Contenu de la section

Contenu de la section

Définition des coordonnées sphériques

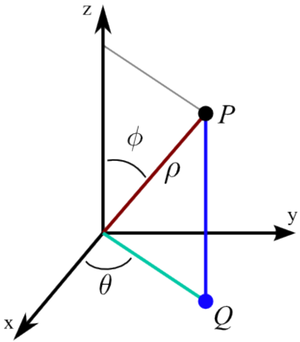
C'est un autre changement de coordonnées pour des fonctions $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

Les coordonnées sphériques sur $\mathbb{R}^3$ sont définies par l'application de changement de coordonnées suivante:

$$F : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \times]0,2\pi] \times [0,\pi] \to \mathbb{R}^3 : \\ (\rho,\theta,\varphi) \mapsto \big(\rho\cos(\theta)\sin(\varphi), \rho\sin(\theta)\sin(\varphi), \rho\cos\varphi\big) \end{cases}$$

Ici, θ est parfois nommée *longitude* et φ est alors la *colatitude*.

Illustration des coordonnées sphériques



ρ représente la distance (dans $\mathbb{R}^3$) entre le point P et l'origine O:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

φ désigne l'angle entre la droite (OP) et l'axe vertical (Oz):

$$z = \rho \cos(\varphi).$$

θ désigne l'angle entre la projection de P dans le plan Oxy et l'axe (Ox):

$$x = \rho \sin(\varphi) \cos(\theta) \quad y = \rho \sin(\varphi) \sin(\theta).$$

Changement de coordonnées

$$F(\rho,\theta,\varphi) = \Big(\rho\cos(\theta)\sin(\varphi), \rho\sin(\theta)\sin(\varphi), \rho\cos\varphi\Big) = (x,y,z).$$

Nous allons calculer $\left|\det \mathrm{Jac}\, F(\rho,\theta,\varphi)\right|$. Par définition:

$$\mathrm{Jac}\, F(\rho,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\sin(\varphi) & -\rho\sin(\theta)\sin(\varphi) & \rho\cos(\theta)\cos(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) & \rho\cos(\theta)\sin(\varphi) & \rho\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \cos(\varphi) & 0 & -\rho\sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$

En développant par rapport à la dernière ligne on trouve:

$$\begin{aligned} |\det \mathrm{Jac}\, F| &= \left|\cos(\varphi)\begin{vmatrix} -\rho\sin(\theta)\sin(\varphi) & \rho\cos(\theta)\cos(\varphi) \\ \rho\cos(\theta)\sin(\varphi) & \rho\sin(\theta)\cos(\varphi) \end{vmatrix}\right. \\ &\quad \left. + (-\rho\sin(\varphi))\begin{vmatrix} \cos(\theta)\sin(\varphi) & -\rho\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) & \rho\cos(\theta)\sin(\varphi) \end{vmatrix}\right| \\ &= \left|\cos(\varphi)\Big(-\rho^2\cos(\varphi)\sin(\varphi)\Big) + (-\rho\sin(\varphi))\rho\sin(\varphi)^2\right| \\ &= \left|-\rho^2\sin(\varphi)(\cos(\varphi)^2+\sin(\varphi)^2)\right| = \rho^2\sin(\varphi). \end{aligned}$$

Formule de changement de variables en coordonnées sphériques

Nous venons de voir que $|\det \operatorname{Jac} F| = \rho^2 \sin(\varphi)$. La formule de changement de variables devient donc:

Pour toute fonction $f = A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, si B désigne l'ensemble des valeurs prises par les coordonnées sphériques sur A,

$$\iiint_A f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z =$$
$$\iiint_B f\Big(\rho\cos(\theta)\sin(\varphi), \rho\sin(\theta)\sin(\varphi), \rho\cos\varphi\Big)\rho^2\sin(\varphi)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi.$$

Dans le cas particulier où $f(x,y,z) = 1$ pour tout $(x,y,z) \in A$, cette intégrale est le volume de l'ensemble A.

Remarque

Attention, le nom des variables peut différer selon les conventions et les variables angulaires sont parfois échangées. Leur signification sera précisée au cas par cas.

Exemple (Volume de la boule dans $\mathbb{R}^3$, encore)

La boule de centre 0 et de rayon 1 est $A = \{(x,y,z), x^2+y^2+z^2 \leq 1.\}$.
Alors les variables des coordonnées sphériques vérifient:

$$0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 < \varphi < \pi.$$

On note alors $B = [0,1] \times [0,2\pi[\times]0,\pi[$. Par un changement de coordonnées sphérique, le volume de la boule vaut:

$$\begin{aligned}
\iiint_A 1 \, dx \, dy \, dz &= \iiint_B \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \rho^2 \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta \, d\rho \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^2 [-\cos\varphi]_0^{\pi} \, d\theta \, d\rho \\
&= 2 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^2 \, d\theta \, d\rho \\
&= 4\pi \int_0^1 \rho^2 \, d\rho = \frac{4}{3}\pi.
\end{aligned}$$

Nombres complexes

Contenu de la section

Rotations

Considérons dans le plan $\mathbb{R}^2$ la rotation de centre $(0,0)$ et d'angle φ, notée R.
C'est une transformation du plan, qui s'écrit naturellement en coordonnées polaires comme :

$$R(\rho,\theta) = (\rho,\theta+\varphi).$$

Pour l'écrire en coordonnées cartésiennes il suffit d'écrire les coordonnées cartésiennes du point d'arrivée $x = \rho\cos(\theta)$, $y = \rho\sin(\theta)$ et de développer grâce aux formules trigonométriques :

$$\begin{aligned} R(x,y) &= (\rho\cos(\theta+\varphi),\rho\sin(\theta+\varphi)) \\ &= (\rho\cos(\theta)\cos(\varphi)-\rho\sin(\theta)\sin(\varphi),\rho\cos(\theta)\sin(\varphi)+\rho\sin(\theta)\cos(\varphi)) \\ &= (x\cos(\varphi)-y\sin(\varphi),x\sin(\varphi)+y\cos(\varphi)) \end{aligned}$$

L'application $R(x,y) = (x\cos(\varphi)-y\sin(\varphi),x\sin(\varphi)+y\cos(\varphi))$ représente donc la rotation d'angle φ en coordonnées cartésiennes.

Une multiplication sur $\mathbb{R}^2$

Nous décidons d'interpréter cette transformation comme une certaine multiplication entre couples de nombres de $\mathbb{R}^2$.

Définition

Si (a,b) et (c,d) sont des couples de nombres réels, on définit leur produit complexe, qui est encore un élément de $\mathbb{R}^2$, par:

$$(a,b)(c,d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Ceci n'a rien à voir avec le produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$!

Exemple

On choisit $(a,b) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$:

$$(\cos\varphi, \sin\varphi)(x,y) = (x\cos(\varphi) - y\sin(\varphi), x\sin(\varphi) + y\cos(\varphi)).$$

L'image du point (x,y) par la rotation d'angle φ s'interprète donc comme le produit complexe de $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ et (x,y).

Si $(a,b) = (k,0)$, on trouve de même $(k,0)(x,y) = (kx,ky)$: ce qui décrit donc une homothétie de rapport k.

Notations

Définition

On notera à partir de maintenant par i le point du plan donné par:

$$i = (0,1).$$

De la sorte tout point (a,b) du plan s′écrit comme:

$$(a,b) = a(1,0) + b(0,1) = a + ib$$

Dorénavant, les éléments de $\mathbb{R}^2$ seront appelés « nombres complexes » et notés sous la forme $a + ib$ (ou $a + bi$).

La formule du produit complexe se réécrit donc comme :

$$\begin{aligned}(a+ib)(c+id) &= (a,b)(c,d) = (ac-bd, ad+bc) \\ &= (ac-bd) + i(ad+bc)\end{aligned}$$

On a en particulier:

$$i^2 = (0 + 1 \cdot i)(0 + 1 \cdot i) = (0-1) + i(0+0) = -1.$$

Contenu de la section

Définitions

Définition

L'ensemble des *nombres complexes* est l'ensemble noté
$$\mathbb{C} = \{a + bi \text{ t.q. } a,b \in \mathbb{R}\},$$
et muni de la mutiplication complexe. C'est donc l'ensemble $\mathbb{R}^2$ des couples de réels muni de la multiplication complexe définie précédemment.

Remarque

Lorsque nous dirons « Soit z un nombre complexe, ... » nous entendrons donc que z s'écrit sous la forme $z = a + bi$ pour certains réels a,b.

Résultat

Deux nombres complexes $a + bi$ et $c + di$ sont égaux si et seulement si $a = c$ et $b = d$.

Partie réelle et imaginaire

Définition

Si $z = a + bi$ est un nombre complexe avec $a,b \in \mathbb{R}$, alors a est sa *partie réelle* et b sa *partie imaginaire*.

Un nombre complexe dont la partie réelle est nulle est appelé un nombre *imaginaire pur*.

Exemple

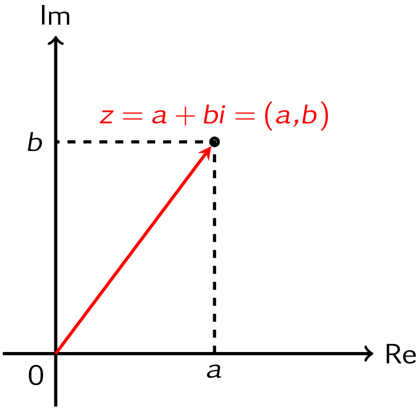
$i, -i, 2i, \ldots.$ sont imaginaires purs.

Remarque

Un nombre complexe dont la partie imaginaire est nulle... est un nombre réel.

Contenu de la section

On a vu que l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ est juste l'ensemble des points du plan $\mathbb{R}^2$ qu'on a muni d'une opération particulière de produit. Lorsque le plan est vu comme l'ensemble des nombres complexes, on l'appelle le *plan de Gauß*:



La plupart des opérations sur les nombres complexes auront une interprétation géométrique dans ce plan.

Contenu de la section

Somme

Puisque les nombres complexes sont des couples de nombres réels, nous définissons:

Définition

La somme de deux nombre complexes $z = a + bi$ et $z' = c + di$ est définie par

$$z + z' := (a + c) + (b + d)i.$$

L'addition de deux complexes vérifie toutes les propriétés usuelles de l'addition sur $\mathbb{R}$, en particulier l'existence d'un opposé: pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$z + (-z) = 0,$$

où 0 est le complexe nul $0 = 0 + 0i$ et $-z$ est le complexe obtenu à partir de $z = a + bi$ comme: $z = -a - bi$.

Exemple

- $(1+i)+(2+i)=3+2i$
- $(-1+i)+(3-i)=2$
- $-1+2i+1+2i=4i$

Interprétation géométrique

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, $z_0 = a+bi$. L'application $z \mapsto z_0 + z$ correspond à une translation dans le plan de vecteur (a,b).

Produit

Définition

Comme expliqué, le produit complexe sur $\mathbb{C}$ est défini par :

$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i.$$

Dans le cas particulier où $b=0$, la multiplication de $(c+di)$ par un réel a donne précisément le « produit par un scalaire » usuel sur $\mathbb{R}^2$.

LA propriété fondamentale des nombres complexes est la suivante:

Résultat

$$i^2 = -1.$$

Les nombres complexes sont ainsi un ensemble dans lequel on peut donner un sens à « la racine carrée de -1 ».

Le produit des nombres complexes a les mêmes propriétés que le produit sur $\mathbb{R}$:

Résultat

Pour tous $z, z', z'' \in \mathbb{C}$:

- $(zz')z'' = z(z'z'')$ *(associativité)*
- $zz' = z'z$ *(commutativité)*
- $1z = z$ *(existence d'un neutre : 1)*
- $z(z' + z'') = zz' + zz''$ *(distributivité par rapport à l'addition)*
- *Si* $z \neq 0$*, il existe* $z^{-1} \neq 0$ *tel que* $zz^{-1} = 1$ *(existence d'un inverse)*

Toutes ces propriétés s'obtiennent immédiatement à partir de la définition; sauf l'existence de l'inverse z^{-1} que nous verrons dans un instant.

Consequences pratiques pour les calculs:

connaissant ces règles pour le produit, On peut « oublier » la formule du produit complexe et se contenter de distribuer et d'utiliser la règle $i^2 = -1$:

$$\begin{aligned}(a+ib)(c+id) &= ac + aid + ibc + ibid \\ &= ac + i(ad+bc) + bdi^2 \\ &= ac - bd + i(ad+bc).\end{aligned}$$

Exemple

- $12(2+i) = 24 + 12i$
- $(2-i)(4+i) = 9 - 2i$
- $(1+i)(1+i) = 2i$
- $(1+i)(1-i) = 2$

Conjugaison d'un nombre complexe

Définition

Si $z = a + ib$ est un nombre complexe, on définit son *conjugué* par

$$\overline{z} = a - ib.$$

Exemple

Quelques examples :

- $\overline{2+i} = 2 - i$
- $\overline{2-i} = 2 + i$

À partir de la définition on obtient:

Résultat

oit $z = a + bi$ un nombre complexe. Alors:

$$a = \frac{z + \overline{z}}{2}, \quad b = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

Résultat

La conjugaison complexe vérifie : pour tous $z,z' \in \mathbb{C}$,

- $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $z = \overline{\overline{z}}$ *(involutivité)*
- $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$
- $\overline{z^2} = \overline{z}^2$; $\overline{z^3} = \overline{z}^3$; *etc.*

Ceci se démontre comme pour le produit en écrivant $z = a + bi$.

Exemple

$\overline{3+2i(1-5i)} = \overline{3} + \overline{2i(1-5i)} = 3 + \overline{2i}(\overline{1-5i}) = 3 + (-2i)(1+5i) =$
$3 - 2i + 10 = 13 - 2i$.

Interprétation géométrique: dans le plan de Gauss, le conjugué d'un point z est le symétrique de z par rapport à l'axe des abscisses.

Contenu de la section

Module d'un complexe

Remarque

Si $z = a + ib$, alors

$$z\overline{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2.$$

Le produit d'un nombre complexe avec son conjugué est donc un nombre réel positif ou nul, qui est nul si et seulement si z est le nombre complexe nul $0 = 0 + 0i$.

Définition

Le *module* de $z = a + bi$ est le nombre réel $|z| := \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Le module de $z = a + bi$ est aussi la norme du vecteur (a,b) dans le plan. En particulier, si $z = a + 0i$ est réel, le module de z est $\sqrt{a^2 + 0^2} = |a|$. C'est la valeur absolue dans ce cas.

Résultat

Les propriétés suivantes sont vérifiées pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$:

- $|zz'| = |z||z'|$
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$
- $|z| \geq 0$
- $|z| = 0 \iff z = 0$

Les trois dernières propriétés viennent du fait que $|a + bi|$ est la norme du vecteur (a,b) (en particulir la deuxième est l'inégalité triangulaire). La première s'obtient en écrivant $z = a + bi$ et $z' = c + di$ et en calculant (essayez de le faire).

Contenu de la section

Inverse d'un complexe

Nous avons annoncé que chaque nombre complexe non-nul admettait un inverse. On peut en fait en donner une description explicite. Soit $z = a + bi$. Comme z est non-nul, on a $a^2 + b^2 > 0$. Comme

$$z\overline{z} = a^2 + b^2$$

nous en déduisons

$$z\frac{\overline{z}}{a^2 + b^2} = 1.$$

Ceci montre que l'inverse de z, encore noté $\frac{1}{z}$ ou z^{-1}, est donné par:

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{a^2 + b^2} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}.$$

Nous pourrions également écrire :

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$