particulière sous la forme:

$$y_{SPEL} = u(x)\exp(-\Phi(x)), \quad \text{où } \Phi(x) = \int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$$

où u est une fonction à déterminer. Nous reconnaissons ici l'expression de y_{SGEH} où nous avons remplacé la constante par une fonction inconnue. La fonction y_{SPEL} ci-dessus est solution de l'équation (EL) si et seulement si:

$$q(x)y'_{SPEL} + p(x)y_{SPEL} = f(x)$$

c'est-à-dire

$$q(x)\left(u'\exp(-\Phi(x)) - \frac{p(x)}{q(x)}u\exp(-\Phi(x))\right) + p(x)u\exp(-\Phi(x)) = f(x)$$

ou encore, puisque les deux derniers termes se simplifient, si :

$$q(x)u'\exp(-\Phi(x)) = f(x)$$

dont on tire l'expression de u:

$$u = \int \frac{f(x)\exp(\Phi(x))}{q(x)}\,dx.$$

Contenu de la section

Solution générale de l'équation linéaire

D'après les raisonnements précédents, la solution générale de l'équation linéaire (EL) de départ est donnée par:

Solution générale de l'équation linéaire

D'après les raisonnements précédents, la solution générale de l'équation linéaire (EL) de départ est donnée par:

$$y(x) = y_{SGEH}(x) + y_{SPEL}(x)$$

Solution générale de l'équation linéaire

D'après les raisonnements précédents, la solution générale de l'équation linéaire (EL) de départ est donnée par:

$$\begin{aligned} y(x) &= y_{SGEH}(x) + y_{SPEL}(x) \\ &= C\exp\left(-\Phi(x)\right) + y_{SPEL}(x) \end{aligned}$$

Solution générale de l'équation linéaire

D'après les raisonnements précédents, la solution générale de l'équation linéaire (EL) de départ est donnée par:

$$\begin{aligned} y(x) &= y_{SGEH}(x) + y_{SPEL}(x) \\ &= C\exp(-\Phi(x)) + y_{SPEL}(x) \end{aligned}$$

où $\Phi(x) = \int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x$.

Contenu de la section

1. ÉDO linéaires du premier ordre
   - Définitions
   - Étape 1 – Résolution de l'équation linéaire homogène associée (ÉLHA)
   - Étape 2 – Solution particulière de l'équation linéaire (SPEL)
   - Étape 3 – Écrire la solution générale de l'équation linéaire
   - Étape 4 – Déterminer la valeur de la constante d'intégration grâce aux conditions initiales.

Déterminer la valeur de C

Si des conditions initiales ont été fournies dans l'exercice, il faut maintenant les prendre en compte.

Déterminer la valeur de C

Si des conditions initiales ont été fournies dans l'exercice, il faut maintenant les prendre en compte. La solution générale est:

Déterminer la valeur de C

Si des conditions initiales ont été fournies dans l'exercice, il faut maintenant les prendre en compte. La solution générale est:

$$y(x) = C \exp(-\Phi(x)) + y_{SPEL}(x)$$

Pour trouver la solution particulière vérifiant les conditions initiales, il faut

Déterminer la valeur de C

Si des conditions initiales ont été fournies dans l'exercice, il faut maintenant les prendre en compte. La solution générale est:

$$y(x) = C \exp(-\Phi(x)) + y_{SPEL}(x)$$

Pour trouver la solution particulière vérifiant les conditions initiales, il faut déterminer la valeur de la constante d'intégration C qui correspond à condition initiale.

Déterminer la valeur de C

Si des conditions initiales ont été fournies dans l'exercice, il faut maintenant les prendre en compte. La solution générale est:

$$y(x) = C \exp(-\Phi(x)) + y_{SPEL}(x)$$

Pour trouver la solution particulière vérifiant les conditions initiales, il faut déterminer la valeur de la constante d'intégration C qui correspond à condition initiale.

Remarque

En général la solution particulière trouvée à l'étape 2 n'est pas la solution particulière qui vérifie les conditions initiales.

Déterminer la valeur de C

Si des conditions initiales ont été fournies dans l'exercice, il faut maintenant les prendre en compte. La solution générale est:

$$y(x) = C\exp(-\Phi(x)) + y_{SPEL}(x)$$

Pour trouver la solution particulière vérifiant les conditions initiales, il faut déterminer la valeur de la constante d'intégration C qui correspond à condition initiale.

Remarque

En général la solution particulière trouvée à l'étape 2 n'est pas la solution particulière qui vérifie les conditions initiales. Cette dernière étape est donc importante !

Exemple

Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$y' + 2xy = 2x, \quad y(0) = 2 \tag{EL}$$

Exemple

Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$y' + 2xy = 2x, \quad y(0) = 2 \tag{EL}$$

1. **Étape 1:** On résout d'abord l'ÉLHA : $y' + 2xy = 0$.

Exemple

Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$y' + 2xy = 2x, \quad y(0) = 2 \qquad \text{(EL)}$$

1. **Étape 1:** On résout d'abord l'ÉLHA : $y' + 2xy = 0$. On écrit l'équation sous forme séparée:
$$\frac{y'}{y} + 2x = 0.$$

Exemple

Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$y' + 2xy = 2x, \quad y(0) = 2 \tag{EL}$$

1. **Étape 1:** On résout d'abord l'ÉLHA : $y' + 2xy = 0$. On écrit l'équation sous forme séparée:
$$\frac{y'}{y} + 2x = 0.$$
On intègre alors l'équation:
$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} + \int 2x\,\mathrm{d}x = 0 \iff$$

Exemple

Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$y' + 2xy = 2x, \quad y(0) = 2 \tag{EL}$$

1. **Étape 1:** On résout d'abord l'ÉLHA : $y' + 2xy = 0$. On écrit l'équation sous forme séparée:

$$\frac{y'}{y} + 2x = 0.$$

On intègre alors l'équation:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} + \int 2x\,\mathrm{d}x = 0 \iff \ln|y| + \frac{1}{2}x^2 = \tilde{C}$$

$$\iff$$

Exemple

Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$y' + 2xy = 2x, \quad y(0) = 2 \tag{EL}$$

1. **Étape 1:** On résout d'abord l'ÉLHA : $y' + 2xy = 0$. On écrit l'équation sous forme séparée:

$$\frac{y'}{y} + 2x = 0.$$

On intègre alors l'équation:

$$\int \frac{dy}{y} + \int 2x \, dx = 0 \iff \ln|y| + \frac{1}{2}x^2 = \tilde{C}$$

$$\iff y_{SGEH}(x) = C \exp\left(-x^2\right),$$

Exemple

Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$y' + 2xy = 2x, \quad y(0) = 2 \tag{EL}$$

1. **Étape 1:** On résout d'abord l'ÉLHA : $y' + 2xy = 0$. On écrit l'équation sous forme séparée:
$$\frac{y'}{y} + 2x = 0.$$
On intègre alors l'équation:
$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} + \int 2x\,\mathrm{d}x = 0 \iff \ln|y| + \frac{1}{2}x^2 = \tilde{C}$$
$$\iff y_{SGEH}(x) = C\exp\left(-x^2\right),$$
pour une certaine constante C.

Exemple

2 **Étape 2:** On cherche une solution particulière de l'équation (EL).

Exemple

2 **Étape 2:** On cherche une solution particulière de l'équation (EL). Par la méthode de la variation de la constante,

Exemple

2 **Étape 2:** On cherche une solution particulière de l'équation (EL). Par la méthode de la variation de la constante, on prend y de la forme

$$y(x) = u(x)\exp\left(-x^2\right)$$

et on cherche un u qui convient.

Exemple

2 **Étape 2:** On cherche une solution particulière de l'équation (EL). Par la méthode de la variation de la constante, on prend y de la forme

$$y(x) = u(x)\exp(-x^2)$$

et on cherche un u qui convient. Alors:

$$y'(x) = u'(x)\exp\left(-x^2\right) - 2xu(x)\exp\left(-x^2\right)$$

Exemple

2 **Étape 2:** On cherche une solution particulière de l'équation (EL). Par la méthode de la variation de la constante, on prend y de la forme

$$y(x) = u(x)\exp(-x^2)$$

et on cherche un u qui convient. Alors:

$$y'(x) = u'(x)\exp\left(-x^2\right) - 2xu(x)\exp\left(-x^2\right)$$

Exemple

2 **Étape 2:** On cherche une solution particulière de l'équation (EL). Par la méthode de la variation de la constante, on prend y de la forme

$$y(x) = u(x)\exp(-x^2)$$

et on cherche un u qui convient. Alors:

$$y'(x) = u'(x)\exp\left(-x^2\right) - 2xu(x)\exp\left(-x^2\right)$$

En remplaçant dans l'équation $y' + 2xy = 2x$, nous obtenons :

$$u'(x)\exp\left(-x^2\right) - 2xu(x)\exp\left(-x^2\right)$$

Exemple

2 **Étape 2:** On cherche une solution particulière de l'équation (EL). Par la méthode de la variation de la constante, on prend y de la forme

$$y(x) = u(x)\exp(-x^2)$$

et on cherche un u qui convient. Alors:

$$y'(x) = u'(x)\exp\left(-x^2\right) - 2xu(x)\exp\left(-x^2\right)$$

En remplaçant dans l'équation $y' + 2xy = 2x$, nous obtenons :

$$u'(x)\exp\left(-x^2\right) - 2xu(x)\exp\left(-x^2\right) + 2xu(x)\exp\left(-x^2\right) =$$

Exemple

2 **Étape 2:** On cherche une solution particulière de l'équation (EL). Par la méthode de la variation de la constante, on prend y de la forme

$$y(x) = u(x)\exp(-x^2)$$

et on cherche un u qui convient. Alors:

$$y'(x) = u'(x)\exp\left(-x^2\right) - 2xu(x)\exp\left(-x^2\right)$$

En remplaçant dans l'équation $y' + 2xy = 2x$, nous obtenons :

$$u'(x)\exp\left(-x^2\right) - 2xu(x)\exp\left(-x^2\right) + 2xu(x)\exp\left(-x^2\right) = 2x,$$

Exemple

2 **Étape 2:** On cherche une solution particulière de l'équation (EL). Par la méthode de la variation de la constante, on prend y de la forme

$$y(x) = u(x)\exp(-x^2)$$

et on cherche un u qui convient. Alors:

$$y'(x) = u'(x)\exp\left(-x^2\right) - 2xu(x)\exp\left(-x^2\right)$$

En remplaçant dans l'équation $y' + 2xy = 2x$, nous obtenons :

$$u'(x)\exp\left(-x^2\right) - 2xu(x)\exp\left(-x^2\right) + 2xu(x)\exp\left(-x^2\right) = 2x,$$

d'où

$$u'(x) = 2x\exp\left(x^2\right)$$

Exemple

2 **Étape 2:** On cherche une solution particulière de l'équation (EL). Par la méthode de la variation de la constante, on prend y de la forme

$$y(x) = u(x)\exp(-x^2)$$

et on cherche un u qui convient. Alors:

$$y'(x) = u'(x)\exp\left(-x^2\right) - 2xu(x)\exp\left(-x^2\right)$$

En remplaçant dans l'équation $y' + 2xy = 2x$, nous obtenons :

$$u'(x)\exp\left(-x^2\right) - 2xu(x)\exp\left(-x^2\right) + 2xu(x)\exp\left(-x^2\right) = 2x,$$

d'où

$$u'(x) = 2x\exp\left(x^2\right)$$

et donc $u(x) = \exp\left(x^2\right)$.

Exemple

2 **Étape 2:** On cherche une solution particulière de l'équation (EL). Par la méthode de la variation de la constante, on prend y de la forme

$$y(x) = u(x)\exp\left(-x^2\right)$$

et on cherche un u qui convient. Alors:

$$y'(x) = u'(x)\exp\left(-x^2\right) - 2xu(x)\exp\left(-x^2\right)$$

En remplaçant dans l'équation $y' + 2xy = 2x$, nous obtenons :

$$u'(x)\exp\left(-x^2\right) - 2xu(x)\exp\left(-x^2\right) + 2xu(x)\exp\left(-x^2\right) = 2x,$$

d'où

$$u'(x) = 2x\exp\left(x^2\right)$$

et donc $u(x) = \exp\left(x^2\right)$. Une solution particulière de notre ÉDO est donc donnée par:

Exemple

2 **Étape 2:** On cherche une solution particulière de l'équation (EL). Par la méthode de la variation de la constante, on prend y de la forme

$$y(x) = u(x)\exp\left(-x^2\right)$$

et on cherche un u qui convient. Alors:

$$y'(x) = u'(x)\exp\left(-x^2\right) - 2xu(x)\exp\left(-x^2\right)$$

En remplaçant dans l'équation $y' + 2xy = 2x$, nous obtenons :

$$u'(x)\exp\left(-x^2\right) - 2xu(x)\exp\left(-x^2\right) + 2xu(x)\exp\left(-x^2\right) = 2x,$$

d'où

$$u'(x) = 2x\exp\left(x^2\right)$$

et donc $u(x) = \exp\left(x^2\right)$. Une solution particulière de notre ÉDO est donc donnée par:

$$y(x) = exp(x^2)\exp\left(-x^2\right)$$

Exemple

2 **Étape 2:** On cherche une solution particulière de l'équation (EL). Par la méthode de la variation de la constante, on prend y de la forme

$$y(x) = u(x)\exp\left(-x^2\right)$$

et on cherche un u qui convient. Alors:

$$y'(x) = u'(x)\exp\left(-x^2\right) - 2xu(x)\exp\left(-x^2\right)$$

En remplaçant dans l'équation $y' + 2xy = 2x$, nous obtenons :

$$u'(x)\exp\left(-x^2\right) - 2xu(x)\exp\left(-x^2\right) + 2xu(x)\exp\left(-x^2\right) = 2x,$$

d'où

$$u'(x) = 2x\exp\left(x^2\right)$$

et donc $u(x) = \exp\left(x^2\right)$. Une solution particulière de notre ÉDO est donc donnée par:

$$y(x) = exp(x^2)\exp\left(-x^2\right) = 1.$$

Exemple

3 **Étape 3:** La solution générale de l'équation (EL) est donc:

$$y(x) = 1 + C\exp\left(-x^2\right),$$

pour $C \in \mathbb{R}$.

Exemple

3 **Étape 3:** La solution générale de l'équation (EL) est donc:

$$y(x) = 1 + C\exp\left(-x^2\right),$$

pour $C \in \mathbb{R}$.

4 **Étape 4:** On veut trouver une solution particulière au problème de Cauchy, c'est-à-dire qu'on veut que $y(0) = 2$.

Exemple

3 **Étape 3:** La solution générale de l'équation (EL) est donc:

$$y(x) = 1 + C\exp\left(-x^2\right),$$

pour $C \in \mathbb{R}$.

4 **Étape 4:** On veut trouver une solution particulière au problème de Cauchy, c'est-à-dire qu'on veut que $y(0) = 2$. L'expression ci-dessus évaluée en 0 donne:

Exemple

3 **Étape 3:** La solution générale de l'équation (EL) est donc:

$$y(x) = 1 + C\exp\left(-x^2\right),$$

pour $C \in \mathbb{R}$.

4 **Étape 4:** On veut trouver une solution particulière au problème de Cauchy, c'est-à-dire qu'on veut que $y(0) = 2$. L'expression ci-dessus évaluée en 0 donne:

$$y(0) =$$

Exemple

3 **Étape 3:** La solution générale de l'équation (EL) est donc:

$$y(x) = 1 + C\exp\left(-x^2\right),$$

pour $C \in \mathbb{R}$.

4 **Étape 4:** On veut trouver une solution particulière au problème de Cauchy, c'est-à-dire qu'on veut que $y(0) = 2$. L'expression ci-dessus évaluée en 0 donne:

$$y(0) = 1 + C =$$

Exemple

3 **Étape 3:** La solution générale de l'équation (EL) est donc:

$$y(x) = 1 + C\exp\left(-x^2\right),$$

pour $C \in \mathbb{R}$.

4 **Étape 4:** On veut trouver une solution particulière au problème de Cauchy, c'est-à-dire qu'on veut que $y(0) = 2$. L'expression ci-dessus évaluée en 0 donne:

$$y(0) = 1 + C = 2,$$

Exemple

3 **Étape 3:** La solution générale de l'équation (EL) est donc:

$$y(x) = 1 + C\exp\left(-x^2\right),$$

pour $C \in \mathbb{R}$.

4 **Étape 4:** On veut trouver une solution particulière au problème de Cauchy, c'est-à-dire qu'on veut que $y(0) = 2$. L'expression ci-dessus évaluée en 0 donne:

$$y(0) = 1 + C = 2,$$

et donc $C = 1$.

Exemple

3. **Étape 3:** La solution générale de l'équation (EL) est donc:
$$y(x) = 1 + C\exp\left(-x^2\right),$$
pour $C \in \mathbb{R}$.

4. **Étape 4:** On veut trouver une solution particulière au problème de Cauchy, c'est-à-dire qu'on veut que $y(0) = 2$. L'expression ci-dessus évaluée en 0 donne:
$$y(0) = 1 + C = 2,$$
et donc $C = 1$. La solution finale du problème de Cauchy est donc:
$$y(x) = 1 + \exp\left(-x^2\right).$$

Question

En utilisant la variation de la constante, trouver une solution de

$$y' - \frac{2}{x}y = x.$$

Question

En utilisant la variation de la constante, trouver une solution de

$$y' - \frac{2}{x}y = x.$$

Réponse

La solution générale de l'équation homogène $y' - \frac{2}{x}y = 0$ est donnée par $y_{SGEH}(x) = Cx^2$.

Question

En utilisant la variation de la constante, trouver une solution de

$$y' - \frac{2}{x}y = x.$$

Réponse

La solution générale de l'équation homogène $y' - \frac{2}{x}y = 0$ est donnée par $y_{SGEH}(x) = Cx^2$. On cherche alors une solution sous la forme

$$y(x) = u(x)x^2,$$

pour une fonction inconnue u.

Question

En utilisant la variation de la constante, trouver une solution de

$$y' - \frac{2}{x}y = x.$$

Réponse

La solution générale de l'équation homogène $y' - \frac{2}{x}y = 0$ est donnée par $y_{SGEH}(x) = Cx^2$. On cherche alors une solution sous la forme

$$y(x) = u(x)x^2,$$

pour une fonction inconnue u. Alors $y'(x) = u'(x)x^2 + 2xu(x)$ et donc:

$$y'(x) - \frac{2}{x}y(x)$$

Question

En utilisant la variation de la constante, trouver une solution de

$$y' - \frac{2}{x}y = x.$$

Réponse

La solution générale de l'équation homogène $y' - \frac{2}{x}y = 0$ est donnée par $y_{SGEH}(x) = Cx^2$. On cherche alors une solution sous la forme

$$y(x) = u(x)x^2,$$

pour une fonction inconnue u. Alors $y'(x) = u'(x)x^2 + 2xu(x)$ et donc:

$$y'(x) - \frac{2}{x}y(x) = u'(x)x^2 + 2xu(x) - \frac{2}{x}u(x)x^2$$

Question

En utilisant la variation de la constante, trouver une solution de

$$y' - \frac{2}{x}y = x.$$

Réponse

La solution générale de l'équation homogène $y' - \frac{2}{x}y = 0$ est donnée par $y_{SGEH}(x) = Cx^2$. On cherche alors une solution sous la forme

$$y(x) = u(x)x^2,$$

pour une fonction inconnue u. Alors $y'(x) = u'(x)x^2 + 2xu(x)$ et donc:

$$y'(x) - \frac{2}{x}y(x) = u'(x)x^2 + 2xu(x) - \frac{2}{x}u(x)x^2 = u'(x)x^2.$$

Question

En utilisant la variation de la constante, trouver une solution de

$$y' - \frac{2}{x}y = x.$$

Réponse

La solution générale de l'équation homogène $y' - \frac{2}{x}y = 0$ est donnée par $y_{SGEH}(x) = Cx^2$. On cherche alors une solution sous la forme

$$y(x) = u(x)x^2,$$

pour une fonction inconnue u. Alors $y'(x) = u'(x)x^2 + 2xu(x)$ et donc:

$$y'(x) - \frac{2}{x}y(x) = u'(x)x^2 + 2xu(x) - \frac{2}{x}u(x)x^2 = u'(x)x^2.$$

Et y est solution de l'équation si et seulement si

$$u'(x)x^2 = x$$

Question

En utilisant la variation de la constante, trouver une solution de
$$y' - \frac{2}{x}y = x.$$

Réponse

La solution générale de l'équation homogène $y' - \frac{2}{x}y = 0$ est donnée par $y_{SGEH}(x) = Cx^2$. On cherche alors une solution sous la forme
$$y(x) = u(x)x^2,$$
pour une fonction inconnue u. Alors $y'(x) = u'(x)x^2 + 2xu(x)$ et donc:
$$y'(x) - \frac{2}{x}y(x) = u'(x)x^2 + 2xu(x) - \frac{2}{x}u(x)x^2 = u'(x)x^2.$$
Et y est solution de l'équation si et seulement si
$$u'(x)x^2 = x \iff u'(x) = \frac{1}{x}$$

Question

En utilisant la variation de la constante, trouver une solution de
$$y' - \frac{2}{x}y = x.$$

Réponse

La solution générale de l'équation homogène $y' - \frac{2}{x}y = 0$ est donnée par $y_{SGEH}(x) = Cx^2$. On cherche alors une solution sous la forme
$$y(x) = u(x)x^2,$$
pour une fonction inconnue u. Alors $y'(x) = u'(x)x^2 + 2xu(x)$ et donc:
$$y'(x) - \frac{2}{x}y(x) = u'(x)x^2 + 2xu(x) - \frac{2}{x}u(x)x^2 = u'(x)x^2.$$
Et y est solution de l'équation si et seulement si
$$u'(x)x^2 = x \iff u'(x) = \frac{1}{x} \iff u(x) = \ln|x|.$$

Question

En utilisant la variation de la constante, trouver une solution de

$$y' - \frac{2}{x}y = x.$$

Réponse

La solution générale de l'équation homogène $y' - \frac{2}{x}y = 0$ est donnée par $y_{SGEH}(x) = Cx^2$. On cherche alors une solution sous la forme

$$y(x) = u(x)x^2,$$

pour une fonction inconnue u. Alors $y'(x) = u'(x)x^2 + 2xu(x)$ et donc:

$$y'(x) - \frac{2}{x}y(x) = u'(x)x^2 + 2xu(x) - \frac{2}{x}u(x)x^2 = u'(x)x^2.$$

Et y est solution de l'équation si et seulement si

$$u'(x)x^2 = x \iff u'(x) = \frac{1}{x} \iff u(x) = \ln|x|.$$

Une solution particulière de l'équation est donc donnée par:

$$y(x) = \ln|x|x^2.$$

Contenu de la section

Équations linéaires du second ordre à coefficients constants

Définition

Une *équation linéaire du second ordre à coefficients constants* est une équation de la forme

Équations linéaires du second ordre à coefficients constants

Définition

Une *équation linéaire du second ordre à coefficients constants* est une équation de la forme :

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

Équations linéaires du second ordre à coefficients constants

Définition

Une *équation linéaire du second ordre à coefficients constants* est une équation de la forme :

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

pour certaines constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$ et pour une fonction donnée f.

Équations linéaires du second ordre à coefficients constants

Définition

Une *équation linéaire du second ordre à coefficients constants* est une équation de la forme :

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

pour certaines constantes $a,b,c \in \mathbb{R}$ et pour une fonction donnée f.

Exemple

- $y'' + 2y' + y = 0$

Équations linéaires du second ordre à coefficients constants

Définition

Une *équation linéaire du second ordre à coefficients constants* est une équation de la forme :

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

pour certaines constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$ et pour une fonction donnée f.

Exemple

- $y'' + 2y' + y = 0$ (linéaire, homogène, à coefficients constants)

Équations linéaires du second ordre à coefficients constants

Définition

Une *équation linéaire du second ordre à coefficients constants* est une équation de la forme :

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

pour certaines constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$ et pour une fonction donnée f.

Exemple

- $y'' + 2y' + y = 0$ (linéaire, homogène, à coefficients constants)
- $y'' + 2y' + y = x^2$

Équations linéaires du second ordre à coefficients constants

Définition

Une *équation linéaire du second ordre à coefficients constants* est une équation de la forme :

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

pour certaines constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$ et pour une fonction donnée f.

Exemple

- $y'' + 2y' + y = 0$ (linéaire, homogène, à coefficients constants)
- $y'' + 2y' + y = x^2$ (linéaire, non-homogène, à coefficients constants)

Équations linéaires du second ordre à coefficients constants

Définition

Une *équation linéaire du second ordre à coefficients constants* est une équation de la forme :

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

pour certaines constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$ et pour une fonction donnée f.

Exemple

- $y'' + 2y' + y = 0$ (linéaire, homogène, à coefficients constants)
- $y'' + 2y' + y = x^2$ (linéaire, non-homogène, à coefficients constants)
- $xy'' + 2xy' + y = x^2$

Équations linéaires du second ordre à coefficients constants

Définition

Une *équation linéaire du second ordre à coefficients constants* est une équation de la forme :

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

pour certaines constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$ et pour une fonction donnée f.

Exemple

- $y'' + 2y' + y = 0$ (linéaire, homogène, à coefficients constants)
- $y'' + 2y' + y = x^2$ (linéaire, non-homogène, à coefficients constants)
- $xy'' + 2xy' + y = x^2$ (non-homogène, à coefficients non-constants)

Méthode de résolution générale

La résolution d'une telle équation se fait en quatre étapes comme dans le cas des équations linéaires du premier ordre:

Méthode de résolution générale

La résolution d'une telle équation se fait en quatre étapes comme dans le cas des équations linéaires du premier ordre:

1. Étape 1: Résolution de l'équation linéaire homogène associée:
$$ay'' + by' + cy = 0.$$

Méthode de résolution générale

La résolution d'une telle équation se fait en quatre étapes comme dans le cas des équations linéaires du premier ordre:

1. Étape 1: Résolution de l'équation linéaire homogène associée:
$$ay'' + by' + cy = 0.$$
2. Étape 2: trouver une solution particulière de l'équation linéaire générale (avec f.)

Méthode de résolution générale

La résolution d'une telle équation se fait en quatre étapes comme dans le cas des équations linéaires du premier ordre:

1. Étape 1: Résolution de l'équation linéaire homogène associée:
$$ay'' + by' + cy = 0.$$
2. Étape 2: trouver une solution particulière de l'équation linéaire générale (avec f.)
3. Étape 3: écrire la solution générale de l'équation linéaire

Méthode de résolution générale

La résolution d'une telle équation se fait en quatre étapes comme dans le cas des équations linéaires du premier ordre:

1. Étape 1: Résolution de l'équation linéaire homogène associée:
$$ay'' + by' + cy = 0.$$
2. Étape 2: trouver une solution particulière de l'équation linéaire générale (avec f.)
3. Étape 3: écrire la solution générale de l'équation linéaire comme la somme de la solution particulière de l'équation linéaire

Méthode de résolution générale

La résolution d'une telle équation se fait en quatre étapes comme dans le cas des équations linéaires du premier ordre:

1. Étape 1: Résolution de l'équation linéaire homogène associée:
$$ay'' + by' + cy = 0.$$
2. Étape 2: trouver une solution particulière de l'équation linéaire générale (avec f.)
3. Étape 3: écrire la solution générale de l'équation linéaire comme la somme de la solution particulière de l'équation linéaire et de la solution générale de l'équation homogène

Méthode de résolution générale

La résolution d′une telle équation se fait en quatre étapes comme dans le cas des équations linéaires du premier ordre:

1. Étape 1: Résolution de l′équation linéaire homogène associée:
$$ay'' + by' + cy = 0.$$
2. Étape 2: trouver une solution particulière de l′équation linéaire générale (avec f.)
3. Étape 3: écrire la solution générale de l′équation linéaire comme la somme de la solution particulière de l′équation linéaire et de la solution générale de l′équation homogène
4. Étape 4 (si requise): Déterminer une solution exacte grâce au conditions initiales d′un problème de Cauchy

Méthode de résolution générale

La résolution d'une telle équation se fait en quatre étapes comme dans le cas des équations linéaires du premier ordre:

1. Étape 1: Résolution de l'équation linéaire homogène associée:
$$ay'' + by' + cy = 0.$$
2. Étape 2: trouver une solution particulière de l'équation linéaire générale (avec f.)
3. Étape 3: écrire la solution générale de l'équation linéaire comme la somme de la solution particulière de l'équation linéaire et de la solution générale de l'équation homogène
4. Étape 4 (si requise): Déterminer une solution exacte grâce au conditions initiales d'un problème de Cauchy

Dans le cas des équations du second ordre les étapes 1 et 2 sont plus compliquées.

Méthode de résolution générale

La résolution d'une telle équation se fait en quatre étapes comme dans le cas des équations linéaires du premier ordre:

1. Étape 1: Résolution de l'équation linéaire homogène associée:
$$ay'' + by' + cy = 0.$$
2. Étape 2: trouver une solution particulière de l'équation linéaire générale (avec f.)
3. Étape 3: écrire la solution générale de l'équation linéaire comme la somme de la solution particulière de l'équation linéaire et de la solution générale de l'équation homogène
4. Étape 4 (si requise): Déterminer une solution exacte grâce au conditions initiales d'un problème de Cauchy

Dans le cas des équations du second ordre les étapes 1 et 2 sont plus compliquées. Aujourd'hui nous allons voir comment effectuer l' étape 1.

Méthode de résolution générale

La résolution d'une telle équation se fait en quatre étapes comme dans le cas des équations linéaires du premier ordre:

1. Étape 1: Résolution de l'équation linéaire homogène associée:
$$ay'' + by' + cy = 0.$$
2. Étape 2: trouver une solution particulière de l'équation linéaire générale (avec f.)
3. Étape 3: écrire la solution générale de l'équation linéaire comme la somme de la solution particulière de l'équation linéaire et de la solution générale de l'équation homogène
4. Étape 4 (si requise): Déterminer une solution exacte grâce au conditions initiales d'un problème de Cauchy

Dans le cas des équations du second ordre les étapes 1 et 2 sont plus compliquées. Aujourd'hui nous allons voir comment effectuer l' étape 1. Au prochain cours nous verrons comment traiter l'étape 2.

Contenu de la section

2 Équations linéaires du second ordre à coefficients constants
- Étape 1 pour les équations du second ordre:Résolution de l′équation homogène associée

Polynôme caractéristique

On commence par résoudre l'équation linéaire homogène associée (ÉLHA) :

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

Polynôme caractéristique

On commence par résoudre l'équation linéaire homogène associée (ÉLHA) :

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

Dans le cas des équations du premier ordre cela revenait à résoudre une équation à variables séparables.

Polynôme caractéristique

On commence par résoudre l'équation linéaire homogène associée (ÉLHA) :

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

Dans le cas des équations du premier ordre cela revenait à résoudre une équation à variables séparables. Dans le cas présent, la méthode de séparation des variables ne s'applique pas.

Polynôme caractéristique

On commence par résoudre l'équation linéaire homogène associée (ÉLHA) :

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

Dans le cas des équations du premier ordre cela revenait à résoudre une équation à variables séparables. Dans le cas présent, la méthode de séparation des variables ne s'applique pas.

À une telle équation on associe son *polynôme caractéristique* :

Polynôme caractéristique

On commence par résoudre l'équation linéaire homogène associée (ÉLHA) :

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

Dans le cas des équations du premier ordre cela revenait à résoudre une équation à variables séparables. Dans le cas présent, la méthode de séparation des variables ne s'applique pas.

À une telle équation on associe son *polynôme caractéristique* :

$$\lambda \mapsto a\lambda^2 + b\lambda + c.$$

Polynôme caractéristique

On commence par résoudre l'équation linéaire homogène associée (ÉLHA) :

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

Dans le cas des équations du premier ordre cela revenait à résoudre une équation à variables séparables. Dans le cas présent, la méthode de séparation des variables ne s'applique pas.

À une telle équation on associe son *polynôme caractéristique* :

$$\lambda \mapsto a\lambda^2 + b\lambda + c.$$

Selon le nombre de racines réelles de ce polynôme, c'est-à-dire en fonction du discriminant de ce polynôme, la solution générale prendra une forme différente.

Solutions de l'équation linéaire homogène associée

Théorème

Soit $ay'' + by' + cy = 0$ *l'ÉLHA et* $a\lambda^2 + b\lambda + c$ *son polynôme caractéristique. Alors:*

Solutions de l'équation linéaire homogène associée

Théorème

Soit $ay'' + by' + cy = 0$ l'ÉLHA et $a\lambda^2 + b\lambda + c$ son polynôme caractéristique. Alors:

Cas 1 *Si $b^2 - 4ac > 0$, on note $\lambda_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ et $\lambda_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ les deux racines du polynôme caractéristique.*

Solutions de l'équation linéaire homogène associée

Théorème

Soit $ay'' + by' + cy = 0$ *l'ÉLHA et* $a\lambda^2 + b\lambda + c$ *son polynôme caractéristique. Alors:*

Cas 1 Si $b^2 - 4ac > 0$, *on note* $\lambda_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ *et* $\lambda_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ *les deux racines du polynôme caractéristique. La solution générale de l'équation homogène (SGEH) est alors :*

Solutions de l'équation linéaire homogène associée

Théorème

Soit $ay'' + by' + cy = 0$ *l'ÉLHA et* $a\lambda^2 + b\lambda + c$ *son polynôme caractéristique. Alors:*

Cas 1 Si $b^2 - 4ac > 0$, *on note* $\lambda_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ *et* $\lambda_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ *les deux racines du polynôme caractéristique. La solution générale de l'équation homogène (SGEH) est alors :*

$$y_{SGEH}(x) = C_1 \exp(\lambda_1 x) + C_2 \exp(\lambda_2 x)$$

Solutions de l'équation linéaire homogène associée

Théorème

Soit $ay'' + by' + cy = 0$ *l'ÉLHA et* $a\lambda^2 + b\lambda + c$ *son polynôme caractéristique. Alors:*

Cas 1 *Si* $b^2 - 4ac > 0$, *on note* $\lambda_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ *et* $\lambda_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ *les deux racines du polynôme caractéristique. La solution générale de l'équation homogène (SGEH) est alors :*

$$y_{SGEH}(x) = C_1 \exp(\lambda_1 x) + C_2 \exp(\lambda_2 x)$$

où C_1 *et* C_2 *sont des constantes d'intégration.*

Solutions de l'équation linéaire homogène associée

Théorème

Soit $ay'' + by' + cy = 0$ *l'ÉLHA et* $a\lambda^2 + b\lambda + c$ *son polynôme caractéristique. Alors:*

Cas 1 Si $b^2 - 4ac > 0$, *on note* $\lambda_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ *et* $\lambda_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ *les deux racines du polynôme caractéristique. La solution générale de l'équation homogène (SGEH) est alors :*

$$y_{SGEH}(x) = C_1 \exp(\lambda_1 x) + C_2 \exp(\lambda_2 x)$$

où C_1 *et* C_2 *sont des constantes d'intégration.*

Cas 2 Si $b^2 - 4ac = 0$, *on note* $\lambda = \frac{-b}{2a}$ *l'unique racine du polynôme caractéristique.*

Solutions de l'équation linéaire homogène associée

Théorème

Soit $ay'' + by' + cy = 0$ *l'ÉLHA et* $a\lambda^2 + b\lambda + c$ *son polynôme caractéristique. Alors:*

Cas 1 Si $b^2 - 4ac > 0$, *on note* $\lambda_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ *et* $\lambda_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ *les deux racines du polynôme caractéristique. La solution générale de l'équation homogène (SGEH) est alors :*

$$y_{SGEH}(x) = C_1 \exp(\lambda_1 x) + C_2 \exp(\lambda_2 x)$$

où C_1 *et* C_2 *sont des constantes d'intégration.*

Cas 2 Si $b^2 - 4ac = 0$, *on note* $\lambda = \frac{-b}{2a}$ *l'unique racine du polynôme caractéristique. La solution générale de l'équation homogène (SGEH) est alors :*

Solutions de l'équation linéaire homogène associée

Théorème

Soit $ay'' + by' + cy = 0$ *l'ÉLHA et* $a\lambda^2 + b\lambda + c$ *son polynôme caractéristique. Alors:*

Cas 1 *Si* $b^2 - 4ac > 0$, *on note* $\lambda_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ *et* $\lambda_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ *les deux racines du polynôme caractéristique. La solution générale de l'équation homogène (SGEH) est alors :*

$$y_{SGEH}(x) = C_1 \exp(\lambda_1 x) + C_2 \exp(\lambda_2 x)$$

où C_1 *et* C_2 *sont des constantes d'intégration.*

Cas 2 *Si* $b^2 - 4ac = 0$, *on note* $\lambda = \frac{-b}{2a}$ *l'unique racine du polynôme caractéristique. La solution générale de l'équation homogène (SGEH) est alors :*

$$y_{SGEH}(x) = (C_1 + C_2 x) \exp(\lambda x)$$

où C_1 *et* C_2 *sont des constantes d'intégration.*

Théorème (continué)

Cas 3 Si $b^2 - 4ac < 0$, on note $\rho = \frac{-b}{2a}$ et $\omega = \frac{1}{2a}\sqrt{4ac - b^2}$.

Théorème (continué)

Cas 3 Si $b^2 - 4ac < 0$, on note $\rho = \frac{-b}{2a}$ et $\omega = \frac{1}{2a}\sqrt{4ac - b^2}$. La solution générale de l'équation homogǹe (SGEH) est alors :

Théorème (continué)

Cas 3 Si $b^2 - 4ac < 0$, *on note* $\rho = \frac{-b}{2a}$ *et* $\omega = \frac{1}{2a}\sqrt{4ac - b^2}$. *La solution générale de l'équation homogǹe (SGEH) est alors :*

$$y_{SGEH}(x) = \Big(C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x)\Big) \exp(\rho x)$$

où C_1 *et* C_2 *sont des constantes d'intégration.*

Théorème (continué)

Cas 3 Si $b^2 - 4ac < 0$, *on note* $\rho = \frac{-b}{2a}$ *et* $\omega = \frac{1}{2a}\sqrt{4ac - b^2}$. *La solution générale de l'équation homogǹe (SGEH) est alors :*

$$y_{SGEH}(x) = \Big(C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x)\Big)\exp(\rho x)$$

où C_1 *et* C_2 *sont des constantes d'intégration.*

Remarque: le cas 3 correspond au cas où le polynôme caractéristique n'a pas de racine réel mais a deux racines complexes, données par:

$$\lambda_1 = \rho + i\omega \quad \text{et } \lambda_2 = \rho - i\omega.$$

Théorème (continué)

Cas 3 *Si $b^2 - 4ac < 0$, on note $\rho = \frac{-b}{2a}$ et $\omega = \frac{1}{2a}\sqrt{4ac - b^2}$. La solution générale de l'équation homogn̂e (SGEH) est alors :*

$$y_{SGEH}(x) = \Big(C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x)\Big) \exp(\rho x)$$

où C_1 et C_2 sont des constantes d'intégration.

Remarque: le cas 3 correspond au cas où le polynôme caractéristique n'a pas de racine réel mais a deux racines complexes, données par:

$$\lambda_1 = \rho + i\omega \quad \text{et } \lambda_2 = \rho - i\omega.$$

C'est donc le signe du discriminant du polynôme caractéristique:

$$a\lambda^2 + b\lambda + c$$

qui définit la famille de solutions de l'équation homogène.

Une remarque

Nous ne démontrons pas ce théorème, mais il est facile (quoiqu'un peu long) de vérifier que les expressions données définissent bien des solutions.

Une remarque

Nous ne démontrons pas ce théorème, mais il est facile (quoiqu'un peu long) de vérifier que les expressions données définissent bien des solutions.

Remarque

Il est important de remarquer que dans le théorème ci-dessus, la solution y_{SGEH} est toujours de la forme :

Une remarque

Nous ne démontrons pas ce théorème, mais il est facile (quoiqu'un peu long) de vérifier que les expressions données définissent bien des solutions.

Remarque

Il est important de remarquer que dans le théorème ci-dessus, la solution y_{SGEH} est toujours de la forme :

$$y_{SGEH}(x) = C_1 g_1(x) + C_2 g_2(x)$$

Une remarque

Nous ne démontrons pas ce théorème, mais il est facile (quoiqu'un peu long) de vérifier que les expressions données définissent bien des solutions.

Remarque

Il est important de remarquer que dans le théorème ci-dessus, la solution y_{SGEH} est toujours de la forme :

$$y_{SGEH}(x) = C_1 g_1(x) + C_2 g_2(x)$$

où g_1 et g_2 sont données par le théorème et dépendent du cas dans lequel on se trouve et C_1 et C_2 sont les constantes d'intégration.

Une remarque

Nous ne démontrons pas ce théorème, mais il est facile (quoiqu'un peu long) de vérifier que les expressions données définissent bien des solutions.

Remarque

Il est important de remarquer que dans le théorème ci-dessus, la solution y_{SGEH} est toujours de la forme :

$$y_{SGEH}(x) = C_1 g_1(x) + C_2 g_2(x)$$

où g_1 et g_2 sont données par le théorème et dépendent du cas dans lequel on se trouve et C_1 et C_2 sont les constantes d'intégration.

Par exemple dans le Cas 1, où le polynôme caractéristique a deux racines distinctes λ_1 et λ_2, on a:

Une remarque

Nous ne démontrons pas ce théorème, mais il est facile (quoiqu'un peu long) de vérifier que les expressions données définissent bien des solutions.

Remarque

Il est important de remarquer que dans le théorème ci-dessus, la solution y_{SGEH} est toujours de la forme :

$$y_{SGEH}(x) = C_1 g_1(x) + C_2 g_2(x)$$

où g_1 et g_2 sont données par le théorème et dépendent du cas dans lequel on se trouve et C_1 et C_2 sont les constantes d'intégration.

Par exemple dans le Cas 1, où le polynôme caractéristique a deux racines distinctes λ_1 et λ_2, on a:

$$g_1(x) = \exp(\lambda_1 x),$$

Une remarque

Nous ne démontrons pas ce théorème, mais il est facile (quoiqu'un peu long) de vérifier que les expressions données définissent bien des solutions.

Remarque

Il est important de remarquer que dans le théorème ci-dessus, la solution y_{SGEH} est toujours de la forme :

$$y_{SGEH}(x) = C_1 g_1(x) + C_2 g_2(x)$$

où g_1 et g_2 sont données par le théorème et dépendent du cas dans lequel on se trouve et C_1 et C_2 sont les constantes d'intégration.

Par exemple dans le Cas 1, où le polynôme caractéristique a deux racines distinctes λ_1 et λ_2, on a:

$$g_1(x) = \exp(\lambda_1 x), \quad g_2(x) = \exp(\lambda_2 x).$$

Résolvons le problème de Cauchy

$$y'' - 3y' + 2y = 0,$$

Résolvons le problème de Cauchy

$$y'' - 3y' + 2y = 0, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 1, \quad y_0' = 0.$$

Résolvons le problème de Cauchy

$$y'' - 3y' + 2y = 0, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 1, \quad y_0' = 0.$$

Remarque

Cette équation linéaire est déjà homogène, donc il n'y a que les étapes 1 et 4 à considérer.

Résolvons le problème de Cauchy

$$y'' - 3y' + 2y = 0, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 1, \quad y_0' = 0.$$

Remarque

Cette équation linéaire est déjà homogène, donc il n'y a que les étapes 1 et 4 à considérer.

Étape 1: le polynôme caractéristique est $\lambda^2 - 3\lambda + 2$;

Résolvons le problème de Cauchy

$$y'' - 3y' + 2y = 0, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 1, \quad y_0' = 0.$$

Remarque

Cette équation linéaire est déjà homogène, donc il n'y a que les étapes 1 et 4 à considérer.

Étape 1: le polynôme caractéristique est $\lambda^2 - 3\lambda + 2$; ses racines sont 2 et 1. Ceci nous place dans le cas 1 du théorème, et donc la solution générale est :

Résolvons le problème de Cauchy

$$y'' - 3y' + 2y = 0, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 1, \quad y_0' = 0.$$

Remarque

Cette équation linéaire est déjà homogène, donc il n'y a que les étapes 1 et 4 à considérer.

Étape 1: le polynôme caractéristique est $\lambda^2 - 3\lambda + 2$; ses racines sont 2 et 1. Ceci nous place dans le cas 1 du théorème, et donc la solution générale est :

$$y(x) = C_1 \exp(2x) + C_2 \exp(x).$$

Résolvons le problème de Cauchy

$$y'' - 3y' + 2y = 0, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 1, \quad y_0' = 0.$$

Remarque

Cette équation linéaire est déjà homogène, donc il n'y a que les étapes 1 et 4 à considérer.

Étape 1: le polynôme caractéristique est $\lambda^2 - 3\lambda + 2$; ses racines sont 2 et 1. Ceci nous place dans le cas 1 du théorème, et donc la solution générale est :

$$y(x) = C_1 \exp(2x) + C_2 \exp(x).$$

Étape 4: prendre en compte les conditions initiales :

Résolvons le problème de Cauchy

$$y'' - 3y' + 2y = 0, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 1, \quad y_0' = 0.$$

Remarque

Cette équation linéaire est déjà homogène, donc il n'y a que les étapes 1 et 4 à considérer.

Étape 1: le polynôme caractéristique est $\lambda^2 - 3\lambda + 2$; ses racines sont 2 et 1. Ceci nous place dans le cas 1 du théorème, et donc la solution générale est :

$$y(x) = C_1 \exp(2x) + C_2 \exp(x).$$

Étape 4: prendre en compte les conditions initiales :

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Résolvons le problème de Cauchy

$$y'' - 3y' + 2y = 0, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 1, \quad y_0' = 0.$$

Remarque

Cette équation linéaire est déjà homogène, donc il n'y a que les étapes 1 et 4 à considérer.

Étape 1: le polynôme caractéristique est $\lambda^2 - 3\lambda + 2$; ses racines sont 2 et 1. Ceci nous place dans le cas 1 du théorème, et donc la solution générale est :

$$y(x) = C_1 \exp(2x) + C_2 \exp(x).$$

Étape 4: prendre en compte les conditions initiales :

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ 2C_1 + C_2 = 0 \end{cases}$$

Résolvons le problème de Cauchy

$$y'' - 3y' + 2y = 0, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 1, \quad y_0' = 0.$$

Remarque

Cette équation linéaire est déjà homogène, donc il n'y a que les étapes 1 et 4 à considérer.

Étape 1: le polynôme caractéristique est $\lambda^2 - 3\lambda + 2$; ses racines sont 2 et 1. Ceci nous place dans le cas 1 du théorème, et donc la solution générale est :

$$y(x) = C_1 \exp(2x) + C_2 \exp(x).$$

Étape 4: prendre en compte les conditions initiales :

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ 2C_1 + C_2 = 0 \end{cases}$$

dont on tire $C_1 = -1$ et $C_2 = 2$.

Résolvons le problème de Cauchy

$$y'' - 3y' + 2y = 0, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 1, \quad y'_0 = 0.$$

Remarque

Cette équation linéaire est déjà homogène, donc il n'y a que les étapes 1 et 4 à considérer.

Étape 1: le polynôme caractéristique est $\lambda^2 - 3\lambda + 2$; ses racines sont 2 et 1. Ceci nous place dans le cas 1 du théorème, et donc la solution générale est :

$$y(x) = C_1 \exp(2x) + C_2 \exp(x).$$

Étape 4: prendre en compte les conditions initiales :

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ 2C_1 + C_2 = 0 \end{cases}$$

dont on tire $C_1 = -1$ et $C_2 = 2$. La solution du problème de Cauchy est donc :

Résolvons le problème de Cauchy

$$y'' - 3y' + 2y = 0, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 1, \quad y_0' = 0.$$

Remarque

Cette équation linéaire est déjà homogène, donc il n'y a que les étapes 1 et 4 à considérer.

Étape 1: le polynôme caractéristique est $\lambda^2 - 3\lambda + 2$; ses racines sont 2 et 1. Ceci nous place dans le cas 1 du théorème, et donc la solution générale est :

$$y(x) = C_1 \exp(2x) + C_2 \exp(x).$$

Étape 4: prendre en compte les conditions initiales :

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ 2C_1 + C_2 = 0 \end{cases}$$

dont on tire $C_1 = -1$ et $C_2 = 2$. La solution du problème de Cauchy est donc :

$$y(x) = -\exp(2x) + 2\exp(x).$$