Contenu de la section

Changements de coordonnées pour calculer des intégrales

Contenu de la section

Changements de coordonnées pour calculer des intégrales

- Coordonnées polaires – Rappel
- Un autre exemple d'intégration en coordonnées polaires
- Coordonnées quelconques
- Intégrales triples et coordonnées cylindriques

Rappel

Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble. On note $B \subset [0,+\infty[\times[0,2\pi[$ l'ensemble des valeurs prises par les coordonnées polaires (ρ,θ) des points de A.

Résultat

Soit $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable (par exemple, continue et bornée sur A). Alors:

$$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_B f\Big(\rho\cos(\theta),\rho\sin(\theta)\Big)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta.$$

Cette propriété permet de calculer des intégrales en les ecrivant en coordonnées polaires.

Dans un changement de coordonnées il faut: ne pas oublier le ρ dans l'élément de volume $\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$, changer le domaine d'intégration en B et changer x et y en $\rho\cos(\theta)$ et $\rho\sin(\theta)$.

Question

Soient $0 < R_1 < R_2$. Calculer

$$\iint_A \frac{1}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

où $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } R_1 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq R_2\right\}$.

Réponse

Le domaine A est la couronne centrée en 0 comprise entre les rayons R_1 et R_2. Par définition, les coordonnées polaires des points de A vérifient donc:

$$R_1 \leq \rho \leq R_2 \quad \text{et} \quad \theta \in [0,2\pi[.$$

En écrivant l'intégrale en coordonnées polaires il vient:

$$\begin{aligned}\iint_A \frac{1}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{\rho\in[R_1,R_2],\theta\in[0,2\pi[} \frac{1}{\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\left(\int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{\rho}\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (\ln(R_2)-\ln(R_1))\,\mathrm{d}\theta = 2\pi\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right).\end{aligned}$$

Remarque

Dans le calcul précédent, nous avons écrit:

$$\int_{\rho\in[R_1,R_2],\theta\in[0,2\pi[} \frac{1}{\rho}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\left(\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{\rho}\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\theta.$$

Nous avons encore une fois utilisé le théorème de Fubini ou, autrement dit, nous avons utilisé que le domaine $[R_1,R_2]\times[0,2\pi[$ est verticalement simple (car c′est un rectangle).

Dans ce cas: on peut calculer les intégrales dans l′ordre qu′on préfère: on choisit en général toujoujours celui qui simplifie le calcul.

Nous pouvons toujours utiliser la notion de « verticalement simple » même lorsque les variables s′appellent ρ et θ, et donc intégrer une variable après l′autre.

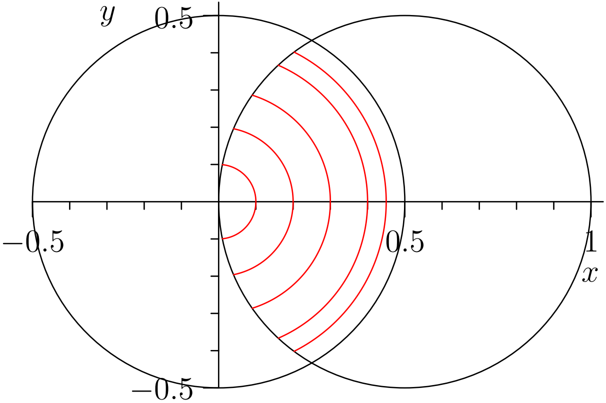
L′interprétation géométrique n′est pas la même que pour les coordonnées cartésiennes, donc nous dirons plutôt « simple en la coordonnée ρ » ou « simple en la coordonnée θ ».

Contenu de la section

Changements de coordonnées pour calculer des intégrales
- Coordonnées polaires – Rappel
- Un autre exemple d'intégration en coordonnées polaires
- Coordonnées quelconques
- Intégrales triples et coordonnées cylindriques

Aire de l'intersection de deux disques

On cherche à déterminer l'aire de l'intersection des disques de rayon $\frac{1}{2}$, centrés respectivement en $(0,0)$ et $(\frac{1}{2},0)$.



Pour ça, nous allons déterminer les équations des disques en coordonnées polaires et écrire une intégrale en coordonnées polaires.

Aire de l'intersection de deux disques II

En coordonnées polaire, le disque centré en 0 de rayon $\frac{1}{2}$ s'écrit:

$$\rho \leq \frac{1}{2}.$$

Les points du disque centré en $(\frac{1}{2},0)$ vérifient:

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4} \text{ qui se simplifie en } x^2+y^2 \leq x.$$

(Avec un signe « $=$ » ce serait l'équation du cercle). Pour trouver l'équation de ce disque en coordonnées polaires, on remplace alors x et y par $\rho\cos(\theta)$ et $\rho\sin(\theta)$ respectivement:

$$x^2+y^2 \leq x \iff \rho^2 \leq \rho\cos\theta \text{ c'est-à-dire } \rho \leq \cos\theta.$$

L'intersection des disques en coordonnées polaires est donc l'ensemble des points dont les coordonnées polaires (ρ,θ) appartiennent à l'ensemble

$$B := \left\{(\rho,\theta) \text{ t.q. } 0 \leq \rho \leq \frac{1}{2}, \quad \rho \leq \cos\theta, \theta \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\right\}.$$

Le domaine de θ est imposé par la condition $\cos(\theta) \geq \rho \geq 0$.

Aire de l'intersection de deux disques III

L'aire de ce domaine est alors: $\mathrm{Aire}(B) = \iint_B \rho\, \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\theta$, que nous allons calculer.

Comme $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, et que la fonction $\arccos : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ est une bijection, la condition $\rho \leq \cos\theta$ est équivalente à:

$$-\arccos\rho \leq \theta \leq \arccos\rho.$$

Le domaine B devient donc:

$$B := \left\{(\rho, \theta) \text{ t.q. } 0 \leq \rho \leq \frac{1}{2}, -\arccos\rho \leq \theta \leq \arccos\rho\right\}.$$

C'est un domaine verticalement simple, ou plutôt « simple en la coordonnée θ ».

Dès lors nous pouvons intégrer par rapport à θ et puis par rapport à ρ :

$$\mathrm{Aire}(B) = \int_{\rho=0}^{1/2} \left(\int_{\theta=-\arccos\rho}^{\arccos\rho} \mathrm{d}\theta \right) \rho\, \mathrm{d}\rho = 2 \int_0^{1/2} \rho \arccos\rho\, \mathrm{d}\rho.$$

Aire de l'intersection de deux disques IV

Question (À faire chez vous)

Vérifiez que

$$2\int_0^{1/2} \rho \arccos \rho \, d\rho = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Nous ne corrigerons pas ce calcul ici. Pour calculer cette intégrale vous pouvez (par exemple):

- Commencer par faire une intégration par parties pour vous ramener (entre autres choses) au calcul de $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\rho^2}{\sqrt{1-\rho^2}} \, d\rho$.
- Faire le changement de variable $u = \cos(t)$ dans cette intégrale pour la calculer.

Vérifiez que vous savez faire ce calcul.

Contenu de la section

Changements de coordonnées pour calculer des intégrales
- Coordonnées polaires – Rappel
- Un autre exemple d'intégration en coordonnées polaires
- Coordonnées quelconques
- Intégrales triples et coordonnées cylindriques

Systèmes de coordonnées

Rappelons qu'un *système de coordonnées* sur une partie du plan est une bijection entre ce sous-ensemble et une partie de $\mathbb{R}^2$.

« Bijection » signifie que tout pont du plan est uniquement représenté par un couple de nombres dans $\mathbb{R}^2$.

En présence de *deux* (ou plusieurs) systèmes de coordonnées, chaque point du plan possède donc *deux paires* de coordonnées.

Exemple

Le point du plan représenté par $(1,1)$ en coordonnées cartésiennes est aussi représenté par $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ en coordonnées polaires.

Remarque

Les systèmes de coordonnées cartésiennes (définies sur tout le plan) et polaires (définies sur tout le plan excepté l'origine) sont nos favoris.

Changement de coordonnées

On note (u,v) des coordonnées quelconques (par exemple polaires), définies sur une partie A du plan. Le passage de (u,v) aux coordonnées cartésiennes (x,y) fournit une bijection. Elle est appelée application de changement de coordonnées.

Cette application, notée F, est une fonction de $A \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. On peut donc l'écrire sous la forme suivante:

$$F(u,v) = \Big(F_1(u,v), F_2(u,v)\Big).$$

Ici $F_1, F_2 : A \to \mathbb{R}$ sont les fonctions donnant respectivement x et y en fonction de u et v:

$$x = F_1(u,v) \quad \text{et} \quad y = F_2(u,v).$$

Exemple (Coordonnées polaires)

Elles sont définies pour $(\rho,\theta) \in]0,+\infty[\times[0,2\pi[$. Comme $x = \rho\cos(\theta)$ et $y = \rho\sin(\theta)$, l'application $F : (\rho,\theta) \in]0,+\infty[\times[0,2\pi[\to \mathbb{R}^2$ est:

$$F(\rho,\theta) = \Big(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)\Big).$$

Changement de variables dans une intégrale

Résultat

Soit $A \subset \mathbb{R}^2$. On suppose que tout point de A a des coordonnées (u,v) (autres que les cartésiennes) dont les valeurs décrivent un ensemble B quand (x,y) décrit A. Nous notons

$$F(u,v) = \Big(F_1(u,v), F_2(u,v)\Big)$$

l'application qui exprime les coordonnées cartésiennes (x,y) en fonction des coordonnées (u,v):

$$x = F_1(u,v) \quad y = F_2(u,v).$$

Soit $f : A \to \mathbb{R}$ intégrable. Alors l'intégrale de f se calcule comme:

$$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_B f\Big(F_1(u,v), F_2(u,v)\Big)\Big|\det \mathrm{Jac}\, F_{(u,v)}\Big|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Dans cette formule, $\Big|\det \mathrm{Jac}\, F_{(u,v)}\Big|$ désigne la valeur absolue du déterminant de la matrice Jacobienne (la matrice des dérivées partielles de F).

Exemple (Coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^2$)

Pour les coordonnées polaires, on a $F :]0,+\infty[\times[0,2\pi[\to \mathbb{R}^2$, donc

$$F(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) \quad \Longleftrightarrow \quad F_1(\rho,\theta) = \rho\cos\theta, \quad F_2(\rho,\theta) = \rho\sin\theta.$$

Alors:

$$\frac{\partial F_1}{\partial \rho} = \cos(\theta) \quad \frac{\partial F_1}{\partial \theta} = -\rho\sin(\theta)$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial \rho} = \sin(\theta) \quad \frac{\partial F_2}{\partial \theta} = \rho\cos(\theta).$$

La matrice Jacobienne est ainsi donnée par:

$$\operatorname{Jac} F_{(\rho,\theta)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}$$

dont la valeur absolue du déterminant est:

$$\left|\det \operatorname{Jac} F_{(\rho,\theta)}\right| = \left|\cos(\theta)\times\rho\cos(\theta) - (-\rho\sin(\theta))\times\sin(\theta)\right| = \rho.$$

Ceci explique pourquoi on a:

$$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_B f\Big(\rho\cos(\theta),\rho\sin(\theta)\Big)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta,$$

et pourquoi on n'écrit pas juste $\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$ dans l'intégrale de droite.

Remarques

- En faisant le changement de variables n'oubliez pas de changer le domaine de définition des coordonnées (comme pour les changements de variable pour les intégrales d'une fonction réelle)
- Ici, $F : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est une application de deux variables à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, car nous parlons de coordonnées sur le plan. La même formule de changement de variables reste encore vraie pour des coordonnées sur $\mathbb{R}^n$: dans ce cas F devient une application $F : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, et le déterminant est celui d'une matrice de taille $n \times n$ (n lignes et n colonnes).
- $\left|\det \operatorname{Jac} F_{(u,v)}\right|$ a une interprétation géométrique: un très petit rectangle de côtés $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$, donc d'aire $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ en coordonnées (x,y) se transforme en un (très petit) parallélogramme d'aire $\left|\det \operatorname{Jac} F_{(u,v)}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$ en coordonnées (u,v).

Contenu de la section

Changements de coordonnées pour calculer des intégrales

Coordonnées polaires – Rappel

Un autre exemple d'intégration en coordonnées polaires

Coordonnées quelconques

Intégrales triples et coordonnées cylindriques

Intégrales triples

Tout ce que nous venons de voir s'adapte en dimensions plus grandes. Soit f une fonction définie sur une partie A de l'espace $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Par analogie avec l'intégrale double, l'intégrale triple

$$\iiint_A f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

représente « l'hypervolume algébrique sous le graphe de f ».
C'est-à-dire: le volume d'un ensemble de $\mathbb{R}^4$, qui n'est donc pas représentable graphiquement.

En revanche, dans le cas particulier $f(x,y,z) \equiv 1$, comme pour les intégrales doubles,

$$\iiint_A \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

est la valeur du volume de l'ensemble des points de l'espace $\mathbb{R}^3$ dont les coordonnées cartésiennes sont dans A. Calculer des intégrales triples permet donc de calculer des volumes.

Coordonnées cylindriques sur $\mathbb{R}^3$

Ces coordonnées sont obtenues en gardant la hauteur z intacte et en utilisant des coordonnées polaires dans le plan (x,y). L'application de changement de coordonnées est donc:

$$F :]0,+\infty[\times[0,2\pi[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

$$F(\rho,\theta,z) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z).$$

Ou encore:

$$x = \rho\cos(\theta), \quad y = \rho\sin(\theta), \quad z = z.$$

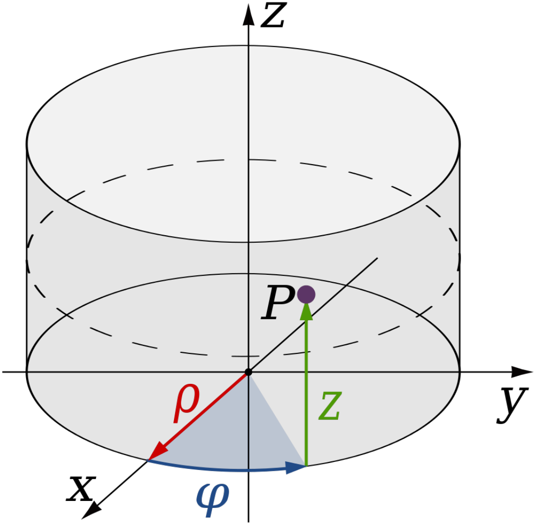
On calcule alors que $\left|\det \operatorname{Jac} F_{(\rho,\theta,z)}\right| = \rho$ (vérifiez que vous savez le faire), ce qui donne la formule de changement de variables:

$$\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{F^{-1}(A)} f\Big(\rho\cos(\theta),\rho\sin(\theta),z\Big)\rho\,d\rho\,d\theta\,dz.$$

Ici $F^{-1}(A)$ désigne l'ensemble des valeurs prises par (ρ,θ,z) lorsque (x,y,z) parcourent A. Pour calculer cette intégrale, le théorème de Fubini s'applique encore: on peut toujours intégrer une variable après l'autre.

Illustration des coordonnées cylindriques

L'angle θ est dans le dessin suivant noté φ:



Application au calcul de volumes

Question

Calculez le volume de l'ensemble suivant:

$$C = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } 0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \right\}.$$

Cet ensemble est un cône de hauteur 1 et dont la base est le disque unité.

Réponse

On utilise les coordonnées cylindriques (ρ,θ,z). Lorsque (x,y,z) parcourt

$$C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x^2+y^2 \leq 1 \text{ et } 0 \leq z \leq 1-\sqrt{x^2+y^2}\right\},$$

les coordonnées cylindriques (ρ,θ,z) vérifient:

$$0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 \leq z \leq 1-\rho.$$

En utilisant le changement de coordonnées cylindriques on trouve donc:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(C) &= \iiint_C \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{\rho=0}^{1}\left(\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\int_{z=0}^{1-\rho}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}\theta\right)\rho\,\mathrm{d}\rho \\
&= \int_{\rho=0}^{1}\left(\int_{\theta=0}^{2\pi}(1-\rho)\,\mathrm{d}\theta\right)\rho\,\mathrm{d}\rho \\
&= \int_{\rho=0}^{1} 2\pi(\rho-\rho^2)\,\mathrm{d}\rho = \left[2\pi\left(\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^3}{3}\right)\right]_0^1 = \frac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$