Contenu de la section

Équations linéaires du second ordre à coefficients constants (suite)

Rappels

Définition

Une *équation linéaire du second ordre à coefficients constants* est une équation de la forme :

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

pour certaines constantes a,b,c et une fonction donnée f.

Définition

L'équation linéaire homogène associée (ÉLHA) est l'équation où on a choisi $f \equiv 0$:

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

Le polynôme caractéristique de l'équation homogène est:

$$a\lambda^2 + b\lambda + c$$

Méthode de résolution

La résolution d'une telle équation se fait en quatre étapes:

1. Résolution de l'équation linéaire homogène associée (ÉLHA) :
$$y_{SGEH}(x) = C_1 g_1(x) + C_2 g_2(x),$$
où la forme de g_1 et g_2 dépend du discriminant du polynôme caractéristique.
2. Trouver une solution particulière $y_{SPEL}(x)$ de l'équation linéaire.
3. Écrire la solution générale de l'équation linéaire (EL) comme:
$$y(x) = y_{SGEH}(x) + y_{SPEL}(x).$$
4. Si des conditions initiales sont présentes, les prendre en compte pour déterminer les valeurs de C_1 et C_2.

Aujourd'hui: nous allons voir plusieurs méthodes pour effectuer l'étape 2 et trouver des solutions particulières.

Un exemple d'équation homogène

Résolvons le problème de Cauchy

$$y'' - 3y' + 2y = 0, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 1, \quad y'_0 = 0.$$

Cette équation linéaire est déjà homogène, donc il n'y a que les étapes 1 et 4 à considérer.

Étape 1: le polynôme caractéristique est $\lambda^2 - 3\lambda + 2$; ses racines sont 2 et 1. Ceci nous place dans le cas 1 du théorème, et donc la solution générale est :

$$y(x) = C_1 \exp(2x) + C_2 \exp(x).$$

Étape 4: prendre en compte les conditions initiales :

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ 2C_1 + C_2 = 0 \end{cases}$$

dont on tire $C_1 = -1$ et $C_2 = 2$. La solution du problème de Cauchy est donc :

$$y(x) = -\exp(2x) + 2\exp(x).$$

Contenu de la section

Équations linéaires du second ordre à coefficients constants (suite)

L′étape 2:déterminer une solution particulière

Deviner une solution à partir de la forme du second membre

Déterminer une solution particulière

Comme dans le cas des equations du premier ordre, il faut trouver une solution particulière y_{SPEL} de l'équation linéaire (EL) de départ.

On va passer en revues quelques méthodes :

- Deviner une solution évidente (les constantes en général)
- Divination avancée: deviner la forme de la solution à partir de celle du second membre:
  - cas polynomial
  - cas exponentiel
  - cas trigonométrique

Deviner une solution particulière

Comme pour les équations du premier ordre, il arrive qu'une solution soit facile à identifier; c'est en général le cas pour les solutions constantes.

Exemple

L'équation linéaire du second ordre:

$$y'' + 3y' + y = 1$$

admet $y \equiv 1$ comme solution particulière.

Contenu de la section

Motivation

Exemple

Soit l'équation linéaire

$$y'' + 2y = x.$$

Une solution particulière est donnée par $y(x) = \frac{x}{2}$, ceci car

$$y'' + 2y = 0 + 2\frac{x}{2} = x.$$

Plus généralement: si on choisit pour y un polynôme de degré n:

$$y(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

avec $a_n \neq 0$, ses dérivées premières et secondes sont des polynômes de degré $n-1$ et $n-2$ respectivement:

$$y'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1,$$

$$y''(x) = n(n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_2.$$

Dès lors: $ay'' + by' + cy$ sera un polynôme d'ordre n pour toutes constantes a,b,c. Réciproquement, si le second membre est polynomial, il sera logique de chercher une solution particulière sous la forme d'un polynôme.

Équations linéaires du second ordre à coefficients constants (suite)

L'étape 2:déterminer une solution particulière

Deviner une solution à partir de la forme du second membre

Polynômes

Exponentielles

Fonctions Trigonométriques

Second membre polynomial

Résultat

Soit l'équation:

$$ay'' + by' + cy = f.$$

Si f est un polynôme de degré n, on cherchera y_{SPEL} sous la forme d'un polynôme :

- *de degré n si $c \neq 0$*
- *de degré $n+1$ si $c = 0$ et $b \neq 0$*
- *de degré $n+2$ si $c = 0$, $b = 0$ et $a \neq 0$.*

Dans le cas où (par exemple) $b = c = 0$, l'équation devient juste

$$ay'' = f.$$

Il est donc normal de chercher y comme un polynôme de degré $n+2$.

Question

Soit l'équation

$$y'' + y' + 2y = x^2.$$

Trouver une solution particulière qui est un polynôme de degré 2.

Réponse

On cherche p,q,r pour que: $y(x) = px^2 + qx + r$ soit solution de l'équation. On calcule alors:

$$\begin{aligned} y'' + y' + 2y &= 2p + (2px + q) + 2(px^2 + qx + r) \\ &= 2px^2 + (2q + 2p)x + 2p + q + 2r \end{aligned}$$

Cette fonction y vérifie l'équation si et seulement si:

$$2px^2 + (2q + 2p)x + 2p + q + 2r = x^2 \iff \begin{cases} 2p = 1 \\ 2q + 2p = 0 \\ 2p + q + 2r = 0 \end{cases}$$

On trouve donc $p = -q = \frac{1}{2}$ et $r = -\frac{1}{4}$ et la solution particulière est:

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}.$$

Équations linéaires du second ordre à coefficients constants (suite)

L'étape 2:déterminer une solution particulière

Deviner une solution à partir de la forme du second membre

- Polynômes
- Exponentielles
- Fonctions Trigonométriques

Second membre en exponentielles

Le polynôme caractéristique rentre cette fois en jeu:

Résultat

On considère l'équation

$$ay'' + by' + c = f$$

et son polynôme caractéristique $a\lambda^2 + b\lambda + c$. *Si f a la forme*

$$f(x) = A\exp(kx),$$

pour des constantes A et k, alors on cherchera y_{SPEL} de la forme :

- $\beta\exp(kx)$, *si k n'est pas racine du polynôme caractéristique*
- $\beta x\exp(kx)$, *si k est racine simple du polynôme caractéristique*
- $\beta x^2\exp(kx)$, *si k est racine double du polynôme caractéristique.*

Dans ces trois exemples β est un nombre réel à déterminer.

On dit que λ_0 est:

- racine simple d'un polynôme P si $P(\lambda_0) = 0$ mais $P'(\lambda_0) \neq 0$
- racine double de P si $P(\lambda_0) = P'(\lambda_0) = 0$.

Question

Soit l'équation

$$y'' - 3y' + 2y = e^x.$$

Trouvez une solution particulière avec la règle précédente.

Réponse

Le polynôme caractéristique est $P(x) = x^2 - 3x + 2$. Ici $e^x = e^{1\cdot x}$, et 1 est racine simple de P car $P(1) = 0$,

$$P'(x) = 2x - 3 \quad \text{et } P'(1) = -1.$$

Par le critère précédent on cherche donc une solution sous la forme

$$y(x) = \beta x e^x$$

pour un $\beta \in \mathbb{R}$ à déterminer. On a alors: $y'(x) = \beta(1 + x)e^x$, $y''(x) = \beta(2 + x)e^x$ et:

$$y'' - 3y' + 2y = \beta\Big((2 + x)e^x - 3(1 + x)e^x + 2xe^x\Big) = -\beta e^x.$$

On choisira donc $\beta = -1$, ce qui donne la solution particulière:

$$y(x) = -xe^x.$$

Équations linéaires du second ordre à coefficients constants (suite)

L'étape 2:déterminer une solution particulière

Deviner une solution à partir de la forme du second membre

Polynômes

Exponentielles

Fonctions Trigonométriques

Second membre en fonctions trigonométriques

On considère l'équation

$$ay'' + by' + c = f$$

et son polynôme caractéristique $a\lambda^2 + b\lambda + c$. On rappelle la grandeur

$$\omega = \frac{1}{2a}\sqrt{4ac - b^2}$$

qui intervient dans la résolution de l'équation homogène.

Résultat

On suppose que $f(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx)$ pour certaines constantes A, B, k. Alors:

- *Si $b^2 - 4ac > 0$, on cherchera y_{SPEL} sous la forme*
$$y_{SPEL} = \alpha\cos(kx) + \beta\sin(kx).$$
- *Si $b^2 - 4ac \leq 0$, et si $k = \omega$, on cherchera y_{SPEL} sous la forme*
$$y_{SPEL} = x\Big(\alpha\cos(kx) + \beta\sin(kx)\Big).$$

Dans ces exemples α et β sont des nombres réels à déterminer.

Contenu de la section

Un exemple

Nous considérons l'ÉDO linéaire suivante :

$$y'' - 9y = x + \exp(2x) + \exp(3x).$$

Le problème de Cauchy n'est pas précisé ici, donc on procède à sa résolution en suivant les étapes 1 à 3.

Étape 1: Le polynôme caractéristique de l'équation est $\lambda^2 - 9$, qui a deux racines distinctes, 3 et -3. Ceci qui nous place dans le cas 1 du théorème. Dès lors la solution générale de l'équation homogène $y'' - 9y$ est donnée par :

$$y_{SGEH}(x) = C_1 \exp(3x) + C_2 \exp(-3x)$$

où C_1 et C_2 sont des constantes réelles.

Étape 2: le second membre est une somme de plusieurs termes:

$$y'' - 9y = x + \exp(2x) + \exp(3x).$$

Dans cette situation, nous allons :

- appliquer à chaque terme la méthode correspondante pour trouver une solution, et
- faire la somme des solutions particulières.

Faisons cela:

- le terme x, est un polynôme de degré 1. La méthode indique donc de chercher une solution sous forme d'un polynôme de degré 1, c'est-à-dire de la forme $\alpha x + \beta$;
- le terme $\exp(2x)$ est une exponentielle et 2 n'est pas racine du polynôme caractéristique. Il faut donc chercher une solution de la forme $\gamma \exp(2x)$;
- le terme $\exp(3x)$ est une exponentielle et 3 est racine simple du polynôme caractéristique. Il faut donc chercher une solution de la forme $\phi x \exp(3x)$.

Ici $\alpha, \beta, \gamma, \phi$ sont des constantes réelles à déterminer.

Nous cherchons donc une solution particulière qui a la forme suivante :

$$y_{SPEL}(x) = (\alpha x + \beta) + \gamma \exp(2x) + \phi x \exp(3x).$$

Pour faire ça, nous imposons que cette fonction soit solution de l'équation linéaire de départ:

$$y'' - 9y = x + \exp(2x) + \exp(3x).$$

Pour cela nous calculons:

$$y''_{SPEL}(x) = 0 + 4\gamma \exp(2x) + \phi(6 + 9x)\exp(3x)$$

et insérons cela dans l'équation :

$$4\gamma \exp(2x) + \phi(6 + 9x)\exp(3x) - 9\Big((\alpha x + \beta) + \gamma \exp(2x) + \phi x \exp(3x)\Big)$$
$$= x + \exp(2x) + \exp(3x)$$

ce qui se simplifie en :

$$-9\alpha x - 9\beta - 5\gamma \exp(2x) + 6\phi \exp(3x)$$
$$= x + \exp(2x) + \exp(3x).$$

Cette équation est donc vérifiée dès que

$$\alpha = \frac{-1}{9}, \quad \beta = 0, \quad \gamma = \frac{-1}{5}, \quad \phi = \frac{1}{6}$$

En remplaçant les valeurs de α,β,γ et ϕ par les valeurs trouvées, la solution particulière est donc:

$$y_{SPEL}(x) = -\frac{1}{9}x - \frac{1}{5}\exp(2x) + \frac{1}{6}x\exp(3x).$$

Étape 3: c'est ici une étape de récapitulation : la solution générale de l'équation linéaire de départ est donc

$$\begin{aligned} y(x) = {} & C_1\exp(3x) + C_2\exp(-3x) \\ & -\frac{1}{9}x - \frac{1}{5}\exp(2x) + \frac{1}{6}x\exp(3x). \end{aligned}$$

Étape 4: elle prend les conditions initiales en compte, mais nous n'en avons donné aucune ici. Les conditions initiales serviraient, sinon, à déterminer les constantes C_1 et C_2.

Un autre exemple

Nous considérons cette fois l'équation linéaire suivante avec problème de Cauchy :

$$y'' + y = \cos(2x), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Étape 1: le polynôme caractéristique est $\lambda^2 + 1$. L'équation homogène associée:

$$y'' + y = 0$$

n'a pas de racines réelles et se trouve donc dans le cas 3 du théorème), avec $\rho = 0$ et $\omega = 1$. (Ceci revient à dire que les racines de $\lambda^2 + 1$ sont $\pm i$.) La solution générale de l'ÉLHA est alors :

$$y_{SGEH}(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)$$

pour des constantes réelles C_1 et C_2.

Étape 2: on cherche maintenant une solution particulière de

$$y'' + y = \cos(2x).$$

Le second membre est de la forme $A\cos(kx) + B\sin(kx)$ avec

$$A = 1, \quad B = 0, \quad k = 2.$$

On cherche donc une solution particulière avec la méthode pour un second membre trigonométrique. Comme ici $\omega = 1$ on a $k \neq \omega$ et on cherche une solution particulière de la forme :

$$y_{SPEL} = \alpha\cos(2x) + \beta\sin(2x)$$

avec α et β des réels à déterminer. Imposons que cette fonction soit solution de l'équation linéaire de départ. On calcule alors:

$$y'_{SPEL} = -2\alpha\sin(2x) + 2\beta\cos(2x)$$
$$y''_{SPEL} = -4\alpha\cos(2x) - 4\beta\sin(2x)$$

et on remplace dans l'équation :

$$y''_{SPEL}(x) + y_{SPEL}(x) = \cos(2x) \iff -3\alpha\cos(2x) - 3\beta\sin(2x) = \cos(2x).$$

Ceci est vérifié pour $\alpha = \frac{-1}{3}$ et $\beta = 0$. La solution particulière est donc:

$$y_{SPEL}(x) = \frac{-\cos(2x)}{3}.$$

Étape 3: la solution générale de l'équation linéaire de départ est ainsi

$$y(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) - \frac{1}{3}\cos(2x).$$

Étape 4: Il reste à utiliser les conditions initiales $y(0) = 1, y'(0) = 0$ pour pour déterminer les valeurs de C_1 et C_2. L'expression ci-dessus donne:

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 - \dfrac{1}{3} = 1 \\ C_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = \dfrac{4}{3} \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

La solution cherchée est ainsi:

$$y(x) = \frac{4}{3}\cos(x) - \frac{1}{3}\cos(2x).$$