Organisation du Cours de Math F112 au Q2

Nous avons encore cours ensemble pendant 5 séances (jusqu'au Lundi 18 Février inclus).

Ensuite, à partir du Vendredi 22 Février, vous vous séparez en 2 groupes:

- Les B1-INFO suivront le Module SI du cours, avec Julie de Saedeleer
- Les autres (B1-BIOL, B1-CHIM, B1-IRBI, B1-SCIE + B2/3 GEOL-GEOG) suivront le Module S avec César Lecoutre.

Breaking News

Seulement pour les B1-IRBI gr.1 – gr.2 et seulement pour aujourd'hui Lundi 4 Février:

Le TP de 14h à 16h est annulé (il sera récupéré plus tard dans le quadri).

Intégrales multiples

Contenu de la section

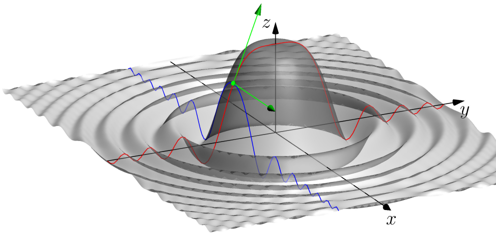
Définition et motivation

Contenu de la section

Rappel sur les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Soit $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable.

Rappel: ceci signifie que f admet des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ en tout point $(x,y) \in A$ qui sont en plus des fonctions continues sur A.



Le graphe d'une telle fonction est une surface de $\mathbb{R}^3$, d'équation

$$z = f(x,y).$$

Une fonction différentiable $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (ou $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \geq 2$), délimite de la sorte un volume particulier de l'espace $\mathbb{R}^3$: le volume situé entre le graphe de f et le plan horizontal $z = 0$.

Ce volume est parfois situé au-dessus du plan horizontal (en les points (x,y) où $f(x,y) \geq 0$) ou en-dessous (si $f(x,y) \leq 0$). En les points (x,y) tels que $f(x,y) = 0$, la surface de f intersecte le plan $\{z = 0\}$.

Volumes Vs Aires

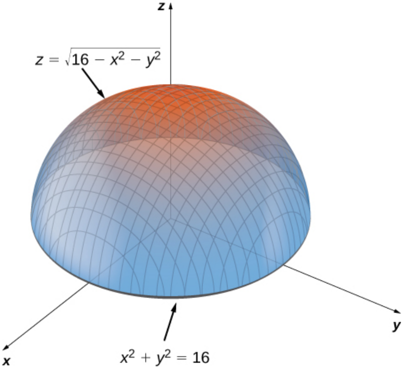
Exemple

Soit $R > 0$ un rayon et soit $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x^2 + y^2 < R^2\right\}$ le disque ouvert dans $\mathbb{R}^2$ de centre 0 et de rayon R. Soit f la fonction:

$$f : A \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

Son graphe est un bol renversé sur la table. Plus précisément: c'est l'hémisphère supérieur de la sphère de centre 0 et de rayon R.

Le volume contenu entre la surface représentant le graphe de f et la plan horizontal $z = 0$ est alors le volume de la demi-boule supérieure.



Motivation

Question: peut-on calculer explicitement le volume du bol, c'est-à-dire de la demi-sphère supérieure?

Plus généralement: pour une fonction f donnée, comment exprimer le volume de la région située entre la surface $z = f(x,y)$ représentant le graphe de f et le plan horizontal $z = 0$?

Sachant qu'on comptera ce volume positivement si $f(x,y) \geq 0$, et négativement si $f(x,y) \leq 0$.

Réponse: comme nous l'avons fait pour les aires dans $\mathbb{R}^2$, ces volumes se calculeront avec une intégrale multiple (c'est-à-dire l'intégrale d'une fonction de plusieurs variables).

Contenu de la section

Une définition peu rigoureuse

Définition

Soit A un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. On appelle intégrale (de Riemann) de f sur A, notée:

$$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

le volume algébrique de la région comprise entre la surface d'équation $z = f(x,y)$ et le plan horizontal $z = 0$.

Précisément: l'intégrale de Riemann de f sur A est donnée par:

$$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \mathrm{vol}(S^+) - \mathrm{vol}(S^-)$$

où $\mathrm{vol}\,S^\pm$ représente le volume des ensembles S^+ et S^-, où f est respectivement au-dessus du plan $\{z = 0\}$ ou en-dessous:

$$S^+ = \left\{(x,y,z) \text{ t.q. } \begin{array}{l}(x,y) \in A, \text{ et} \\ 0 \le z \le f(x,y)\end{array}\right\} \quad S^- = \left\{(x,y,z) \text{ t.q. } \begin{array}{l}(x,y) \in A, \text{ et} \\ f(x,y) \le z \le 0\end{array}\right\}$$

Un exemple

Exemple

Soit $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x^2 + y^2 < 1\right\}$ le disque unité ouvert dans $\mathbb{R}^2$.
Soit f la fonction:

$$f : A \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Par définition, $\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ est le volume de la demi-boule supérieure. On connaît le volume de la boule qui est $\frac{4}{3}\pi$, et on trouve donc:

$$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{2}{3}\pi.$$

Notre but dans ce cours: retrouver la valeur $\frac{2}{3}\pi$ uniquement par le calcul (et calculer des volumes en général).

Nous allons voir dans la suite plusieurs méthodes de calcul d'intégrales doubles ou triples, qui se basent sur le bon choix d'un système de coordonnées et sur des calculs d'intégrales de fonctions réelles.

Contenu de la section

Comment calculer des intégrales multiples?

Contenu de la section

L'aire d'une region

Exemple

Regardons un cas particulier : pour $A \subset \mathbb{R}^2$, considérons la fonction constante égale à 1: $f(x,y) \equiv 1$. La région sous le graphe de f est:

$$\{(x,y,z) \text{ t.q. } (x,y) \in A \text{ et } z \in [0,1]\}.$$

C'est un solide dont la base est A et dont la hauteur est 1. Son volume est donc égal à l'aire de A (multiplié par 1). En particulier:

$$\text{Si } A \subset \mathbb{R}^2, \quad \iint_A 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \text{ représente l'aire de } A.$$

Les intégrales doubles servent donc aussi à calculer des aires.

Exemple

Soit $A := [0,1] \times [0,\pi/2]$. Alors

$$\iint_A 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \mathrm{Aire}(A) = 1 \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

C'est l'aire d'un rectangle.

Domaines verticalement simples

Sur certains domaines, le calcul d'intégrales doubles se ramène à des calculs d'intégrales à une seule variable:

Définition

Un domaine $A \subset \mathbb{R}^2$ est dit *verticalement simple* s'il existe $a,b \in \mathbb{R}$ et des fonctions $g_1,g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ telles que

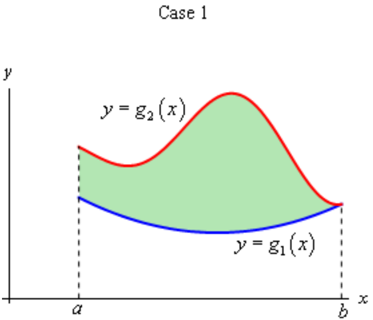
$$A = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x \in [a,b], g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\Big\}.$$

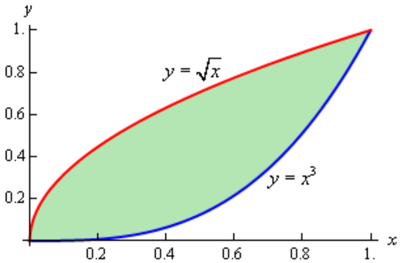
Le domaine est *horizontalement simple* s'il existe $c,d \in \mathbb{R}$ et des fonctions $h_1,h_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ telles que

$$A = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } y \in [c,d], h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\Big\}.$$

Exemples de domaines verticalement simples

Les domaines suivants (la région en vert) sont verticalement simples:





Un domaine de $\mathbb{R}^2$ est donc verticalement simple s'il est compris entre les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ et les courbes des fonctions $y = g_1(x)$ et $y = g_2(x)$. Même chose en échangeant x et y pour « horizontalement simple ».

Intégrer sur des domaines verticalement simples

Dans un domaine verticalement simple, calculer une intégrale double se calcule en calculant deux intégrales simples, l'une après l'autre:

Théorème (Théorème de Fubini, version faible)

Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ et $f : A \to \mathbb{R}$ continue et bornée.

- *Si $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x \in [a,b], g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\right\}$ est verticalement simple, alors*
$$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$
- *Si $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } y \in [c,d], h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\right\}$ est horizontalement simple, alors*
$$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Exemple

- On retrouve l'aire d'un rectangle $A = [a,b] \times [c,d]$: c'est un domaine verticalement (et horizontalement!) simple et donc
$$\mathrm{Aire}(A) = \iint_A 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d 1\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = (b-a)(d-c).$$
- Si $f(x,y) = x^2y^2$, son intégrale sur $[-1,1] \times [-1,1]$ (qui est horizontalement simple) est donnée par:
$$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 x^2y^2\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{-1}^1 x^2 \left(\int_{-1}^1 y^2\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$
$$= \int_{-1}^1 \frac{2}{3}x^2\,\mathrm{d}x = \frac{4}{9}.$$

Faites attention à l'ordre de $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$, qui indique dans quel ordre on intègre! Quand on calcule (par exemple) une intégrale en y, on considère que x est une constante dans $f(x,y)$ (et inversément).

Question

On considère le domaine A suivant:

$$A = \left\{(x,y) \text{ tels que } y \in [1,4] \text{ et } 0 \leq x \leq \frac{1}{y}\right\}.$$

Soit $f(x,y) = y\exp(xy)$. Calculer $\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Réponse

Le domaine A est, par définition, horizontalement simple, avec $h_1(y) = 0$ et $h_2(y) = \frac{1}{y}$. On peut alors écrire:

$$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^4 \left(\int_0^{\frac{1}{y}} y\exp(xy)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

On calcule l'intégrale en x en voyant y comme une constante. On pose $u = yx$, avec $\mathrm{d}u = y\,\mathrm{d}x$. On obtient donc, pour tout $y \in [1,4]$ fixé:

$$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^4 \left(\int_0^1 \exp(u)\,\mathrm{d}u \right) \mathrm{d}y = \int_1^4 (e-1)\,\mathrm{d}y$$
$$= 3(e-1).$$

Contenu de la section

Rappel – Définition: Coordonnées polaires

Définition

Soit P un point du plan $\mathbb{R}^2$. Ses coordonnées polaires (ρ,θ) sont définies comme suit:

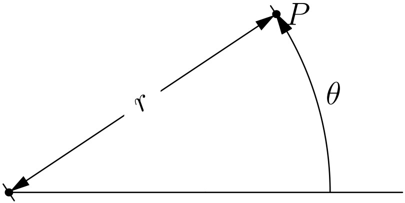
- ρ est la distance du point P à l'origine: $\rho = |P - 0|$
- θ est l'angle entre la demi-droite OP et l'axe des abscisses.

Dans ce cas ρ est un nombre positif ou nul (il est nul seulement pour l'origine) et θ est un angle qui parcourt $[0,2\pi[$. Tout point du plan est uniquement représenté par un couple (ρ,θ) où

$$\rho \geq 0 \quad \text{et} \quad \theta \in [0,2\pi[.$$

Illustration

Les coordonnées polaires (ρ,θ) sont encore notées (r,θ):



La relation entre coordonnées cartésiennes (x,y) et polaires (ρ,θ) est la suivante:

$$x = \rho\cos(\theta) \quad y = \rho\sin(\theta).$$

On a alors:

$$\rho^2 = x^2 + y^2.$$

Intégrales doubles en coordonnées polaires

L'intérêt des coordonnées polaires est de calculer plus facilement de nombreuses intégrales.

Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble. On note $B \subset [0,+\infty[\times[0,2\pi[$ l'ensemble des valeurs prises par les coordonnées polaires (ρ,θ) des points de A.

Résultat

Soit $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. Alors:

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_B f\Big(\rho\cos(\theta),\rho\sin(\theta)\Big)\rho\,d\rho\,d\theta.$$

Autrement dit: pour calculer une intégrale, on:

1. remplace x et y par $\rho\cos(\theta)$ et $\rho\sin(\theta)$,
2. remplace le domaine d'intégration par B, et
3. on remplace $dx\,dy$ par $\rho\,d\rho\,d\theta$.

Attention à ne pas oublier le ρ en plus dans $\rho\,d\rho\,d\theta$!

Exemple

Soit $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x^2 + y^2 \leq 1\right\}$ le disque fermé unité dans $\mathbb{R}^2$.
Soit f la fonction:

$$f : A \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

$2\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ est le volume de la boule de centre 0 et de rayon 1.

A est un disque de centre 0 et de rayon 1: les coordonnées polaires (ρ,θ) de ses points vérifient donc $0 \leq \rho \leq 1$ et $\theta \in [0,2\pi[$. Comme $x^2 + y^2 = \rho^2$ on écrit alors:

$$2\iint_A f = 2\int_{[0,1]\times[0,2\pi[} \sqrt{1-\rho^2}\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \rho\sqrt{1-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\theta$$

$$= 4\pi\int_0^1 \rho\sqrt{1-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho.$$

Exemple (Suite)

Le volume de la boule unité vaut donc:

$$V = 4\pi \int_0^1 \rho\sqrt{1-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho.$$

Cette intégrale se calcule en posant $\rho = \sin(t)$, avec $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Alors $\mathrm{d}\rho = \cos(t)\,\mathrm{d}t$, et comme $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sqrt{1-\rho^2} = \cos(t)$. Ainsi:

$$\int_0^1 \rho\sqrt{1-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\cos(t)^2\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{3}\left[\cos(t)^3\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}$$

Pour la dernière intégrale, on peut soit remarquer que $(\frac{1}{3}\cos(t)^3)' = -\sin(t)\cos(t)^2$ soit faire le changement de variable $u = \cos(t)$.

Le volume de la boule unité est donc en fin de comptes:

$$V = \frac{4\pi}{3}.$$

Contenu de la section

Une définition un peu plus rigoureuse de $\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Soit $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Comme pour les fonctions réelles, nous divisons le domaine A en petits rectangles R_{ij}. Sur chacun de ces rectangles nous calculons de manière approchée le volume « au dessus du rectangle R_{ij} »,noté V_{ij}. L'idée est de considérer f comme « presque constante » sur ce rectangle (car le rectangle est très petit). Ce qui peut se faire de deux manières:

- soit par excès: en considérant que f est proche de sa plus grande valeur sur le rectangle, notée M_{ij}: auquel cas le volume est
$$V_{ij} = M_{ij} \cdot \mathrm{Aire}\Big(R_{ij}\Big).$$
- soit par défaut: en considérant que f est proche de sa plus petite valeur sur le rectangle, notée m_{ij} : auquel cas le volume est
$$V_{ij} = m_{ij} \cdot \mathrm{Aire}\Big(R_{ij}\Big).$$

Une définition un peu plus rigoureuse II

Dans les deux cas, on somme sur tous les rectangles pour obtenir:

- une valeur approchée par excès du volume, notée $\bar{S}(f)$, ou
- une valeur approchée par défaut du volume, notée $\underline{S}(f)$.

Si, lorsque la taille des rectangles tend vers 0, les valeurs de $\bar{S}$ et $\underline{S}$ tendent vers la même limite, on appelle cette limite *l'intégrale de la fonction f sur A*, notée $\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Définition

Une fonction pour laquelle $\bar{S}(f)$ et $\underline{S}(f)$ sont égaux est dite *intégrable* (au sens de Riemann).

Cette définition s'étend au cas général des fonctions à plusieurs variables. Lorsqu'il y a trois variables, la notation devient $\iiint_A f$, etc.

Notez que l'élément $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ qui indique les variables d'intégration représente aussi l'élément d'aire infinitésimal: c'est-à-dire l'aire du rectangle de côtés $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$ (qu'on pense comme très petits).

Proriétés

Théorème

Si $A \subset \mathbb{R}^2$ est un domaine borné, et $f : A \to \mathbb{R}$ est continue et bornée, alors f est intégrable.

Comme dans le cas des fonctions d'une variable, nous avons des propriétés d'additivité :

Résultat

Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $f, g : A \to \mathbb{R}$ alors

$$\iint_A (\alpha f + \beta g) = \alpha \iint_A f + \beta \iint_A g.$$

Si $A, B \subset \mathbb{R}^2$ sont des ensembles bornés, et $A \cap B = \emptyset$, alors

$$\iint_{A \cup B} f = \iint_A f + \iint_B f.$$

Attention, si A et B ont une intersection non vide, ceci n'est plus vrai: car alors on compte plusieurs fois les valeurs de f sur l'intersection.