

# Contenu de la section

- 1 Changements de coordonnées pour calculer des intégrales

# Contenu de la section

- 1 Changements de coordonnées pour calculer des intégrales
  - Coordonnées polaires – Rappel
  - Un autre exemple d'intégration en coordonnées polaires
  - Coordonnées quelconques
  - Intégrales triples et coordonnées cylindriques

# Rappel

Soit  $A \subset \mathbb{R}^2$  un ensemble. On note  $B \subset [0, +\infty[ \times [0, 2\pi[$  l'ensemble des valeurs prises par les coordonnées polaires  $(\rho, \theta)$  des points de  $A$ .

# Rappel

Soit  $A \subset \mathbb{R}^2$  un ensemble. On note  $B \subset [0, +\infty[ \times [0, 2\pi[$  l'ensemble des valeurs prises par les coordonnées polaires  $(\rho, \theta)$  des points de  $A$ .

## Résultat

*Soit  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction intégrable (par exemple, continue et bornée sur  $A$ ).*

# Rappel

Soit  $A \subset \mathbb{R}^2$  un ensemble. On note  $B \subset [0, +\infty[ \times [0, 2\pi[$  l'ensemble des valeurs prises par les coordonnées polaires  $(\rho, \theta)$  des points de  $A$ .

## Résultat

Soit  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction intégrable (par exemple, continue et bornée sur  $A$ ). Alors:

$$\iint_A f(x,y) dx dy =$$

# Rappel

Soit  $A \subset \mathbb{R}^2$  un ensemble. On note  $B \subset [0, +\infty[ \times [0, 2\pi[$  l'ensemble des valeurs prises par les coordonnées polaires  $(\rho, \theta)$  des points de  $A$ .

## Résultat

Soit  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction intégrable (par exemple, continue et bornée sur  $A$ ). Alors:

$$\iint_A f(x,y) dx dy = \iint_B f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) \rho d\rho d\theta.$$

# Rappel

Soit  $A \subset \mathbb{R}^2$  un ensemble. On note  $B \subset [0, +\infty[ \times [0, 2\pi[$  l'ensemble des valeurs prises par les coordonnées polaires  $(\rho, \theta)$  des points de  $A$ .

## Résultat

Soit  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction intégrable (par exemple, continue et bornée sur  $A$ ). Alors:

$$\iint_A f(x,y) dx dy = \iint_B f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) \rho d\rho d\theta.$$

Cette propriété permet de calculer des intégrales en les écrivant **en coordonnées polaires**.

# Rappel

Soit  $A \subset \mathbb{R}^2$  un ensemble. On note  $B \subset [0, +\infty[ \times [0, 2\pi[$  l'ensemble des valeurs prises par les coordonnées polaires  $(\rho, \theta)$  des points de  $A$ .

## Résultat

Soit  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction intégrable (par exemple, continue et bornée sur  $A$ ). Alors:

$$\iint_A f(x,y) dx dy = \iint_B f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) \rho d\rho d\theta.$$

Cette propriété permet de calculer des intégrales en les écrivant **en coordonnées polaires**.

Dans un changement de coordonnées il faut:



# Rappel

Soit  $A \subset \mathbb{R}^2$  un ensemble. On note  $B \subset [0, +\infty[ \times [0, 2\pi[$  l'ensemble des valeurs prises par les coordonnées polaires  $(\rho, \theta)$  des points de  $A$ .

## Résultat

Soit  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction intégrable (par exemple, continue et bornée sur  $A$ ). Alors:

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \iint_B f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) \rho d\rho d\theta.$$

Cette propriété permet de calculer des intégrales en les écrivant **en coordonnées polaires**.

Dans un changement de coordonnées il faut: ne pas oublier **le  $\rho$  dans l'élément de volume**  $\rho d\rho d\theta$ ,

# Rappel

Soit  $A \subset \mathbb{R}^2$  un ensemble. On note  $B \subset [0, +\infty[ \times [0, 2\pi[$  l'ensemble des valeurs prises par les coordonnées polaires  $(\rho, \theta)$  des points de  $A$ .

## Résultat

Soit  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction intégrable (par exemple, continue et bornée sur  $A$ ). Alors:

$$\iint_A f(x,y) dx dy = \iint_B f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) \rho d\rho d\theta.$$

Cette propriété permet de calculer des intégrales en les écrivant **en coordonnées polaires**.

Dans un changement de coordonnées il faut: ne pas oublier **le  $\rho$  dans l'élément de volume**  $\rho d\rho d\theta$ , changer le domaine d'intégration en  $B$  et

# Rappel

Soit  $A \subset \mathbb{R}^2$  un ensemble. On note  $B \subset [0, +\infty[ \times [0, 2\pi[$  l'ensemble des valeurs prises par les coordonnées polaires  $(\rho, \theta)$  des points de  $A$ .

## Résultat

Soit  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction intégrable (par exemple, continue et bornée sur  $A$ ). Alors:

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \iint_B f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) \rho d\rho d\theta.$$

Cette propriété permet de calculer des intégrales en les écrivant **en coordonnées polaires**.

Dans un changement de coordonnées il faut: ne pas oublier **le  $\rho$  dans l'élément de volume**  $\rho d\rho d\theta$ , changer le domaine d'intégration en  $B$  et changer  $x$  et  $y$  en  $\rho \cos(\theta)$  et  $\rho \sin(\theta)$ .

## Question

Soient  $0 < R_1 < R_2$ . Calculer

$$\iint_A \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy$$

où  $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } R_1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R_2\}$ .

## Question

Soient  $0 < R_1 < R_2$ . Calculer

$$\iint_A \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy$$

où  $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } R_1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R_2\}$ .

## Réponse

Le domaine  $A$  est la couronne centrée en  $0$  comprise entre les rayons  $R_1$  et  $R_2$ .

## Question

Soient  $0 < R_1 < R_2$ . Calculer

$$\iint_A \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy$$

où  $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } R_1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R_2\}$ .

## Réponse

Le domaine  $A$  est **la couronne centrée en 0 comprise entre les rayons  $R_1$  et  $R_2$** . Par définition, les coordonnées polaires des points de  $A$  vérifient donc:

$$R_1 \leq \rho \leq R_2 \quad \text{et} \quad \theta \in [0, 2\pi[.$$

## Question

Soient  $0 < R_1 < R_2$ . Calculer

$$\iint_A \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy$$

où  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } R_1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R_2\}$ .

## Réponse

Le domaine  $A$  est la couronne centrée en 0 comprise entre les rayons  $R_1$  et  $R_2$ . Par définition, les coordonnées polaires des points de  $A$  vérifient donc:

$$R_1 \leq \rho \leq R_2 \quad \text{et} \quad \theta \in [0, 2\pi[.$$

En écrivant l'intégrale en coordonnées polaires il vient:

$$\iint_A \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy =$$

## Question

Soient  $0 < R_1 < R_2$ . Calculer

$$\iint_A \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy$$

où  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } R_1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R_2\}$ .

## Réponse

Le domaine  $A$  est la couronne centrée en 0 comprise entre les rayons  $R_1$  et  $R_2$ . Par définition, les coordonnées polaires des points de  $A$  vérifient donc:

$$R_1 \leq \rho \leq R_2 \quad \text{et} \quad \theta \in [0, 2\pi[.$$

En écrivant l'intégrale en coordonnées polaires il vient:

$$\iint_A \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy = \int_{\rho \in [R_1, R_2], \theta \in [0, 2\pi[}$$



## Question

Soient  $0 < R_1 < R_2$ . Calculer

$$\iint_A \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy$$

où  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } R_1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R_2\}$ .

## Réponse

Le domaine  $A$  est la couronne centrée en 0 comprise entre les rayons  $R_1$  et  $R_2$ . Par définition, les coordonnées polaires des points de  $A$  vérifient donc:

$$R_1 \leq \rho \leq R_2 \quad \text{et} \quad \theta \in [0, 2\pi[.$$

En écrivant l'intégrale en coordonnées polaires il vient:

$$\iint_A \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy = \int_{\rho \in [R_1, R_2], \theta \in [0, 2\pi[} \frac{1}{\rho^2}$$

## Question

Soient  $0 < R_1 < R_2$ . Calculer

$$\iint_A \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy$$

où  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } R_1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R_2\}$ .

## Réponse

Le domaine  $A$  est la couronne centrée en 0 comprise entre les rayons  $R_1$  et  $R_2$ . Par définition, les coordonnées polaires des points de  $A$  vérifient donc:

$$R_1 \leq \rho \leq R_2 \quad \text{et} \quad \theta \in [0, 2\pi[.$$

En écrivant l'intégrale en coordonnées polaires il vient:

$$\iint_A \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy = \int_{\rho \in [R_1, R_2], \theta \in [0, 2\pi[} \frac{1}{\rho^2} \rho d\rho d\theta =$$

## Question

Soient  $0 < R_1 < R_2$ . Calculer

$$\iint_A \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy$$

où  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } R_1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R_2\}$ .

## Réponse

Le domaine  $A$  est la couronne centrée en 0 comprise entre les rayons  $R_1$  et  $R_2$ . Par définition, les coordonnées polaires des points de  $A$  vérifient donc:

$$R_1 \leq \rho \leq R_2 \quad \text{et} \quad \theta \in [0, 2\pi[.$$

En écrivant l'intégrale en coordonnées polaires il vient:

$$\iint_A \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy = \int_{\rho \in [R_1, R_2], \theta \in [0, 2\pi[} \frac{1}{\rho^2} \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left( \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{\rho} d\rho \right) d\theta$$

## Question

Soient  $0 < R_1 < R_2$ . Calculer

$$\iint_A \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy$$

où  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } R_1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R_2\}$ .

## Réponse

Le domaine  $A$  est la couronne centrée en  $0$  comprise entre les rayons  $R_1$  et  $R_2$ . Par définition, les coordonnées polaires des points de  $A$  vérifient donc:

$$R_1 \leq \rho \leq R_2 \quad \text{et} \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

En écrivant l'intégrale en coordonnées polaires il vient:

$$\begin{aligned} \iint_A \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy &= \int_{\rho \in [R_1, R_2], \theta \in [0, 2\pi[} \frac{1}{\rho^2} \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left( \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{\rho} d\rho \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (\ln(R_2) - \ln(R_1)) d\theta = \end{aligned}$$

## Question

Soient  $0 < R_1 < R_2$ . Calculer

$$\iint_A \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy$$

où  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } R_1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R_2\}$ .

## Réponse

Le domaine  $A$  est la couronne centrée en  $0$  comprise entre les rayons  $R_1$  et  $R_2$ . Par définition, les coordonnées polaires des points de  $A$  vérifient donc:

$$R_1 \leq \rho \leq R_2 \quad \text{et} \quad \theta \in [0, 2\pi[.$$

En écrivant l'intégrale en coordonnées polaires il vient:

$$\begin{aligned} \iint_A \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy &= \int_{\rho \in [R_1, R_2], \theta \in [0, 2\pi[} \frac{1}{\rho^2} \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left( \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{\rho} d\rho \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (\ln(R_2) - \ln(R_1)) d\theta = 2\pi \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right). \end{aligned}$$

## Remarque

Dans le calcul précédent, nous avons écrit:

$$\int_{\rho \in [R_1, R_2], \theta \in [0, 2\pi[} \frac{1}{\rho} d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left( \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{\rho} d\rho \right) d\theta.$$

## Remarque

Dans le calcul précédent, nous avons écrit:

$$\int_{\rho \in [R_1, R_2], \theta \in [0, 2\pi[} \frac{1}{\rho} d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left( \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{\rho} d\rho \right) d\theta.$$

Nous avons encore une fois utilisé le théorème de Fubini ou, autrement dit, nous avons utilisé que le domaine  $[R_1, R_2] \times [0, 2\pi[$  est **verticalement simple** (car c'est un rectangle).

## Remarque

Dans le calcul précédent, nous avons écrit:

$$\int_{\rho \in [R_1, R_2], \theta \in [0, 2\pi[} \frac{1}{\rho} d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left( \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{\rho} d\rho \right) d\theta.$$

Nous avons encore une fois utilisé le théorème de Fubini ou, autrement dit, nous avons utilisé que le domaine  $[R_1, R_2] \times [0, 2\pi[$  est **verticalement simple** (car c'est un rectangle).

Dans ce cas: on peut calculer les intégrales **dans l'ordre qu'on préfère**:



## Remarque

Dans le calcul précédent, nous avons écrit:

$$\int_{\rho \in [R_1, R_2], \theta \in [0, 2\pi[} \frac{1}{\rho} d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left( \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{\rho} d\rho \right) d\theta.$$

Nous avons encore une fois utilisé le théorème de Fubini ou, autrement dit, nous avons utilisé que le domaine  $[R_1, R_2] \times [0, 2\pi[$  est **verticalement simple** (car c'est un rectangle).

Dans ce cas: on peut calculer les intégrales **dans l'ordre qu'on préfère**: on choisit en général toujours celui qui simplifie le calcul.

## Remarque

Dans le calcul précédent, nous avons écrit:

$$\int_{\rho \in [R_1, R_2], \theta \in [0, 2\pi[} \frac{1}{\rho} d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left( \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{\rho} d\rho \right) d\theta.$$

Nous avons encore une fois utilisé le théorème de Fubini ou, autrement dit, nous avons utilisé que le domaine  $[R_1, R_2] \times [0, 2\pi[$  est **verticalement simple** (car c'est un rectangle).

Dans ce cas: on peut calculer les intégrales **dans l'ordre qu'on préfère**: on choisit en général toujours celui qui simplifie le calcul.

Nous pouvons toujours utiliser la notion de « verticalement simple » même lorsque les variables s'appellent  $\rho$  et  $\theta$ ,

## Remarque

Dans le calcul précédent, nous avons écrit:

$$\int_{\rho \in [R_1, R_2], \theta \in [0, 2\pi[} \frac{1}{\rho} d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left( \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{\rho} d\rho \right) d\theta.$$

Nous avons encore une fois utilisé le théorème de Fubini ou, autrement dit, nous avons utilisé que le domaine  $[R_1, R_2] \times [0, 2\pi[$  est **verticalement simple** (car c'est un rectangle).

Dans ce cas: on peut calculer les intégrales **dans l'ordre qu'on préfère**: on choisit en général toujours celui qui simplifie le calcul.

Nous pouvons toujours utiliser la notion de « verticalement simple » même lorsque les variables s'appellent  $\rho$  et  $\theta$ , et donc **intégrer une variable après l'autre**.

## Remarque

Dans le calcul précédent, nous avons écrit:

$$\int_{\rho \in [R_1, R_2], \theta \in [0, 2\pi[} \frac{1}{\rho} d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left( \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{\rho} d\rho \right) d\theta.$$

Nous avons encore une fois utilisé le théorème de Fubini ou, autrement dit, nous avons utilisé que le domaine  $[R_1, R_2] \times [0, 2\pi[$  est **verticalement simple** (car c'est un rectangle).

Dans ce cas: on peut calculer les intégrales **dans l'ordre qu'on préfère**: on choisit en général toujours celui qui simplifie le calcul.

Nous pouvons toujours utiliser la notion de « verticalement simple » même lorsque les variables s'appellent  $\rho$  et  $\theta$ , et donc **intégrer une variable après l'autre**.

L'interprétation géométrique n'est pas la même que pour les coordonnées cartésiennes, donc nous dirons plutôt « simple en la coordonnée  $\rho$  » ou « simple en la coordonnée  $\theta$  ».

# Contenu de la section

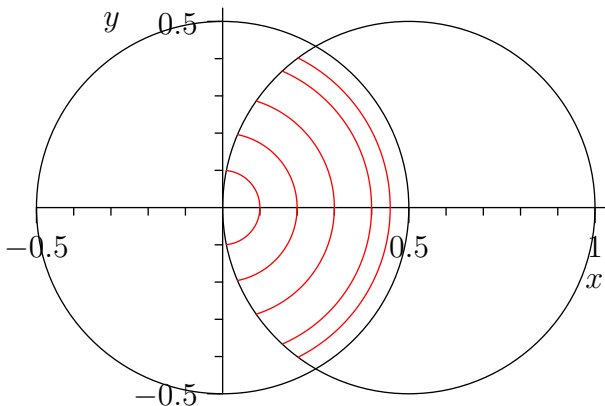
- 1 Changements de coordonnées pour calculer des intégrales
  - Coordonnées polaires – Rappel
  - Un autre exemple d'intégration en coordonnées polaires
  - Coordonnées quelconques
  - Intégrales triples et coordonnées cylindriques

# Aire de l'intersection de deux disques

On cherche à déterminer l'aire de l'intersection des disques de rayon  $\frac{1}{2}$ , centrés respectivement en  $(0,0)$  et  $(\frac{1}{2},0)$ .

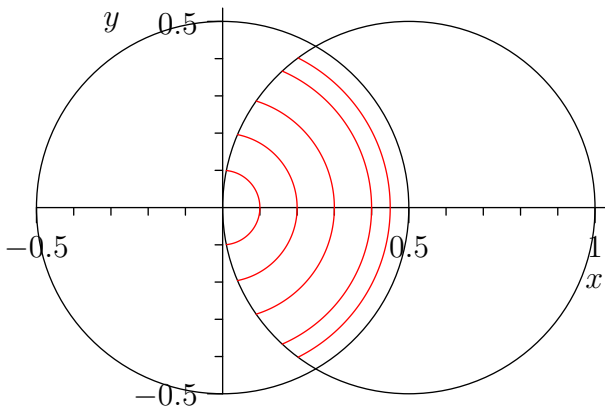
# Aire de l'intersection de deux disques

On cherche à déterminer l'aire de l'intersection des disques de rayon  $\frac{1}{2}$ , centrés respectivement en  $(0,0)$  et  $(\frac{1}{2},0)$ .



# Aire de l'intersection de deux disques

On cherche à déterminer l'aire de l'intersection des disques de rayon  $\frac{1}{2}$ , centrés respectivement en  $(0,0)$  et  $(\frac{1}{2},0)$ .



Pour ça, nous allons déterminer les équations des disques en coordonnées polaires et écrire une intégrale en coordonnées polaires.



# Aire de l'intersection de deux disques II

En coordonnées polaire, le disque centré en 0 de rayon  $\frac{1}{2}$  s'écrit:

$$\rho \leq \frac{1}{2}.$$

# Aire de l'intersection de deux disques II

En coordonnées polaire, le disque centré en 0 de rayon  $\frac{1}{2}$  s'écrit:

$$\rho \leq \frac{1}{2}.$$

Les points du disque centré en  $(\frac{1}{2}, 0)$  vérifient:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}$$

# Aire de l'intersection de deux disques II

En coordonnées polaire, le disque centré en 0 de rayon  $\frac{1}{2}$  s'écrit:

$$\rho \leq \frac{1}{2}.$$

Les points du disque centré en  $(\frac{1}{2}, 0)$  vérifient:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4} \text{ qui se simplifie en}$$

# Aire de l'intersection de deux disques II

En coordonnées polaire, le disque centré en 0 de rayon  $\frac{1}{2}$  s'écrit:

$$\rho \leq \frac{1}{2}.$$

Les points du disque centré en  $(\frac{1}{2}, 0)$  vérifient:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4} \text{ qui se simplifie en } x^2 + y^2 \leq x.$$

# Aire de l'intersection de deux disques II

En coordonnées polaire, le disque centré en 0 de rayon  $\frac{1}{2}$  s'écrit:

$$\rho \leq \frac{1}{2}.$$

Les points du disque centré en  $(\frac{1}{2}, 0)$  vérifient:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4} \text{ qui se simplifie en } x^2 + y^2 \leq x.$$

(Avec un signe « = » ce serait l'équation du cercle).

# Aire de l'intersection de deux disques II

En coordonnées polaire, le disque centré en 0 de rayon  $\frac{1}{2}$  s'écrit:

$$\rho \leq \frac{1}{2}.$$

Les points du disque centré en  $(\frac{1}{2}, 0)$  vérifient:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4} \text{ qui se simplifie en } x^2 + y^2 \leq x.$$

(Avec un signe « = » ce serait l'équation du cercle). Pour trouver l'équation de ce disque en coordonnées polaires, on **remplace alors  $x$  et  $y$  par  $\rho \cos(\theta)$  et  $\rho \sin(\theta)$  respectivement:**

# Aire de l'intersection de deux disques II

En coordonnées polaire, le disque centré en 0 de rayon  $\frac{1}{2}$  s'écrit:

$$\rho \leq \frac{1}{2}.$$

Les points du disque centré en  $(\frac{1}{2}, 0)$  vérifient:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4} \text{ qui se simplifie en } x^2 + y^2 \leq x.$$

(Avec un signe « = » ce serait l'équation du cercle). Pour trouver l'équation de ce disque en coordonnées polaires, on remplace alors  $x$  et  $y$  par  $\rho \cos(\theta)$  et  $\rho \sin(\theta)$  respectivement:

$$x^2 + y^2 \leq x \iff$$

# Aire de l'intersection de deux disques II

En coordonnées polaire, le disque centré en 0 de rayon  $\frac{1}{2}$  s'écrit:

$$\rho \leq \frac{1}{2}.$$

Les points du disque centré en  $(\frac{1}{2}, 0)$  vérifient:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4} \text{ qui se simplifie en } x^2 + y^2 \leq x.$$

(Avec un signe « = » ce serait l'équation du cercle). Pour trouver l'équation de ce disque en coordonnées polaires, on **remplace alors  $x$  et  $y$  par  $\rho \cos(\theta)$  et  $\rho \sin(\theta)$  respectivement**:

$$x^2 + y^2 \leq x \iff \rho^2 \leq \rho \cos \theta \text{ c'est-à-dire}$$



# Aire de l'intersection de deux disques II

En coordonnées polaire, le disque centré en 0 de rayon  $\frac{1}{2}$  s'écrit:

$$\rho \leq \frac{1}{2}.$$

Les points du disque centré en  $(\frac{1}{2}, 0)$  vérifient:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4} \text{ qui se simplifie en } x^2 + y^2 \leq x.$$

(Avec un signe « = » ce serait l'équation du cercle). Pour trouver l'équation de ce disque en coordonnées polaires, on **remplace alors  $x$  et  $y$  par  $\rho \cos(\theta)$  et  $\rho \sin(\theta)$  respectivement**:

$$x^2 + y^2 \leq x \iff \rho^2 \leq \rho \cos \theta \text{ c'est-à-dire } \rho \leq \cos \theta.$$

# Aire de l'intersection de deux disques II

En coordonnées polaire, le disque centré en 0 de rayon  $\frac{1}{2}$  s'écrit:

$$\rho \leq \frac{1}{2}.$$

Les points du disque centré en  $(\frac{1}{2}, 0)$  vérifient:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4} \text{ qui se simplifie en } x^2 + y^2 \leq x.$$

(Avec un signe « = » ce serait l'équation du cercle). Pour trouver l'équation de ce disque en coordonnées polaires, on **remplace alors  $x$  et  $y$  par  $\rho \cos(\theta)$  et  $\rho \sin(\theta)$  respectivement**:

$$x^2 + y^2 \leq x \iff \rho^2 \leq \rho \cos \theta \text{ c'est-à-dire } \rho \leq \cos \theta.$$

L'intersection des disques en coordonnées polaires est donc l'ensemble des points dont les coordonnées polaires  $(\rho, \theta)$  appartiennent à l'ensemble

# Aire de l'intersection de deux disques II

En coordonnées polaire, le disque centré en 0 de rayon  $\frac{1}{2}$  s'écrit:

$$\rho \leq \frac{1}{2}.$$

Les points du disque centré en  $(\frac{1}{2}, 0)$  vérifient:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4} \text{ qui se simplifie en } x^2 + y^2 \leq x.$$

(Avec un signe « = » ce serait l'équation du cercle). Pour trouver l'équation de ce disque en coordonnées polaires, on **remplace alors  $x$  et  $y$  par  $\rho \cos(\theta)$  et  $\rho \sin(\theta)$  respectivement**:

$$x^2 + y^2 \leq x \iff \rho^2 \leq \rho \cos \theta \text{ c'est-à-dire } \rho \leq \cos \theta.$$

L'intersection des disques en coordonnées polaires est donc l'ensemble des points dont les coordonnées polaires  $(\rho, \theta)$  appartiennent à l'ensemble

$$B := \left\{ (\rho, \theta) \text{ t.q. } 0 \leq \rho \leq \frac{1}{2}, \quad \rho \leq \cos \theta, \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \right\}.$$

# Aire de l'intersection de deux disques II

En coordonnées polaire, le disque centré en 0 de rayon  $\frac{1}{2}$  s'écrit:

$$\rho \leq \frac{1}{2}.$$

Les points du disque centré en  $(\frac{1}{2}, 0)$  vérifient:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4} \text{ qui se simplifie en } x^2 + y^2 \leq x.$$

(Avec un signe « = » ce serait l'équation du cercle). Pour trouver l'équation de ce disque en coordonnées polaires, on **remplace alors  $x$  et  $y$  par  $\rho \cos(\theta)$  et  $\rho \sin(\theta)$  respectivement**:

$$x^2 + y^2 \leq x \iff \rho^2 \leq \rho \cos \theta \text{ c'est-à-dire } \rho \leq \cos \theta.$$

L'intersection des disques en coordonnées polaires est donc l'ensemble des points dont les coordonnées polaires  $(\rho, \theta)$  appartiennent à l'ensemble

$$B := \left\{ (\rho, \theta) \text{ t.q. } 0 \leq \rho \leq \frac{1}{2}, \quad \rho \leq \cos \theta, \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \right\}.$$

Le domaine de  $\theta$  est imposé par la condition  $\cos(\theta) \geq \rho \geq 0$ .

# Aire de l'intersection de deux disques III

L'aire de ce domaine est alors:  $Aire(B) = \iint_B \rho d\rho d\theta$ , que nous allons calculer.

# Aire de l'intersection de deux disques III

L'aire de ce domaine est alors:  $\text{Aire}(B) = \iint_B \rho d\rho d\theta$ , que nous allons calculer.

Comme  $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , et que la fonction  $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  est une bijection, la condition  $\rho \leq \cos \theta$  est équivalente à:

$$-\arccos \rho \leq \theta \leq \arccos \rho.$$

# Aire de l'intersection de deux disques III

L'aire de ce domaine est alors:  $\text{Aire}(B) = \iint_B \rho d\rho d\theta$ , que nous allons calculer.

Comme  $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , et que la fonction  $\arccos : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$  est une bijection, la condition  $\rho \leq \cos \theta$  est équivalente à:

$$-\arccos \rho \leq \theta \leq \arccos \rho.$$

Le domaine  $B$  devient donc:

$$B := \left\{ (\rho, \theta) \text{ t.q. } 0 \leq \rho \leq \frac{1}{2}, -\arccos \rho \leq \theta \leq \arccos \rho \right\}.$$

# Aire de l'intersection de deux disques III

L'aire de ce domaine est alors:  $\text{Aire}(B) = \iint_B \rho d\rho d\theta$ , que nous allons calculer.

Comme  $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , et que la fonction  $\arccos : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$  est une bijection, la condition  $\rho \leq \cos \theta$  est équivalente à:

$$-\arccos \rho \leq \theta \leq \arccos \rho.$$

Le domaine  $B$  devient donc:

$$B := \left\{ (\rho, \theta) \text{ t.q. } 0 \leq \rho \leq \frac{1}{2}, -\arccos \rho \leq \theta \leq \arccos \rho \right\}.$$

C'est un domaine **verticalement simple**, ou plutôt « simple en la coordonnée  $\theta$  ».



# Aire de l'intersection de deux disques III

L'aire de ce domaine est alors:  $\text{Aire}(B) = \iint_B \rho d\rho d\theta$ , que nous allons calculer.

Comme  $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , et que la fonction  $\arccos : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$  est une bijection, la condition  $\rho \leq \cos \theta$  est équivalente à:

$$-\arccos \rho \leq \theta \leq \arccos \rho.$$

Le domaine  $B$  devient donc:

$$B := \left\{ (\rho, \theta) \text{ t.q. } 0 \leq \rho \leq \frac{1}{2}, -\arccos \rho \leq \theta \leq \arccos \rho \right\}.$$

C'est un domaine **verticalement simple**, ou plutôt « simple en la coordonnée  $\theta$  ».

Dès lors nous pouvons intégrer par rapport à  $\theta$  et puis par rapport à  $\rho$ :

# Aire de l'intersection de deux disques III

L'aire de ce domaine est alors:  $\text{Aire}(B) = \iint_B \rho d\rho d\theta$ , que nous allons calculer.

Comme  $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , et que la fonction  $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$  est une bijection, la condition  $\rho \leq \cos \theta$  est équivalente à:

$$-\arccos \rho \leq \theta \leq \arccos \rho.$$

Le domaine  $B$  devient donc:

$$B := \left\{ (\rho, \theta) \text{ t.q. } 0 \leq \rho \leq \frac{1}{2}, -\arccos \rho \leq \theta \leq \arccos \rho \right\}.$$

C'est un domaine **verticalement simple**, ou plutôt « simple en la coordonnée  $\theta$  ».

Dès lors nous pouvons intégrer par rapport à  $\theta$  et puis par rapport à  $\rho$ :

$$\text{Aire}(B) =$$

# Aire de l'intersection de deux disques III

L'aire de ce domaine est alors:  $\text{Aire}(B) = \iint_B \rho d\rho d\theta$ , que nous allons calculer.

Comme  $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , et que la fonction  $\arccos : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$  est une bijection, la condition  $\rho \leq \cos \theta$  est équivalente à:

$$-\arccos \rho \leq \theta \leq \arccos \rho.$$

Le domaine  $B$  devient donc:

$$B := \left\{ (\rho, \theta) \text{ t.q. } 0 \leq \rho \leq \frac{1}{2}, -\arccos \rho \leq \theta \leq \arccos \rho \right\}.$$

C'est un domaine **verticalement simple**, ou plutôt « simple en la coordonnée  $\theta$  ».

Dès lors nous pouvons intégrer par rapport à  $\theta$  et puis par rapport à  $\rho$ :

$$\text{Aire}(B) = \int_{\rho=0}^{1/2} \left( \int_{\theta=-\arccos \rho}^{\arccos \rho} d\theta \right) \rho d\rho$$

# Aire de l'intersection de deux disques III

L'aire de ce domaine est alors:  $\text{Aire}(B) = \iint_B \rho d\rho d\theta$ , que nous allons calculer.

Comme  $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , et que la fonction  $\arccos : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$  est une bijection, la condition  $\rho \leq \cos \theta$  est équivalente à:

$$-\arccos \rho \leq \theta \leq \arccos \rho.$$

Le domaine  $B$  devient donc:

$$B := \left\{ (\rho, \theta) \text{ t.q. } 0 \leq \rho \leq \frac{1}{2}, -\arccos \rho \leq \theta \leq \arccos \rho \right\}.$$

C'est un domaine **verticalement simple**, ou plutôt « simple en la coordonnée  $\theta$  ».

Dès lors nous pouvons intégrer par rapport à  $\theta$  et puis par rapport à  $\rho$ :

$$\text{Aire}(B) = \int_{\rho=0}^{1/2} \left( \int_{\theta=-\arccos \rho}^{\arccos \rho} d\theta \right) \rho d\rho = 2 \int_0^{1/2} \rho \arccos \rho d\rho.$$

# Aire de l'intersection de deux disques IV

Question (À faire chez vous)

# Aire de l'intersection de deux disques IV

Question (À faire chez vous)

Vérifiez que

$$2 \int_0^{1/2} \rho \arccos \rho \, d\rho = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

# Aire de l'intersection de deux disques IV

Question (À faire chez vous)

Vérifiez que

$$2 \int_0^{1/2} \rho \arccos \rho \, d\rho = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Nous ne corrigerons pas ce calcul ici. Pour calculer cette intégrale vous pouvez (par exemple):

# Aire de l'intersection de deux disques IV

## Question (À faire chez vous)

Vérifiez que

$$2 \int_0^{1/2} \rho \arccos \rho \, d\rho = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Nous ne corrigerons pas ce calcul ici. Pour calculer cette intégrale vous pouvez (par exemple):

- Commencer par faire une intégration par parties pour vous ramener (entre autres choses) au calcul de  $\int_0^{1/2} \frac{\rho^2}{\sqrt{1-\rho^2}} \, d\rho$ .



# Aire de l'intersection de deux disques IV

## Question (À faire chez vous)

Vérifiez que

$$2 \int_0^{1/2} \rho \arccos \rho \, d\rho = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Nous ne corrigerons pas ce calcul ici. Pour calculer cette intégrale vous pouvez (par exemple):

- Commencer par faire une intégration par parties pour vous ramener (entre autres choses) au calcul de  $\int_0^{1/2} \frac{\rho^2}{\sqrt{1-\rho^2}} \, d\rho$ .
- Faire le changement de variable  $u = \cos(t)$  dans cette intégrale pour la calculer.

# Aire de l'intersection de deux disques IV

## Question (À faire chez vous)

Vérifiez que

$$2 \int_0^{1/2} \rho \arccos \rho \, d\rho = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Nous ne corrigerons pas ce calcul ici. Pour calculer cette intégrale vous pouvez (par exemple):

- Commencer par faire une intégration par parties pour vous ramener (entre autres choses) au calcul de  $\int_0^{1/2} \frac{\rho^2}{\sqrt{1-\rho^2}} \, d\rho$ .
- Faire le changement de variable  $u = \cos(t)$  dans cette intégrale pour la calculer.

Vérifiez que vous savez faire ce calcul.

# Contenu de la section

- 1 Changements de coordonnées pour calculer des intégrales
  - Coordonnées polaires – Rappel
  - Un autre exemple d'intégration en coordonnées polaires
  - **Coordonnées quelconques**
  - Intégrales triples et coordonnées cylindriques

# Systèmes de coordonnées

Rappelons qu'un *système de coordonnées* sur une partie du plan est une bijection entre ce sous-ensemble et une partie de  $\mathbb{R}^2$ .

# Systèmes de coordonnées

Rappelons qu'un *système de coordonnées* sur une partie du plan est une bijection entre ce sous-ensemble et une partie de  $\mathbb{R}^2$ .

« Bijection »

# Systèmes de coordonnées

Rappelons qu'un *système de coordonnées* sur une partie du plan est une bijection entre ce sous-ensemble et une partie de  $\mathbb{R}^2$ .

« Bijection » signifie que tout point du plan est *uniquement représenté* par un couple de nombres dans  $\mathbb{R}^2$ .

# Systèmes de coordonnées

Rappelons qu'un *système de coordonnées* sur une partie du plan est une bijection entre ce sous-ensemble et une partie de  $\mathbb{R}^2$ .

« Bijection » signifie que tout point du plan est *uniquement représenté* par un couple de nombres dans  $\mathbb{R}^2$ .

En présence de *deux* (ou plusieurs) systèmes de coordonnées, chaque point du plan possède donc *deux paires de coordonnées*.

# Systèmes de coordonnées

Rappelons qu'un *système de coordonnées* sur une partie du plan est une bijection entre ce sous-ensemble et une partie de  $\mathbb{R}^2$ .

« Bijection » signifie que tout point du plan est *uniquement représenté* par un couple de nombres dans  $\mathbb{R}^2$ .

En présence de *deux* (ou plusieurs) systèmes de coordonnées, chaque point du plan possède donc *deux paires de coordonnées*.

## Exemple

Le point du plan représenté par (1,1) en *coordonnées cartésiennes*



# Systèmes de coordonnées

Rappelons qu'un *système de coordonnées* sur une partie du plan est une bijection entre ce sous-ensemble et une partie de  $\mathbb{R}^2$ .

« Bijection » signifie que tout point du plan est *uniquement représenté* par un couple de nombres dans  $\mathbb{R}^2$ .

En présence de *deux* (ou plusieurs) systèmes de coordonnées, chaque point du plan possède donc *deux paires de coordonnées*.

## Exemple

Le point du plan représenté par  $(1,1)$  en *coordonnées cartésiennes* est aussi représenté par  $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$  en *coordonnées polaires*.

# Systèmes de coordonnées

Rappelons qu'un *système de coordonnées* sur une partie du plan est une bijection entre ce sous-ensemble et une partie de  $\mathbb{R}^2$ .

« *Bijection* » signifie que tout point du plan est *uniquement représenté* par un couple de nombres dans  $\mathbb{R}^2$ .

En présence de *deux* (ou plusieurs) systèmes de coordonnées, chaque point du plan possède donc *deux paires de coordonnées*.

## Exemple

Le point du plan représenté par  $(1,1)$  en *coordonnées cartésiennes* est aussi représenté par  $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$  en *coordonnées polaires*.

## Remarque

Les systèmes de coordonnées cartésiennes (définies sur tout le plan) et polaires (définies sur tout le plan excepté l'origine) sont nos favoris.

# Changement de coordonnées

On note  $(u,v)$  des coordonnées quelconques (par exemple polaires), définies sur une partie  $A$  du plan.

# Changement de coordonnées

On note  $(u,v)$  des coordonnées quelconques (par exemple polaires), définies sur une partie  $A$  du plan. Le passage de  $(u,v)$  aux coordonnées cartésiennes  $(x,y)$  fournit **une bijection**.

# Changement de coordonnées

On note  $(u,v)$  des coordonnées quelconques (par exemple polaires), définies sur une partie  $A$  du plan. Le passage de  $(u,v)$  aux coordonnées cartésiennes  $(x,y)$  fournit **une bijection**. Elle est appelée **application de changement de coordonnées**.

# Changement de coordonnées

On note  $(u,v)$  des coordonnées quelconques (par exemple polaires), définies sur une partie  $A$  du plan. Le passage de  $(u,v)$  aux coordonnées cartésiennes  $(x,y)$  fournit **une bijection**. Elle est appelée **application de changement de coordonnées**.

Cette application, notée  $F$ , est une fonction de  $A \subset \mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ .

# Changement de coordonnées

On note  $(u,v)$  des coordonnées quelconques (par exemple polaires), définies sur une partie  $A$  du plan. Le passage de  $(u,v)$  aux coordonnées cartésiennes  $(x,y)$  fournit **une bijection**. Elle est appelée **application de changement de coordonnées**.

Cette application, notée  $F$ , est une fonction de  $A \subset \mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ . On peut donc l'écrire sous la forme suivante:

$$F(u,v) = (F_1(u,v), F_2(u,v)).$$

# Changement de coordonnées

On note  $(u,v)$  des coordonnées quelconques (par exemple polaires), définies sur une partie  $A$  du plan. Le passage de  $(u,v)$  aux coordonnées cartésiennes  $(x,y)$  fournit **une bijection**. Elle est appelée **application de changement de coordonnées**.

Cette application, notée  $F$ , est une fonction de  $A \subset \mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ . On peut donc l'écrire sous la forme suivante:

$$F(u,v) = (F_1(u,v), F_2(u,v)).$$

Ici  $F_1, F_2 : A \rightarrow \mathbb{R}$  sont les fonctions donnant respectivement  $x$  et  $y$  en fonction de  $u$  et  $v$ :



# Changement de coordonnées

On note  $(u,v)$  des coordonnées quelconques (par exemple polaires), définies sur une partie  $A$  du plan. Le passage de  $(u,v)$  aux coordonnées cartésiennes  $(x,y)$  fournit **une bijection**. Elle est appelée **application de changement de coordonnées**.

Cette application, notée  $F$ , est une fonction de  $A \subset \mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ . On peut donc l'écrire sous la forme suivante:

$$F(u,v) = (F_1(u,v), F_2(u,v)).$$

Ici  $F_1, F_2 : A \rightarrow \mathbb{R}$  sont les fonctions donnant respectivement  $x$  et  $y$  en fonction de  $u$  et  $v$ :

$$x = F_1(u,v) \quad \text{et} \quad y = F_2(u,v).$$

# Changement de coordonnées

On note  $(u,v)$  des coordonnées quelconques (par exemple polaires), définies sur une partie  $A$  du plan. Le passage de  $(u,v)$  aux coordonnées cartésiennes  $(x,y)$  fournit **une bijection**. Elle est appelée **application de changement de coordonnées**.

Cette application, notée  $F$ , est une fonction de  $A \subset \mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ . On peut donc l'écrire sous la forme suivante:

$$F(u,v) = (F_1(u,v), F_2(u,v)).$$

Ici  $F_1, F_2 : A \rightarrow \mathbb{R}$  sont les fonctions donnant respectivement  $x$  et  $y$  en fonction de  $u$  et  $v$ :

$$x = F_1(u,v) \quad \text{et} \quad y = F_2(u,v).$$

## Exemple (Coordonnées polaires)

Elles sont définies pour  $(\rho, \theta) \in ]0, +\infty[ \times ]0, 2\pi[$ .

# Changement de coordonnées

On note  $(u,v)$  des coordonnées quelconques (par exemple polaires), définies sur une partie  $A$  du plan. Le passage de  $(u,v)$  aux coordonnées cartésiennes  $(x,y)$  fournit **une bijection**. Elle est appelée **application de changement de coordonnées**.

Cette application, notée  $F$ , est une fonction de  $A \subset \mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ . On peut donc l'écrire sous la forme suivante:

$$F(u,v) = (F_1(u,v), F_2(u,v)).$$

Ici  $F_1, F_2 : A \rightarrow \mathbb{R}$  sont les fonctions donnant respectivement  $x$  et  $y$  en fonction de  $u$  et  $v$ :

$$x = F_1(u,v) \quad \text{et} \quad y = F_2(u,v).$$

## Exemple (Coordonnées polaires)

Elles sont définies pour  $(\rho, \theta) \in ]0, +\infty[ \times ]0, 2\pi[$ . Comme  $x = \rho \cos(\theta)$  et  $y = \rho \sin(\theta)$ , l'application  $F : (\rho, \theta) \in ]0, +\infty[ \times ]0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^2$  est:

# Changement de coordonnées

On note  $(u,v)$  des coordonnées quelconques (par exemple polaires), définies sur une partie  $A$  du plan. Le passage de  $(u,v)$  aux coordonnées cartésiennes  $(x,y)$  fournit **une bijection**. Elle est appelée **application de changement de coordonnées**.

Cette application, notée  $F$ , est une fonction de  $A \subset \mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ . On peut donc l'écrire sous la forme suivante:

$$F(u,v) = (F_1(u,v), F_2(u,v)).$$

Ici  $F_1, F_2 : A \rightarrow \mathbb{R}$  sont les fonctions donnant respectivement  $x$  et  $y$  en fonction de  $u$  et  $v$ :

$$x = F_1(u,v) \quad \text{et} \quad y = F_2(u,v).$$

## Exemple (Coordonnées polaires)

Elles sont définies pour  $(\rho, \theta) \in ]0, +\infty[ \times ]0, 2\pi[$ . Comme  $x = \rho \cos(\theta)$  et  $y = \rho \sin(\theta)$ , l'application  $F : (\rho, \theta) \in ]0, +\infty[ \times ]0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^2$  est:

$$F(\rho, \theta) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)).$$

# Changement de variables dans une intégrale

## Résultat

*Soit  $A \subset \mathbb{R}^2$ . On suppose que tout point de  $A$  a des coordonnées  $(u, v)$  (autres que les cartésiennes)*

# Changement de variables dans une intégrale

## Résultat

Soit  $A \subset \mathbb{R}^2$ . On suppose que tout point de  $A$  a des coordonnées  $(u,v)$  (autres que les cartésiennes) dont les valeurs décrivent *un ensemble  $B$*  quand  $(x,y)$  décrit  $A$ .

# Changement de variables dans une intégrale

## Résultat

Soit  $A \subset \mathbb{R}^2$ . On suppose que tout point de  $A$  a des coordonnées  $(u,v)$  (autres que les cartésiennes) dont les valeurs décrivent **un ensemble  $B$**  quand  $(x,y)$  décrit  $A$ . Nous notons

$$F(u,v) = (F_1(u,v), F_2(u,v))$$

# Changement de variables dans une intégrale

## Résultat

Soit  $A \subset \mathbb{R}^2$ . On suppose que tout point de  $A$  a des coordonnées  $(u,v)$  (autres que les cartésiennes) dont les valeurs décrivent **un ensemble  $B$**  quand  $(x,y)$  décrit  $A$ . Nous notons

$$F(u,v) = (F_1(u,v), F_2(u,v))$$

l'application qui exprime les coordonnées cartésiennes  $(x,y)$  en fonction des coordonnées  $(u,v)$ :



# Changement de variables dans une intégrale

## Résultat

Soit  $A \subset \mathbb{R}^2$ . On suppose que tout point de  $A$  a des coordonnées  $(u,v)$  (autres que les cartésiennes) dont les valeurs décrivent **un ensemble  $B$**  quand  $(x,y)$  décrit  $A$ . Nous notons

$$F(u,v) = (F_1(u,v), F_2(u,v))$$

l'application qui exprime les coordonnées cartésiennes  $(x,y)$  en fonction des coordonnées  $(u,v)$ :

$$x = F_1(u,v) \quad y = F_2(u,v).$$

# Changement de variables dans une intégrale

## Résultat

Soit  $A \subset \mathbb{R}^2$ . On suppose que tout point de  $A$  a des coordonnées  $(u,v)$  (autres que les cartésiennes) dont les valeurs décrivent **un ensemble  $B$**  quand  $(x,y)$  décrit  $A$ . Nous notons

$$F(u,v) = (F_1(u,v), F_2(u,v))$$

l'application qui exprime les coordonnées cartésiennes  $(x,y)$  en fonction des coordonnées  $(u,v)$ :

$$x = F_1(u,v) \quad y = F_2(u,v).$$

Soit  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  intégrable. Alors l'intégrale de  $f$  se calcule comme:

$$\iint_A f(x,y) dx dy =$$

# Changement de variables dans une intégrale

## Résultat

Soit  $A \subset \mathbb{R}^2$ . On suppose que tout point de  $A$  a des coordonnées  $(u,v)$  (autres que les cartésiennes) dont les valeurs décrivent **un ensemble  $B$**  quand  $(x,y)$  décrit  $A$ . Nous notons

$$F(u,v) = (F_1(u,v), F_2(u,v))$$

l'application qui exprime les coordonnées cartésiennes  $(x,y)$  en fonction des coordonnées  $(u,v)$ :

$$x = F_1(u,v) \quad y = F_2(u,v).$$

Soit  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  intégrable. Alors l'intégrale de  $f$  se calcule comme:

$$\iint_A f(x,y) dx dy = \iint_B f(F_1(u,v), F_2(u,v)) |\det \text{Jac } F_{(u,v)}| du dv.$$

# Changement de variables dans une intégrale

## Résultat

Soit  $A \subset \mathbb{R}^2$ . On suppose que tout point de  $A$  a des coordonnées  $(u,v)$  (autres que les cartésiennes) dont les valeurs décrivent **un ensemble  $B$**  quand  $(x,y)$  décrit  $A$ . Nous notons

$$F(u,v) = (F_1(u,v), F_2(u,v))$$

l'application qui exprime les coordonnées cartésiennes  $(x,y)$  en fonction des coordonnées  $(u,v)$ :

$$x = F_1(u,v) \quad y = F_2(u,v).$$

Soit  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  intégrable. Alors l'intégrale de  $f$  se calcule comme:

$$\iint_A f(x,y) dx dy = \iint_B f(F_1(u,v), F_2(u,v)) |\det \text{Jac } F_{(u,v)}| du dv.$$

Dans cette formule,  $|\det \text{Jac } F_{(u,v)}|$  désigne **la valeur absolue du déterminant de la matrice Jacobienne** (la matrice des dérivées partielles de  $F$ ).

## Exemple (Coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^2$ )

Pour les coordonnées polaires

## Exemple (Coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^2$ )

Pour les coordonnées polaires, on a  $F : ]0, +\infty[ \times ]0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^2$ , donc

## Exemple (Coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^2$ )

Pour les coordonnées polaires, on a  $F : ]0, +\infty[ \times ]0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^2$ , donc

$$F(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \quad \iff$$

## Exemple (Coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^2$ )

Pour les coordonnées polaires, on a  $F : ]0, +\infty[ \times ]0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^2$ , donc

$$F(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \iff F_1(\rho, \theta) = \rho \cos \theta, \quad F_2(\rho, \theta) = \rho \sin \theta.$$



## Exemple (Coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^2$ )

Pour les coordonnées polaires, on a  $F : ]0, +\infty[ \times ]0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^2$ , donc

$$F(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \iff F_1(\rho, \theta) = \rho \cos \theta, \quad F_2(\rho, \theta) = \rho \sin \theta.$$

Alors:

$$\frac{\partial F_1}{\partial \rho} = \cos(\theta)$$

## Exemple (Coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^2$ )

Pour les coordonnées polaires, on a  $F : ]0, +\infty[ \times ]0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^2$ , donc

$$F(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \iff F_1(\rho, \theta) = \rho \cos \theta, \quad F_2(\rho, \theta) = \rho \sin \theta.$$

Alors:

$$\frac{\partial F_1}{\partial \rho} = \cos(\theta) \quad \frac{\partial F_1}{\partial \theta} = -\rho \sin(\theta)$$

## Exemple (Coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^2$ )

Pour les coordonnées polaires, on a  $F : ]0, +\infty[ \times ]0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^2$ , donc

$$F(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \iff F_1(\rho, \theta) = \rho \cos \theta, \quad F_2(\rho, \theta) = \rho \sin \theta.$$

Alors:

$$\frac{\partial F_1}{\partial \rho} = \cos(\theta) \quad \frac{\partial F_1}{\partial \theta} = -\rho \sin(\theta)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \rho} = \sin(\theta)$$

## Exemple (Coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^2$ )

Pour les coordonnées polaires, on a  $F : ]0, +\infty[ \times ]0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^2$ , donc

$$F(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \iff F_1(\rho, \theta) = \rho \cos \theta, \quad F_2(\rho, \theta) = \rho \sin \theta.$$

Alors:

$$\frac{\partial F_1}{\partial \rho} = \cos(\theta) \quad \frac{\partial F_1}{\partial \theta} = -\rho \sin(\theta)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \rho} = \sin(\theta) \quad \frac{\partial F_2}{\partial \theta} = \rho \cos(\theta).$$

## Exemple (Coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^2$ )

Pour les coordonnées polaires, on a  $F : ]0, +\infty[ \times ]0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^2$ , donc

$$F(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \iff F_1(\rho, \theta) = \rho \cos \theta, \quad F_2(\rho, \theta) = \rho \sin \theta.$$

Alors:

$$\frac{\partial F_1}{\partial \rho} = \cos(\theta) \quad \frac{\partial F_1}{\partial \theta} = -\rho \sin(\theta)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \rho} = \sin(\theta) \quad \frac{\partial F_2}{\partial \theta} = \rho \cos(\theta).$$

La matrice Jacobienne est ainsi donnée par:

## Exemple (Coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^2$ )

Pour les coordonnées polaires, on a  $F : ]0, +\infty[ \times ]0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^2$ , donc

$$F(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \iff F_1(\rho, \theta) = \rho \cos \theta, \quad F_2(\rho, \theta) = \rho \sin \theta.$$

Alors:

$$\frac{\partial F_1}{\partial \rho} = \cos(\theta) \quad \frac{\partial F_1}{\partial \theta} = -\rho \sin(\theta)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \rho} = \sin(\theta) \quad \frac{\partial F_2}{\partial \theta} = \rho \cos(\theta).$$

La matrice Jacobienne est ainsi donnée par:

$$\text{Jac } F_{(\rho, \theta)} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix}$$

## Exemple (Coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^2$ )

Pour les coordonnées polaires, on a  $F : ]0, +\infty[ \times ]0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^2$ , donc

$$F(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \iff F_1(\rho, \theta) = \rho \cos \theta, \quad F_2(\rho, \theta) = \rho \sin \theta.$$

Alors:

$$\frac{\partial F_1}{\partial \rho} = \cos(\theta) \quad \frac{\partial F_1}{\partial \theta} = -\rho \sin(\theta)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \rho} = \sin(\theta) \quad \frac{\partial F_2}{\partial \theta} = \rho \cos(\theta).$$

La matrice Jacobienne est ainsi donnée par:

$$\text{Jac } F_{(\rho, \theta)} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix}$$

dont la valeur absolue du déterminant est:

$$|\det \text{Jac } F_{(\rho, \theta)}| =$$

## Exemple (Coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^2$ )

Pour les coordonnées polaires, on a  $F : ]0, +\infty[ \times ]0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^2$ , donc

$$F(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \iff F_1(\rho, \theta) = \rho \cos \theta, \quad F_2(\rho, \theta) = \rho \sin \theta.$$

Alors:

$$\frac{\partial F_1}{\partial \rho} = \cos(\theta) \quad \frac{\partial F_1}{\partial \theta} = -\rho \sin(\theta)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \rho} = \sin(\theta) \quad \frac{\partial F_2}{\partial \theta} = \rho \cos(\theta).$$

La matrice Jacobienne est ainsi donnée par:

$$\text{Jac } F_{(\rho, \theta)} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix}$$

dont la valeur absolue du déterminant est:

$$|\det \text{Jac } F_{(\rho, \theta)}| = |\cos(\theta) \times \rho \cos(\theta)|$$



## Exemple (Coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^2$ )

Pour les coordonnées polaires, on a  $F : ]0, +\infty[ \times ]0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^2$ , donc

$$F(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \iff F_1(\rho, \theta) = \rho \cos \theta, \quad F_2(\rho, \theta) = \rho \sin \theta.$$

Alors:

$$\frac{\partial F_1}{\partial \rho} = \cos(\theta) \quad \frac{\partial F_1}{\partial \theta} = -\rho \sin(\theta)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \rho} = \sin(\theta) \quad \frac{\partial F_2}{\partial \theta} = \rho \cos(\theta).$$

La matrice Jacobienne est ainsi donnée par:

$$\text{Jac } F_{(\rho, \theta)} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix}$$

dont la valeur absolue du déterminant est:

$$|\det \text{Jac } F_{(\rho, \theta)}| = |\cos(\theta) \times \rho \cos(\theta) - (-\rho \sin(\theta)) \times \sin(\theta)| =$$

## Exemple (Coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^2$ )

Pour les coordonnées polaires, on a  $F : ]0, +\infty[ \times ]0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^2$ , donc

$$F(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \iff F_1(\rho, \theta) = \rho \cos \theta, \quad F_2(\rho, \theta) = \rho \sin \theta.$$

Alors:

$$\frac{\partial F_1}{\partial \rho} = \cos(\theta) \quad \frac{\partial F_1}{\partial \theta} = -\rho \sin(\theta)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \rho} = \sin(\theta) \quad \frac{\partial F_2}{\partial \theta} = \rho \cos(\theta).$$

La matrice Jacobienne est ainsi donnée par:

$$\text{Jac } F_{(\rho, \theta)} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix}$$

dont la valeur absolue du déterminant est:

$$|\det \text{Jac } F_{(\rho, \theta)}| = |\cos(\theta) \times \rho \cos(\theta) - (-\rho \sin(\theta)) \times \sin(\theta)| = \rho.$$

Exemple (Coordonnées polaires dans  $\mathbb{R}^2$ )

Pour les coordonnées polaires, on a  $F : ]0, +\infty[ \times ]0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^2$ , donc

$$F(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \iff F_1(\rho, \theta) = \rho \cos \theta, \quad F_2(\rho, \theta) = \rho \sin \theta.$$

Alors:

$$\frac{\partial F_1}{\partial \rho} = \cos(\theta) \quad \frac{\partial F_1}{\partial \theta} = -\rho \sin(\theta)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \rho} = \sin(\theta) \quad \frac{\partial F_2}{\partial \theta} = \rho \cos(\theta).$$

La matrice Jacobienne est ainsi donnée par:

$$\text{Jac } F_{(\rho, \theta)} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix}$$

dont la valeur absolue du déterminant est:

$$|\det \text{Jac } F_{(\rho, \theta)}| = |\cos(\theta) \times \rho \cos(\theta) - (-\rho \sin(\theta)) \times \sin(\theta)| = \rho.$$

Ceci explique pourquoi on a:

$$\iint_A f(x, y) dx dy =$$

## Exemple (Coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^2$ )

Pour les coordonnées polaires, on a  $F : ]0, +\infty[ \times ]0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^2$ , donc

$$F(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \iff F_1(\rho, \theta) = \rho \cos \theta, \quad F_2(\rho, \theta) = \rho \sin \theta.$$

Alors:

$$\frac{\partial F_1}{\partial \rho} = \cos(\theta) \quad \frac{\partial F_1}{\partial \theta} = -\rho \sin(\theta)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \rho} = \sin(\theta) \quad \frac{\partial F_2}{\partial \theta} = \rho \cos(\theta).$$

La matrice Jacobienne est ainsi donnée par:

$$\text{Jac } F_{(\rho, \theta)} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix}$$

dont la valeur absolue du déterminant est:

$$|\det \text{Jac } F_{(\rho, \theta)}| = |\cos(\theta) \times \rho \cos(\theta) - (-\rho \sin(\theta)) \times \sin(\theta)| = \rho.$$

Ceci explique pourquoi on a:

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \iint_B f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) \rho d\rho d\theta,$$

Exemple (Coordonnées polaires dans  $\mathbb{R}^2$ )

Pour les coordonnées polaires, on a  $F : ]0, +\infty[ \times ]0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^2$ , donc

$$F(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \iff F_1(\rho, \theta) = \rho \cos \theta, \quad F_2(\rho, \theta) = \rho \sin \theta.$$

Alors:

$$\frac{\partial F_1}{\partial \rho} = \cos(\theta) \quad \frac{\partial F_1}{\partial \theta} = -\rho \sin(\theta)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \rho} = \sin(\theta) \quad \frac{\partial F_2}{\partial \theta} = \rho \cos(\theta).$$

La matrice Jacobienne est ainsi donnée par:

$$\text{Jac } F_{(\rho, \theta)} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix}$$

dont la valeur absolue du déterminant est:

$$|\det \text{Jac } F_{(\rho, \theta)}| = |\cos(\theta) \times \rho \cos(\theta) - (-\rho \sin(\theta)) \times \sin(\theta)| = \rho.$$

Ceci explique pourquoi on a:

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \iint_B f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) \rho d\rho d\theta,$$

et pourquoi on n'écrit pas juste  $d\rho d\theta$  dans l'intégrale de droite.

# Remarques

- En faisant le changement de variables n'oubliez pas de changer le domaine de définition des coordonnées

# Remarques

- En faisant le changement de variables n'oubliez pas de changer le domaine de définition des coordonnées (comme pour les changements de variable pour les intégrales d'une fonction réelle)

# Remarques

- En faisant le changement de variables **n'oubliez pas de changer le domaine de définition des coordonnées** (comme pour les changements de variable pour les intégrales d'une fonction réelle)
- Ici,  $F : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  est une application de deux variables à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ ,



# Remarques

- En faisant le changement de variables **n'oubliez pas de changer le domaine de définition des coordonnées** (comme pour les changements de variable pour les intégrales d'une fonction réelle)
- Ici,  $F : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  est une application de deux variables à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ , car nous parlons de coordonnées sur le plan.

# Remarques

- En faisant le changement de variables **n'oubliez pas de changer le domaine de définition des coordonnées** (comme pour les changements de variable pour les intégrales d'une fonction réelle)
- Ici,  $F : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  est une application de deux variables à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ , car nous parlons de coordonnées sur le plan. La même formule de changement de variables reste encore vraie **pour des coordonnées sur  $\mathbb{R}^n$** :

# Remarques

- En faisant le changement de variables **n'oubliez pas de changer le domaine de définition des coordonnées** (comme pour les changements de variable pour les intégrales d'une fonction réelle)
- Ici,  $F : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  est une application de deux variables à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ , car nous parlons de coordonnées sur le plan. La même formule de changement de variables reste encore vraie **pour des coordonnées sur  $\mathbb{R}^n$** : dans ce cas  $F$  devient une application  $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,

# Remarques

- En faisant le changement de variables **n'oubliez pas de changer le domaine de définition des coordonnées** (comme pour les changements de variable pour les intégrales d'une fonction réelle)
- Ici,  $F : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  est une application de deux variables à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ , car nous parlons de coordonnées sur le plan. La même formule de changement de variables reste encore vraie **pour des coordonnées sur  $\mathbb{R}^n$** : dans ce cas  $F$  devient une application  $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , et le déterminant est celui d'une matrice de taille  $n \times n$  ( $n$  lignes et  $n$  colonnes).

# Remarques

- En faisant le changement de variables **n'oubliez pas de changer le domaine de définition des coordonnées** (comme pour les changements de variable pour les intégrales d'une fonction réelle)
- Ici,  $F : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  est une application de deux variables à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ , car nous parlons de coordonnées sur le plan. La même formule de changement de variables reste encore vraie **pour des coordonnées sur  $\mathbb{R}^n$** : dans ce cas  $F$  devient une application  $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , et le déterminant est celui d'une matrice de taille  $n \times n$  ( $n$  lignes et  $n$  colonnes).
- $|\det \text{Jac} F_{(u,v)}|$  a une interprétation géométrique: un très petit rectangle de côtés  $dx$  et  $dy$ , donc d'aire  $dx dy$  en coordonnées  $(x,y)$  se transforme

# Remarques

- En faisant le changement de variables **n'oubliez pas de changer le domaine de définition des coordonnées** (comme pour les changements de variable pour les intégrales d'une fonction réelle)
- Ici,  $F : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  est une application de deux variables à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ , car nous parlons de coordonnées sur le plan. La même formule de changement de variables reste encore vraie **pour des coordonnées sur  $\mathbb{R}^n$** : dans ce cas  $F$  devient une application  $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , et le déterminant est celui d'une matrice de taille  $n \times n$  ( $n$  lignes et  $n$  colonnes).
- $|\det \text{Jac} F_{(u,v)}|$  a une interprétation géométrique: un très petit rectangle de côtés  $dx$  et  $dy$ , donc d'aire  $dx dy$  en coordonnées  $(x,y)$  se transforme **en un (très petit) parallélogramme d'aire  $|\det \text{Jac} F_{(u,v)}| du dv$  en coordonnées  $(u,v)$** .

# Contenu de la section

- 1 Changements de coordonnées pour calculer des intégrales
  - Coordonnées polaires – Rappel
  - Un autre exemple d'intégration en coordonnées polaires
  - Coordonnées quelconques
  - Intégrales triples et coordonnées cylindriques

# Intégrales triples

Tout ce que nous venons de voir s'adapte en dimensions plus grandes.



# Intégrales triples

Tout ce que nous venons de voir s'adapte en dimensions plus grandes. Soit  $f$  une fonction définie sur une partie  $A$  de l'espace  $\mathbb{R}^3$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

# Intégrales triples

Tout ce que nous venons de voir s'adapte en dimensions plus grandes. Soit  $f$  une fonction définie sur une partie  $A$  de l'espace  $\mathbb{R}^3$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Par analogie avec l'intégrale double, l'intégrale triple

$$\iiint_A f(x,y,z) dx dy dz$$

# Intégrales triples

Tout ce que nous venons de voir s'adapte en dimensions plus grandes. Soit  $f$  une fonction définie sur une partie  $A$  de l'espace  $\mathbb{R}^3$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Par analogie avec l'intégrale double, l'intégrale triple

$$\iiint_A f(x,y,z) dx dy dz$$

représente « l'hypervolume algébrique sous le graphe de  $f$  ».

C'est-à-dire:

# Intégrales triples

Tout ce que nous venons de voir s'adapte en dimensions plus grandes. Soit  $f$  une fonction définie sur une partie  $A$  de l'espace  $\mathbb{R}^3$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Par analogie avec l'intégrale double, l'intégrale triple

$$\iiint_A f(x,y,z) dx dy dz$$

représente « l'hypervolume algébrique sous le graphe de  $f$  ».

C'est-à-dire: le volume d'un ensemble de  $\mathbb{R}^4$ ,

# Intégrales triples

Tout ce que nous venons de voir s'adapte en dimensions plus grandes. Soit  $f$  une fonction définie sur une partie  $A$  de l'espace  $\mathbb{R}^3$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Par analogie avec l'intégrale double, l'intégrale triple

$$\iiint_A f(x,y,z) dx dy dz$$

représente « l'hypervolume algébrique sous le graphe de  $f$  ».

C'est-à-dire: le volume d'un ensemble de  $\mathbb{R}^4$ , qui n'est donc pas représentable graphiquement.

# Intégrales triples

Tout ce que nous venons de voir s'adapte en dimensions plus grandes. Soit  $f$  une fonction définie sur une partie  $A$  de l'espace  $\mathbb{R}^3$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Par analogie avec l'intégrale double, l'intégrale triple

$$\iiint_A f(x,y,z) dx dy dz$$

représente « l'hypervolume algébrique sous le graphe de  $f$  ».

C'est-à-dire: le volume d'un ensemble de  $\mathbb{R}^4$ , qui n'est donc pas représentable graphiquement.

En revanche, dans le cas particulier  $f(x,y,z) \equiv 1$ , comme pour les intégrales doubles,

$$\iiint_A dx dy dz$$

# Intégrales triples

Tout ce que nous venons de voir s'adapte en dimensions plus grandes. Soit  $f$  une fonction définie sur une partie  $A$  de l'espace  $\mathbb{R}^3$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Par analogie avec l'intégrale double, l'intégrale triple

$$\iiint_A f(x,y,z) dx dy dz$$

représente « l'hypervolume algébrique sous le graphe de  $f$  ».

C'est-à-dire: le volume d'un ensemble de  $\mathbb{R}^4$ , qui n'est donc pas représentable graphiquement.

En revanche, dans le cas particulier  $f(x,y,z) \equiv 1$ , comme pour les intégrales doubles,

$$\iiint_A dx dy dz$$

est la valeur du volume de l'ensemble des points de l'espace  $\mathbb{R}^3$  dont les coordonnées cartésiennes sont dans  $A$ .

# Intégrales triples

Tout ce que nous venons de voir s'adapte en dimensions plus grandes. Soit  $f$  une fonction définie sur une partie  $A$  de l'espace  $\mathbb{R}^3$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Par analogie avec l'intégrale double, l'intégrale triple

$$\iiint_A f(x,y,z) dx dy dz$$

représente « l'hypervolume algébrique sous le graphe de  $f$  ».

C'est-à-dire: le volume d'un ensemble de  $\mathbb{R}^4$ , qui n'est donc pas représentable graphiquement.

En revanche, dans le cas particulier  $f(x,y,z) \equiv 1$ , comme pour les intégrales doubles,

$$\iiint_A dx dy dz$$

est la valeur du volume de l'ensemble des points de l'espace  $\mathbb{R}^3$  dont les coordonnées cartésiennes sont dans  $A$ . Calculer des intégrales triples permet donc de calculer des volumes.



# Coordonnées cylindriques sur $\mathbb{R}^3$

Ces coordonnées sont obtenues en gardant la hauteur  $z$  intacte et

# Coordonnées cylindriques sur $\mathbb{R}^3$

Ces coordonnées sont obtenues en gardant la hauteur  $z$  intacte et en utilisant des coordonnées polaires dans le plan  $(x,y)$ .

# Coordonnées cylindriques sur $\mathbb{R}^3$

Ces coordonnées sont obtenues en gardant la hauteur  $z$  intacte et **en utilisant des coordonnées polaires dans le plan  $(x,y)$** . L'application de changement de coordonnées est donc:

# Coordonnées cylindriques sur $\mathbb{R}^3$

Ces coordonnées sont obtenues en gardant la hauteur  $z$  intacte et **en utilisant des coordonnées polaires dans le plan  $(x,y)$** . L'application de changement de coordonnées est donc:

$$F : ]0, +\infty[ \times [0, 2\pi[ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$F(\rho, \theta, z) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z).$$

# Coordonnées cylindriques sur $\mathbb{R}^3$

Ces coordonnées sont obtenues en gardant la hauteur  $z$  intacte et **en utilisant des coordonnées polaires dans le plan  $(x,y)$** . L'application de changement de coordonnées est donc:

$$F : ]0, +\infty[ \times [0, 2\pi[ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$F(\rho, \theta, z) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z).$$

Ou encore:

$$x = \rho \cos(\theta), \quad y = \rho \sin(\theta), \quad z = z.$$

# Coordonnées cylindriques sur $\mathbb{R}^3$

Ces coordonnées sont obtenues en gardant la hauteur  $z$  intacte et **en utilisant des coordonnées polaires dans le plan  $(x,y)$** . L'application de changement de coordonnées est donc:

$$F : ]0, +\infty[ \times [0, 2\pi[ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$F(\rho, \theta, z) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z).$$

Ou encore:

$$x = \rho \cos(\theta), \quad y = \rho \sin(\theta), \quad z = z.$$

On calcule alors que  $|\det \text{Jac } F_{(\rho, \theta, z)}| = \rho$

# Coordonnées cylindriques sur $\mathbb{R}^3$

Ces coordonnées sont obtenues en gardant la hauteur  $z$  intacte et **en utilisant des coordonnées polaires dans le plan  $(x,y)$** . L'application de changement de coordonnées est donc:

$$F : ]0, +\infty[ \times ]0, 2\pi[ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$
$$F(\rho, \theta, z) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z).$$

Ou encore:

$$x = \rho \cos(\theta), \quad y = \rho \sin(\theta), \quad z = z.$$

On calcule alors que  $|\det \text{Jac } F_{(\rho, \theta, z)}| = \rho$  (vérifiez que vous savez le faire),

# Coordonnées cylindriques sur $\mathbb{R}^3$

Ces coordonnées sont obtenues en gardant la hauteur  $z$  intacte et **en utilisant des coordonnées polaires dans le plan  $(x,y)$** . L'application de changement de coordonnées est donc:

$$F : ]0, +\infty[ \times ]0, 2\pi[ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$
$$F(\rho, \theta, z) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z).$$

Ou encore:

$$x = \rho \cos(\theta), \quad y = \rho \sin(\theta), \quad z = z.$$

On calcule alors que  $|\det \text{Jac } F_{(\rho, \theta, z)}| = \rho$  (vérifiez que vous savez le faire), ce qui donne la formule de changement de variables:

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz =$$



# Coordonnées cylindriques sur $\mathbb{R}^3$

Ces coordonnées sont obtenues en gardant la hauteur  $z$  intacte et **en utilisant des coordonnées polaires dans le plan  $(x,y)$** . L'application de changement de coordonnées est donc:

$$F : ]0, +\infty[ \times ]0, 2\pi[ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$F(\rho, \theta, z) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z).$$

Ou encore:

$$x = \rho \cos(\theta), \quad y = \rho \sin(\theta), \quad z = z.$$

On calcule alors que  $|\det \text{Jac } F_{(\rho, \theta, z)}| = \rho$  (vérifiez que vous savez le faire), ce qui donne la formule de changement de variables:

$$\iiint_A f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{F^{-1}(A)} f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta), z) \rho \, d\rho \, d\theta \, dz.$$

# Coordonnées cylindriques sur $\mathbb{R}^3$

Ces coordonnées sont obtenues en gardant la hauteur  $z$  intacte et **en utilisant des coordonnées polaires dans le plan  $(x,y)$** . L'application de changement de coordonnées est donc:

$$F : ]0, +\infty[ \times [0, 2\pi[ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$
$$F(\rho, \theta, z) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z).$$

Ou encore:

$$x = \rho \cos(\theta), \quad y = \rho \sin(\theta), \quad z = z.$$

On calcule alors que  $|\det \text{Jac } F_{(\rho, \theta, z)}| = \rho$  (vérifiez que vous savez le faire), ce qui donne la formule de changement de variables:

$$\iiint_A f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{F^{-1}(A)} f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta), z) \rho \, d\rho \, d\theta \, dz.$$

Ici  $F^{-1}(A)$  désigne l'ensemble des valeurs prises par  $(\rho, \theta, z)$  lorsque  $(x, y, z)$  parcourent  $A$ .

# Coordonnées cylindriques sur $\mathbb{R}^3$

Ces coordonnées sont obtenues en gardant la hauteur  $z$  intacte et **en utilisant des coordonnées polaires dans le plan  $(x,y)$** . L'application de changement de coordonnées est donc:

$$F : ]0, +\infty[ \times ]0, 2\pi[ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$
$$F(\rho, \theta, z) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z).$$

Ou encore:

$$x = \rho \cos(\theta), \quad y = \rho \sin(\theta), \quad z = z.$$

On calcule alors que  $|\det \text{Jac } F_{(\rho, \theta, z)}| = \rho$  (vérifiez que vous savez le faire), ce qui donne la formule de changement de variables:

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{F^{-1}(A)} f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta), z) \rho d\rho d\theta dz.$$

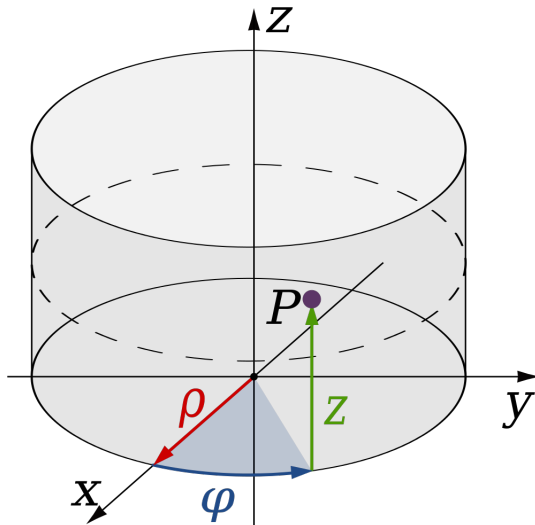
Ici  $F^{-1}(A)$  désigne l'ensemble des valeurs prises par  $(\rho, \theta, z)$  lorsque  $(x, y, z)$  parcourent  $A$ . Pour calculer cette intégrale, le théorème de Fubini s'applique encore: **on peut toujours intégrer une variable après l'autre.**

# Illustration des coordonnées cylindriques

L'angle  $\theta$  est dans le dessin suivant noté  $\varphi$ :

# Illustration des coordonnées cylindriques

L'angle  $\theta$  est dans le dessin suivant noté  $\varphi$ :



# Application au calcul de volumes

## Question

Calculez le volume de l'ensemble suivant:

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } 0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\}.$$

# Application au calcul de volumes

## Question

Calculez le volume de l'ensemble suivant:

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } 0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\}.$$

Cet ensemble est un cône de hauteur 1 et dont la base est le disque unité.

## Réponse

On utilise les coordonnées cylindriques  $(\rho, \theta, z)$ . Lorsque  $(x, y, z)$  parcourt

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } 0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\},$$



## Réponse

On utilise les coordonnées cylindriques  $(\rho, \theta, z)$ . Lorsque  $(x, y, z)$  parcourt

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } 0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\},$$

les coordonnées cylindriques  $(\rho, \theta, z)$  vérifient:

$$0 \leq \rho \leq 1,$$

## Réponse

On utilise les coordonnées cylindriques  $(\rho, \theta, z)$ . Lorsque  $(x, y, z)$  parcourt

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } 0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\},$$

les coordonnées cylindriques  $(\rho, \theta, z)$  vérifient:

$$0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \theta < 2\pi,$$

## Réponse

On utilise les coordonnées cylindriques  $(\rho, \theta, z)$ . Lorsque  $(x, y, z)$  parcourt

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } 0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\},$$

les coordonnées cylindriques  $(\rho, \theta, z)$  vérifient:

$$0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 \leq z \leq 1 - \rho.$$

## Réponse

On utilise les coordonnées cylindriques  $(\rho, \theta, z)$ . Lorsque  $(x, y, z)$  parcourt

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } 0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\},$$

les coordonnées cylindriques  $(\rho, \theta, z)$  vérifient:

$$0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 \leq z \leq 1 - \rho.$$

En utilisant le changement de coordonnées cylindriques on trouve donc:

$$\text{Vol}(C) = \iiint_C dx dy dz =$$

## Réponse

On utilise les coordonnées cylindriques  $(\rho, \theta, z)$ . Lorsque  $(x, y, z)$  parcourt

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } 0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\},$$

les coordonnées cylindriques  $(\rho, \theta, z)$  vérifient:

$$0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 \leq z \leq 1 - \rho.$$

En utilisant le changement de coordonnées cylindriques on trouve donc:

$$\text{Vol}(C) = \iiint_C dx dy dz = \int_{\rho=0}^1 \left( \int_{\theta=0}^{2\pi} \left( \int_{z=0}^{1-\rho} dz \right) d\theta \right) \rho d\rho$$

## Réponse

On utilise les coordonnées cylindriques  $(\rho, \theta, z)$ . Lorsque  $(x, y, z)$  parcourt

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } 0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\},$$

les coordonnées cylindriques  $(\rho, \theta, z)$  vérifient:

$$0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 \leq z \leq 1 - \rho.$$

En utilisant le changement de coordonnées cylindriques on trouve donc:

$$\begin{aligned} \text{Vol}(C) &= \iiint_C dx dy dz = \int_{\rho=0}^1 \left( \int_{\theta=0}^{2\pi} \left( \int_{z=0}^{1-\rho} dz \right) d\theta \right) \rho d\rho \\ &= \int_{\rho=0}^1 \left( \int_{\theta=0}^{2\pi} (1 - \rho) d\theta \right) \rho d\rho \end{aligned}$$

## Réponse

On utilise les coordonnées cylindriques  $(\rho, \theta, z)$ . Lorsque  $(x, y, z)$  parcourt

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } 0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\},$$

les coordonnées cylindriques  $(\rho, \theta, z)$  vérifient:

$$0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 \leq z \leq 1 - \rho.$$

En utilisant le changement de coordonnées cylindriques on trouve donc:

$$\begin{aligned} \text{Vol}(C) &= \iiint_C dx dy dz = \int_{\rho=0}^1 \left( \int_{\theta=0}^{2\pi} \left( \int_{z=0}^{1-\rho} dz \right) d\theta \right) \rho d\rho \\ &= \int_{\rho=0}^1 \left( \int_{\theta=0}^{2\pi} (1-\rho) d\theta \right) \rho d\rho \\ &= \int_{\rho=0}^1 2\pi(\rho - \rho^2) d\rho = \end{aligned}$$

## Réponse

On utilise les coordonnées cylindriques  $(\rho, \theta, z)$ . Lorsque  $(x, y, z)$  parcourt

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } 0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\},$$

les coordonnées cylindriques  $(\rho, \theta, z)$  vérifient:

$$0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 \leq z \leq 1 - \rho.$$

En utilisant le changement de coordonnées cylindriques on trouve donc:

$$\begin{aligned} \text{Vol}(C) &= \iiint_C dx dy dz = \int_{\rho=0}^1 \left( \int_{\theta=0}^{2\pi} \left( \int_{z=0}^{1-\rho} dz \right) d\theta \right) \rho d\rho \\ &= \int_{\rho=0}^1 \left( \int_{\theta=0}^{2\pi} (1-\rho) d\theta \right) \rho d\rho \\ &= \int_{\rho=0}^1 2\pi(\rho - \rho^2) d\rho = \left[ 2\pi \left( \frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^3}{3} \right) \right]_0^1 = \end{aligned}$$



## Réponse

On utilise les coordonnées cylindriques  $(\rho, \theta, z)$ . Lorsque  $(x, y, z)$  parcourt

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } 0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\},$$

les coordonnées cylindriques  $(\rho, \theta, z)$  vérifient:

$$0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 \leq z \leq 1 - \rho.$$

En utilisant le changement de coordonnées cylindriques on trouve donc:

$$\begin{aligned} \text{Vol}(C) &= \iiint_C dx dy dz = \int_{\rho=0}^1 \left( \int_{\theta=0}^{2\pi} \left( \int_{z=0}^{1-\rho} dz \right) d\theta \right) \rho d\rho \\ &= \int_{\rho=0}^1 \left( \int_{\theta=0}^{2\pi} (1-\rho) d\theta \right) \rho d\rho \\ &= \int_{\rho=0}^1 2\pi(\rho - \rho^2) d\rho = \left[ 2\pi \left( \frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^3}{3} \right) \right]_0^1 = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$