Math F112: Séance de révisions de la matière du $Q1$

Contenu de la section

Précisions sur l’examen

Examen de Janvier 2019

L'examen de Math F112 aura lieu le Lundi 21 Janvier 2019 de 8h à 12h dans les forums de la Plaine. Vous recevrez votre répartition dans les salles sur l'UV quelques jours avant l'examen.

L'examen de Janvier dure 3h.

Le créneau 8h-12h tient compte du temps pour vous installer.

Consignes pour l'examen

- Munissez-vous de votre Carte d'étudiant (ou à défaut carte d'identité + numéro de matricule). Vous devrez avoir ces informations en arrivant: sans numéro de matricule vous ne serez pas accepté-e.
- Arrivez à l'heure. Une fois les copies distribuées, les retardataires seront refusé-e-s: Si vous arrivez après 8h, vous n'avez aucune garantie d'être accepté-e.
- Prenez des stylos (au moins un...) et du papier
- (éventuellement) à boire et un snack au cas où.

Le reste est **interdit**. En particulier (liste non-exhaustive):

- GSM, ordinateur, calculatrice : sont interdits !
- Notes de cours et syllabus : sont interdits !

Nature de l'examen

L'examen de Janvier sera composé:

- D'une ou deux question de cours, tirées de la liste disponible sur la page web du cours
- Et de plusieurs exercices, portant sur des concepts vus en cours ou en séances d'exercices.

La matière de l'examen porte sur tout ce qui a été vu en cours et en exercices jusqu'au chapitre sur les matrices (inclus).

L'objectif de cet examen n'est pas de vous piéger ou de vous faire souffrir gratuitement: mais seulement de vérifier que vous maîtrisez les notions et les techniques vues en cours, c'est-à-dire que vous savez les appliquer dans des situations semblables (mais pas identiques) à celles vues en cours ou en exercices.

Contenu de la section

Exercices de révision

Contenu de la section

Exercices de révision

- Conseils généraux et méthodologie
- Calculs de dérivées et polynômes de Taylor
- Des calculs d'intégrales et de primitives
- Équations de plans

En général

Quelques recommandations générales qui sont toujours valables:

- Apprenez les formules et définitions du cours. C'est un préalable indispensable à la résolution des exercices.
- Lisez bien l'énoncé. N'essayez pas d'appliquer à tout prix une formule que vous connaissez: prenez le temps de comprendre que qu'on vous dit et ce qu'on exige de vous.
- Faites attention aux calculs de base! C'est en général là où se cachent les erreurs: signes « – » oubliés, simplifications trop rapides, ... Faites en particulier attention aux fractions:

$$\frac{1}{5x-1} \quad \text{n'est PAS égal à} \quad \frac{1}{5x}-1$$

Conseils méthodologiques pour réviser

Il peut être utile de diviser le cours de Math F112 en sections thématiques. Par exemple une partie « géométrie » qui regrouperait produit scalaire, produit vectoriel, équations de droites/plans,....

Essayez de réviser en même temps les concepts dans une même partie thématique en vous posant les questions suivantes:

- Quels sont les concepts importants de cette partie à connaître? Les formules essentielles? Par exemple en géométrie: produit scalaire, produit vectoriel, équations de droites/plans, etc...
- Quels sont les méthodes/exerices-type le plus souvent vus en séances d'exercices que je dois connaître?
- Qu'est-ce que j'ai bien compris (à réviser un peu) et qu'est-ce que j'ai mal ou peu compris (à travailler plus)?

Sur le contenu de l'examen...

Le contenu de l'examen est secret, mais il reflètera en partie ce qui a été vu pendant le cours et les séances d'exercices: vous avez passé cinq séances sur le calcul de primitives/intégrales,

vous pouvez donc vous douter qu'il y aura très certainement un calcul de primitive et /ou d'intégrale à l'examen.

(Faire l'impasse sur cette partie du cours n'est donc probablement pas une très bonne stratégie...)

Contenu de la section

Exercices de révision

- Conseils généraux et méthodologie
- Calculs de dérivées et polynômes de Taylor
- Des calculs d'intégrales et de primitives
- Équations de plans

Question

Soit $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ la fonction:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

1. Calculer les polynômes de Taylor d'ordre 1 et 2 de f en 0, notés $T_1(x)$ et $T_2(x)$.
2. Pour un $x \in [-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}]$, estimer l'erreur commise entre $f(x)$ et $T_1(x)$.

Signification de la question 2: Il s'agit, pour $x \in [-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}]$ de contrôler $|f(x) - T_1(x)|$. On utilise en général pour cela la formule du reste de Lagrange, qui nécessite de calculer la dérivée d'ordre 2 de f.

Solution

Question 1: on calcule les dérivées première et seconde de f:

$$f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \quad \text{(c'est une dérivée de fonctions composées)}$$

$$f''(x) = -\frac{2(1+x^2)^2 - 2\cdot 2x(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4} = -\frac{2-6x^2}{(1+x^2)^3}$$

(c'est une dérivée d'un quotient.) On trouve alors: $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ et $f''(0) = -2$. Les polynômes de Tayor de f à l'ordre 1 et 2 en 0 sont donc par définition:

$$\begin{aligned} T_1(x) &= f(0) + f'(0)(x-0) = 1, \\ T_2(x) &= f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{1}{2!}f''(0)(x-0)^2 \\ &= 1 - x^2. \end{aligned}$$

Question 2**:** pour le point 2, on utilise le théorème de la formule du reste de Lagrange. Qui affirme que pour tout $x \in [-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}]$, il existe un réel t compris entre 0 et x tel que:

$$f(x) - T_1(x) = f''(t)\frac{x^2}{2!} = f''(t)\frac{x^2}{2}.$$

Attention: on ne sait pas qui est exactement ce t, mais ce résultat théorique nous sert seulement à estimer l′erreur.

On sait donc que si $x \in [-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}]$, il existe t compris entre 0 et x tel que

$$|f(x) - T_1(x)| = \left|f''(t)\frac{x^2}{2}\right| = \left|\frac{2-6t^2}{(1+t^2)^3}\right|\frac{x^2}{2}.$$

Comme t est compris entre 0 et x, on a aussi $|t| \leq \frac{1}{10}$. Et donc:

$$|2-6t^2| = 2-6t^2 \leq 2.$$

Il reste à remarquer que $\frac{1}{1+t^2} \leq 1$ et que $|x| \leq \frac{1}{10}$ pour trouver:

$$|f(x) - T_1(x)| \leq 2\frac{x^2}{2} \leq \frac{1}{100}.$$

Remarques récapitulatives sur les dérivées

Vous devez au minimum:

- connaître les dérivées de toutes les fonctions usuelles: puissances, exponentielle, logarithmes, sinus, cosinus, tangente, sinus/cosinus hyperbolique, etc...
- connaître les règles de dérivation: d'une somme, d'un produit, d'un quotient, de fonctions composées, d'une fonction réciproque, etc...
- En d'autres termes: savoir dériver les yeux fermés
- Savoir utiliser les dérivées: détermination de points de maximum/minimum, croissance/décroissance de la fonction, polynômes de Taylor, etc...

Contenu de la section

Exercices de révision
- Conseils généraux et méthodologie
- Calculs de dérivées et polynômes de Taylor
- Des calculs d'intégrales et de primitives
- Équations de plans

Un calcul d'intégrales

Question

1. Trouver toutes les primitives de la fonction définie sur $]-\infty,0[$ par:
$$t \mapsto \frac{e^t}{\sqrt{1-e^{2t}}}.$$
($e^t = \exp(t)$, ce sont deux notations différentes pour la même fonction.)
2. Si $M > a > 0$ sont des nombres réels quelconques, calculer
$$\int_{-M}^{-a} \frac{e^t}{\sqrt{1-e^{2t}}}\,\mathrm{d}t$$
3. En déduire que
$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^t}{\sqrt{1-e^{2t}}}\,\mathrm{d}t$$
existe et calculer sa valeur.

Indications:
Pour la première question: remarquez bien que $e^{2t} = (e^t)^2$. Est-ce que vous pouvez vous ramener à une primitive connue en faisant un changement de variables?

Pour la deuxième question, utilisez le théorème fondamental qui fait le lien entre primitives et intégrales.

Pour la troisième question, il faut revenir à la définition de l'intégrale de $-\infty$ à 0 comme une limite (qu'on calculera).

Question 1:

On pose ici: $u = e^t$. Alors $du = e^t\,dt$, et donc:

$$\int \frac{e^t}{\sqrt{1-e^{2t}}}\,dt = \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \arcsin(u) + C$$
$$= \arcsin(e^t) + C$$

où $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est la fonction réciproque de la fonction sin.
On remarque que lorsque $t \in]-\infty, 0[$ on a bien $e^t \in]0,1[$, donc $\arcsin(e^t)$ est bien définie.

Les points à ne pas oublier:

- On cherche toutes les primitives de la fonction, donc n'oubliez pas la constante $+C$!
- N'oubliez pas de remplacer u par sa valeur (ici: $u = e^t$) après avoir calculé la primitive grâce au changement de variables.

Question 2:

On utilise la théorème fondamental du calcul différentiel et intégral qui nous dit que:

$$\int_{-M}^{-a} \frac{e^t}{\sqrt{1-e^{2t}}}\,\mathrm{d}t = F(-a) - F(-M)$$

où F est une primitive de $t \mapsto \frac{e^t}{\sqrt{1-e^{2t}}}$ sur $]-\infty,0[$ (n'importe laquelle).

On choisit par exemple la primitive:

$$F(t) = \arcsin(e^t)$$

qui correspond à $C = 0$. Il vient alors

$$\int_{-M}^{-a} \frac{e^t}{\sqrt{1-e^{2t}}}\,\mathrm{d}t = \arcsin(e^{-a}) - \arcsin(e^{-M}).$$

Question 3: Lorsque $t = 0$ la fonction $\frac{e^t}{\sqrt{1-e^{2t}}}$ n'est pas définie. Ainsi, par définition, l'intégrale de $-\infty$ à 0 est définie par la limite suivante:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^t}{\sqrt{1-e^{2t}}}\,\mathrm{d}t = \lim_{a\to 0 \text{ et } M\to+\infty} \int_{-M}^{-a} \frac{e^t}{\sqrt{1-e^{2t}}}\,\mathrm{d}t.$$

Attention: on dit que l'intégrale de $-\infty$ à 0 existe SI cette limite existe! C'est la limite de droite qu'il faut donc commencer par calculer.

Ici on a :

$$\lim_{a\to 0} \arcsin(e^{-a}) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$$

Et de même:

$$\lim_{M\to+\infty} \arcsin(e^{-M}) = \arcsin(0) = 0.$$

On a utilisé ici la définition de la fonction arcsin (qui est continue) et les règles de composition des limites. Ainsi:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^t}{\sqrt{1-e^{2t}}}\,\mathrm{d}t = \lim_{a\to 0 \text{ et } M\to+\infty} \Big(\arcsin(e^{-a}) - \arcsin(e^{-M})\Big) = \frac{\pi}{2}.$$

Remarques récapitulatives sur les primitives/intégrales

Vous devez au minimum:

- Connaître les primitives de toutes les fonctions usuelles vues en cours: puissances, exponentielle, logarithmes, sinus/ cosinus (hyperboliques et non), fonctions $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, etc...
- Connaître les règles de calcul de primitives: changement de variables, intégration par parties, etc...
- Connaître le théorème fondamental pour calculer des intégrales définies et indéfinies (dans ce dernier cas, attention à la définition)
- Savoir faire une décomposition en fractions simples pour calculer les primitives de fractions rationnelles

Contenu de la section

Exercices de révision
Conseils généraux et méthodologie
Calculs de dérivées et polynômes de Taylor
Des calculs d'intégrales et de primitives
Équations de plans

Une équation de plan

Question (Examen d'août 2018)

Écrire l'équation du plan dans $\mathbb{R}^3$ passant par les points $A = (3{,}2{,}1)$, $B = (1{,}3{,}2)$ et $C = (1,-2{,}3)$.

Solution: on note P ce plan. À partir des points A,B et C on va calculer un vecteur normal au plan P. On se servira ensuite de ce vecteur normal pour trouver l'équation du plan.

Si P contient les points A,B et C, il contient les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:
$\overrightarrow{AB} = (1{,}3{,}2)-(3{,}2{,}1) = (-2{,}1{,}1)$ et $\overrightarrow{AC} = (1{,}-2{,}3)-(3{,}2{,}1) = (-2{,}-4{,}2)$.
Un vecteur normal au plan P, noté $\overrightarrow{n}$ (c'est-à-dire qui est perpendiculaire au plan en tout point) est alors donné par le produit vectoriel de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (6{,}2{,}10).$$

Une fois qu'on connaît ce vecteur normal $\overrightarrow{n} = (6,2,10)$ au plan P on peut calculer l'équation de P. En effet: si un point $M = (x,y,z)$ quelconque appartient au plan, le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est dans le plan P. Et donc $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\overrightarrow{n}$, ce qu'on exprime par l'égalité:

$$\langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{n} \rangle = 0.$$

Cette égalité donne alors l'équation du plan.

Faisons-le ici: si $M = (x,y,z)$, alors $\overrightarrow{AM} = (x-3, y-2, z-1)$ et donc:

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{n} \rangle = 0 &\iff 6(x-3) + 2(y-2) + 10(z-1) = 0 \\ &\iff 6x + 2y + 10z - 32 = 0. \end{aligned}$$

Une deuxième équation de plan

Question (Examen d'août 2018 encore)

Écrire l'équation du plan dans $\mathbb{R}^3$ passant par le point $A = (3, -2, 4)$ et perpendiculaire à la droite D d'équations

$$x - 2 = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{3}.$$

Une première remarque: une droite dans l'espace est l'intersection de deux plans. La droite D dont on parle ici est (par exemple) l'intersection des plans d'équation $x - 2 - \frac{y-3}{2} = 0$ et $\frac{y-3}{2} - \frac{z-4}{3} = 0$. Les points (x, y, z) appartenant à D sont donc toutes les solutions du système d'équations:

$$D : \begin{cases} x - \frac{y}{2} - \frac{1}{2} = 0 \\ \frac{y}{2} - \frac{z}{3} - \frac{1}{6} = 0 \end{cases}$$

Indication: écrivez la droite D comme l′intersection de deux plans. Commencez par déterminer les vecteurs normaux à chacun de ces plans. Comment trouver ensuite un vecteur directeur de la droite D? Comment s′en servir pour trouver l′équation du plan?

Solution: Soit P le plan passant par $A = (3, -2, 4)$ et perpendiculaire à la droite D donnée. Comme précédemment, on commence par déterminer un vecteur normal $\overrightarrow{n}$ au plan P.

Ici c'est clair: par hypothèse, un vecteur normal au plan sera un vecteur directeur de la droite D.

Déjà: la droite D est l'intersection de deux plans Q_1 et Q_2 d'équations respectives:

$$Q_1 : x - \frac{y}{2} - \frac{1}{2} = 0 \quad \text{et} \quad Q_2 : \frac{y}{2} - \frac{z}{3} - \frac{1}{6} = 0.$$

Les vecteurs normaux respectifs à ces plans sont donnés par:

$$\overrightarrow{u}_1 = (1, -\frac{1}{2}, 0) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{u}_2 = (0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}).$$

Comment trouver alors un vecteur directeur de D?

Par définition, un vecteur directeur $\overrightarrow{n}$ est de D est un vecteur qui:

- appartient à Q_1 (c'est-à-dire qu'il est orthogonal à $\overrightarrow{u}_1$)
- et appartient à Q_2 (c'est-à-dire qu'il est orthogonal à $\overrightarrow{u}_2$).

Un exemple d'un tel vecteur qui convient est donc:

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{u}_1 \times \overrightarrow{u}_2 = \left(1, -\frac{1}{2}, 0\right) \times \left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right).$$

Ensuite: le plan P cherché passe par A. Donc si un point $M = (x,y,z)$ est dans le plan P, ceci signifie que $\overrightarrow{AM} = (x-3, y+2, z-4)$ est orthogonal à $\overrightarrow{n}$, soit:

$$\begin{aligned}\langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{n} \rangle = 0 &\iff \frac{1}{6}(x-3) + \frac{1}{3}(y+2) + \frac{1}{2}(z-4) = 0 \\ &\iff \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{2}z - \frac{11}{6} = 0.\end{aligned}$$

Récapitulatif sur les équations de plan

Vous devez au minimum:

- Connaître les définitions de base: vecteurs, droites, plans, produit scalaire/vectoriel, etc...
- Savoir calculer le produit scalaire et vectoriel de deux vecteurs
- Connaître les propriétés des produits scalaire et vectoriel et savoir les appliquer pour montrer (par exemple) que deux vecteurs sont colinéaires, pour caractériser un plan comme l'ensemble des vecteurs orthogonaux à un vecteur donné, etc...