# Rappels

Les nombres complexes sont les nombres de la forme

$$z = a + ib$$

où $a,b \in \mathbb{R}$ et $i$ vérifie:

$$i^2 = -1.$$

($i$ n'est **pas** un nombre réel!).

- $a$ est la partie réelle de $z$, et $b$ est la partie imaginaire de $z$,
- Le conjugué de $z = a + ib$ est $\bar{z} = a - ib$,

En particulier:

$$z \in \mathbb{C} \text{ est un nombre réel } \iff z = \bar{z}.$$

- Le module de $z = a + ib$ est $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$,
- $z = 0$ si et seulement si $a = 0$ et $b = 0$.

# Contenu de la section

Définitions et premières propriétés
Le Plan de Gauß
Opérations sur les nombres complexes
Module d'un nombre complexe
Inverse d'un nombre complexe

# Inverse d'un complexe

Nous avons annoncé que chaque nombre complexe non-nul $z$ admettait un inverse. On va le calculer ici.

Soit $z = a + bi$. Comme $z$ est non-nul, on a $a^2 + b^2 > 0$. Comme

$$|z|^2 = z\overline{z} = a^2 + b^2$$

nous en déduisons

$$z\frac{\overline{z}}{a^2 + b^2} = 1.$$

Ceci montre que l'inverse de $z$, encore noté $\frac{1}{z}$ ou $z^{-1}$, est donné par:

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{a^2 + b^2} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}.$$

Nous pourrions également écrire :

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Concrètement, l'inverse d'un nombre complexe se calcule en multipliant en haut et en bas par le conjugué du dénominateur.

## Exemple

On veut calculer l'inverse de $5-i$. Le conjugué de $5-i$ est $5+i$ et on écrit donc:

$$\frac{1}{5-i}=\frac{1}{5-i}\times\frac{5+i}{5+i}=\frac{5+i}{(5-i)(5+i)}=\frac{5+i}{5^2-(i^2)}=\frac{5}{26}+\frac{i}{26}.$$

# Contenu de la section

Forme polaire ou trigonométrique

# Contenu de la section

Forme polaire ou trigonométrique
- Argument d’un nombre complexe
- Notation exponentielle
- Expression de sin et cos en fonction de $\exp(ix)$.
- Exponentielle complexe

# Argument d'un complexe

Soit $z = a + bi$ un nombre complexe, avec $a,b \in \mathbb{R}$. On décide de repérer le vecteur $(a,b)$ dans $\mathbb{R}^2$ par ses coordonnées polaires:

$$(a,b) = (\rho\cos(\theta),\rho\sin(\theta)) = \rho(\cos(\theta),\sin(\theta)), \quad \text{avec } \theta \in [0,2\pi[.$$

On sait déjà que, par définition du module, $\rho = |z|$.

## Définition

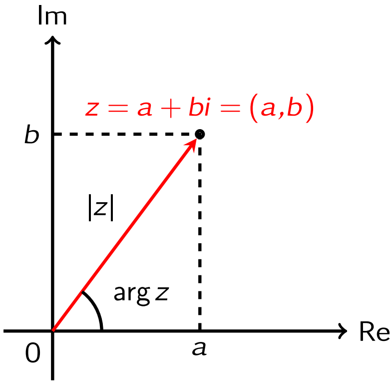
L'*argument* du nombre complexe $z$, noté $\arg z$, est l'angle $\theta$ lorsqu'on voit $z$ comme un point du plan de Gauß.

## Remarque

La mesure de cet angle n'est définie qu'à un multiple entier de $2\pi$ près. Généralement on prend $\arg z$ entre $0$ et $2\pi$ (on parle alors de détermination principale de l'argument) ou alors entre $-\pi$ et $\pi$.

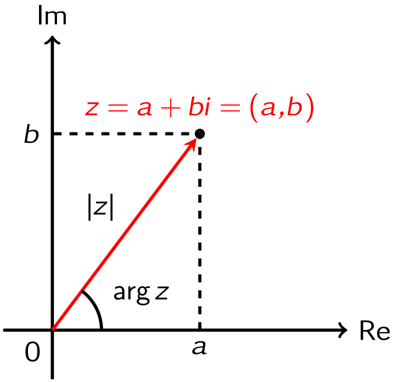
**Attention:** l'argument du nombre complexe nul n'est pas défini.

# Illustration dans le plan de Gauss




## Exemple

Le nombre complexe $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ a pour argument $\theta$ et pour module $\rho$. (C’est juste une autre manière de dire que les coordonnées polaires de $z \in \mathbb{R}^2$ sont $(\rho,\theta)$.)




## Exemple

Voici la détermination principale des arguments de quelques complexes :

- $\arg i = \frac{\pi}{2}$ ;
- $\arg r = 0$ si $r$ est un réel positif ;
- $\arg r = \pi$ si $r$ est un réel strictement négatif.
- $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$ ;

# Comment déterminer l'argument d'un nombre complexe?

Comme $(|z|, \arg z)$ sont les coordonnées polaires de $z \in \mathbb{R}^2$ on peut écrire:

$$z = |z|\Big(\cos(\arg z) + i\sin(\arg z)\Big) = a + ib.$$

On se sert de cette formule pour trouver l'argument d'un complexe $z = a + ib$:

- On commence par calculer $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- On en déduit la valeur de l'argument, qui vérifie:

$$\cos(\arg(z)) = \frac{a}{|z|} \quad \text{et} \quad \sin(\arg(z)) = \frac{b}{|z|}.$$

## Question

Déterminer le module et l'argument du complexe $z = -1 - i$.

## Réponse

Le module de $z$ est donné par:

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

L'argument $\theta$ de $z = -1 - i$ vérifie alors:

$$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ceci donne donc, à $2\pi$ près:

$$\theta = \frac{5\pi}{4}.$$

On retrouve la valeur de l'argument en représentant ce complexe dans le plan de Gauss.

# Propriétés de l'argument

## Résultat

*Pour des complexes z et z' (à un multiple entier de $2\pi$ près) :*

$$\arg(zz') = \arg z + \arg z'.$$

*En particulier:*

$$\arg \overline{z} = -\arg z \quad et \quad \arg(-z) = \pi + \arg z.$$

Nous admettons la preuve de ces propriétés.

# Contenu de la section


Forme polaire ou trigonométrique

- Argument d'un nombre complexe
- Notation exponentielle
- Expression de sin et cos en fonction de $\exp(ix)$.
- Exponentielle complexe

# Forme polaire et notation exponentielle

Dans le plan de Gauß, un complexe $z$ représente un point.Le passage des coordonnées polaires $(\rho,\theta)$ aux coordonnées cartésiennes $(a,b)$ donne deux formules équivalentes:

$$a + bi \quad = \quad \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

## Définition

La première formule $a + ib$ est appelée *forme cartésienne*, et la seconde est la *forme polaire*.

La forme exponentielle permet de raccourcir la forme polaire:

## Définition

On définit, pour $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\exp(i\theta) := \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

et on peut alors noter $z$ sous *forme exponentielle* :

$$z = \rho\exp(i\theta), \quad \text{avec } \rho > 0 \text{ et } \theta \in [0,2\pi[$$

## Remarque

- Si $z = \rho \exp(i\theta)$, à $2\pi$ près, on a bien $\theta = \arg(z)$.
- Avec cette définition, $\exp(i\theta)$ est défini pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, et on a:
$$\exp\Big(i(\theta + 2\pi)\Big) = \exp(i\theta).$$
- De même:
$$\exp\Big(i(\theta + \pi)\Big) = -\exp(i\theta).$$
- La notation $z = \rho \exp(i\theta)$ n'est utilisée que si $\rho > 0$ .

## Exemple

$$1 = \exp(i0), \quad i = \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right), \quad -1 = \exp(i\pi), \quad 1 + \sqrt{3}i = 2\exp\left(i\frac{\pi}{3}\right).$$

On vérifie ces égalités en calculant explicitement ce qui se cache dans la notation exponentielle (en revenant à la définition).

# Intérêt de la forme exponentielle

## Résultat

*Si* $z = \rho \exp(i\theta)$ *et* $z' = \rho' \exp(i\theta')$ *sont deux nombres complexes sous forme exponentielle, et si* $n$ *un entier, on a :*

1. $\overline{z} = \rho \exp(-i\theta)$
2. $\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho \exp(i\theta)} = \frac{1}{\rho} \exp(-i\theta)$
3. $(\rho \exp(i\theta))(\rho' \exp(i\theta')) = \rho\rho' \exp(i(\theta + \theta'))$
4. $(\rho \exp(i\theta))^n = \rho^n \exp(in\theta)$.

La dernière formule prend parfois le nom de « formule de De Moivre ».

Avec la notation exponentielle, les opérations décrites deviennent de simples applications des règles sur les exposants. (Et l'exponentielle $\exp(i\theta)$ se comporte vraiment comme une exponentielle!).

On va démontrer la propriété 4 (la formule de De Moivre).

## Preuve, suite.

Montrons par récurrence la formule de De Moivre:

$$(\rho \exp(i\theta))^n = \rho^n \exp(in\theta)$$

**Initialisation:** La formule est vraie pour $n = 1$, puisque les deux membres sont égaux pour cette valeur de $n$.

**Étape de récurrence:** supposons maintenant que la formule est vraie pour un certain entier $n$ fixé. C'est l'hypothèse de récurrence.

Montrons alors que la formule est encore vraie pour l'entier $n + 1$.

Pour ça, on calcule $(\rho \exp(i\theta))^{n+1}$:

$$\begin{aligned}(\rho \exp(i\theta))^{n+1} &= (\rho \exp(i\theta))(\rho \exp(i\theta))^n \\ &= (\rho \exp(i\theta))(\rho^n \exp(in\theta)) \\ &= \rho\rho^n \exp(i(\theta + n\theta)) \\ &= \rho^{n+1} \exp(i(n+1)\theta)\end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'hypothèse de récurrence à la deuxième ligne.

Ceci prouve la formule de De Moivre pour $n$ entier naturel. On prouve la formule pour les entiers négatifs en utilisant la conjugaison. $\square$

# Interprétation géométrique du produit complexe:

Si $a+bi$ est un nombre complexe, on considère les coordonnées polaires de $(a,b)$:

$$(a,b) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta),$$

avec $\rho \geq 0$ et $\theta \in [0,2\pi[$.

Alors $(x,y) \mapsto (a,b)(x,y)$ est la composée de :

- une rotation centrée en l'origine d'angle $\theta$, et
- une homothétie de rapport $\rho$.

# Contenu de la section

Forme polaire ou trigonométrique

Argument d'un nombre complexe

Notation exponentielle

Expression de sin et cos en fonction de $\exp(ix)$.

Exponentielle complexe

# Expression des fonctions trigonométriques

Pour $x \in \mathbb{R}$, et par définition de $\exp(ix)$, on a:

$$\exp(ix) = \cos x + i \sin x$$

$$\exp(-ix) = \cos(-x) + i \sin(-x) = \cos x - i \sin x.$$

Nous en déduisons, par addition et soustraction :

$$\cos(x) = \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2}, \quad \sin(x) = \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i}$$

(Attention au $i$ en plus au numérateur de l'expression de $\sin x$!).

Ces expressions permettent de passer facilement des fonctions $\exp(ix)$, naturelles quand on travaille avec des nombres complexes, aux fonctions cos et sin.

# Contenu de la section

Forme polaire ou trigonométrique
- Argument d'un nombre complexe
- Notation exponentielle
- Expression de sin et cos en fonction de exp($ix$).
- Exponentielle complexe

# Exponentielle complexe

Nous savons calculer l'exponentielle de tout nombre réel; depuis peu nous savons aussi calculer $\exp(i\theta)$ comme:

$$\exp(i\theta) = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

La définition s'étend naturellement pour calculer l'exponentielle d'un nombre complexe:

## Définition

Si $z = a + ib$ est un nombre complexe, avec $a,b \in \mathbb{R}$, nous définissons :

$$\exp z = \exp(a + ib) := \exp(a)\exp(ib).$$

Cette nouvelle application $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto \exp z$ vérifie encore:

$$\exp z \exp z' = \exp(z + z').$$

pour tous complexes $z,z'$ (attention on multiplie ici des nombres complexes).

# Contenu de la section

Équations polynomiales et nombres complexes

# Nombres complexes et équations polynomiales

## Remarque

Dès lors que nous avons de « nouveaux nombres » (ici: les complexes) nous pouvons résoudre des équations qui les impliquent.

Ce fut d'ailleurs la raison principale de l'introduction des nombres complexes par Cardan en 1545: s'en servir comme raccourci pour résoudre des équations polynomiales.

# Contenu de la section

Équations polynomiales et nombres complexes
- Équations du premier degré
- Racines carrées
- Équations du second degré
- Racines $n$-èmes d'un nombre complexe
- Équations polynomiales de degrés supérieur

# Équations du premier degré

Considérons l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ suivante :

$$az + b = 0$$

où $a, b \in \mathbb{C}$ sont des constantes données, avec $a \neq 0$.
Sa solution est

$$z = -\frac{b}{a},$$

car les règles d'addition de multiplication par les complexes sont identiques aux règles sur les réels. (Attention: ici $\frac{1}{a}$ est l'inverse d'un nombre complexe, qui se calcule comme on l'a vu.)

# Contenu de la section

Équations polynomiales et nombres complexes
Équations du premier degré
Racines carrées
Équations du second degré
Racines $n$-èmes d'un nombre complexe
Équations polynomiales de degrés supérieur

# Racines carrées de nombres complexes

## Rappel

Si $r \in \mathbb{R}^+$, $\sqrt{r}$ est l'unique nombre réel positif dont le carré vaut $r$.

Dans $\mathbb{C}$, en revanche, il n'existe pas de notion de « positif » ou « négatif ». La notation $\sqrt{z}$ n'est en général pas définie pour $z \in \mathbb{C}$.

Cependant, pour un $z \in \mathbb{C}$ donné, nous pouvons parler des racines carrées (ou cubiques, etc.) de $z$.

## Définition

Un complexe $z$ est une racine carrée d'un autre complexe $a + bi$ si $z^2 = a + ib$. Dans ce cas $-z$ est aussi une racine carrée de $a + bi$.

## Exemple

$i$ et $-i$ sont des racines carrées de $-1$, car $i^2 = (-i)^2 = -1$ par définition.

## Question

Déterminez toutes les racines carrées $z = a + ib$ de $3 + 4i$.

**Indication:** écrivez $z = a + ib$, calculez $z^2$, et déterminez $a$ et $b$ en fonction de la condition $z^2 = a + bi$.

## Réponse

Notons $a + bi$ une telle racine carrée, avec $a$ et $b$ réels. En écrivant $(a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi = 3 + 4i$, on résout :

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = 4. \end{cases}$$

Ceci donne $ab = 2$. Ensuite, en multipliant la première équation par $a^2$ et en utilisant que $a^2b^2 = 4$, on obtient: $a^4 - a^2b^2 = 3a^2$, soit $a^4 - 3a^2 - 4 = 0$.

On voit cette équation comme une équation du second degré pour $a^2$ et on trouve $a^2 = 4$ (on ne garde que la solution positive), d'où on déduit que $a = 2$ ou $a = -2$. Comme $ab = 2$, les solutions sont donc :

$$z = -2 - i \qquad \text{et} \qquad z = 2 + i.$$

# Contenu de la section

Équations polynomiales et nombres complexes
Équations du premier degré
Racines carrées
Équations du second degré
Racines $n$-èmes d'un nombre complexe
Équations polynomiales de degrés supérieur

# Équations du second degré

Considérons l'équation

$$az^2 + bz + c = 0 \qquad \text{où } a,b,c \in \mathbb{C} \text{ et } a \neq 0$$

Comme dans le cas réel, nous réécrivons cette équation:

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c = 0 &\iff a\Big(z^2 + 2\frac{b}{2a}z + \frac{c}{a}\Big) = 0 \\ &\iff a\bigg(\Big(z + \frac{b}{2a}\Big)^2 + \frac{c}{a} - \Big(\frac{b}{2a}\Big)^2\bigg) = 0 \\ &\iff \Big(z + \frac{b}{2a}\Big)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0. \end{aligned}$$

Notons $\omega$ une racinée carrée de $b^2 - 4ac$ (c'est-à-dire que $\omega^2 = b^2 - 4ac$). Alors l'équation devient

$$\Big(z + \frac{b}{2a}\Big)^2 - \frac{\omega^2}{4a^2} = 0$$

et donc

$$z = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\omega}{2a}.$$

## Exemple

On cherche toutes les solutions complexes de l'équation

$$z^2 - iz + 2 = 0.$$

Le discriminant vaut

$$\Delta = (-i)^2 - 4 \times 2 = -9,$$

et une racine carrée de $\Delta$ est par exemple $3i$. Les solutions de l'équation sont donc données par

$$z = \frac{i \pm 3i}{2},$$

c'est-à-dire:

$$z = -i \quad \text{et} \quad z = 2i.$$

# Nombre de racines d'une équation du deuxième degré

Si $P(z) = az^2 + bz + c$, nous appellerons racine de $P$ tout nombre complexe $z$ tel que $P(z) = 0$.

## Remarque

Si $b^2 - 4ac = 0$, et donc $\omega = 0$, la méthode précédente ne produit qu'une seule racine de $P$, dite « racine double » ou « de multiplicité 2 ».

Si nous admettons qu'une telle racine compte pour deux nous avons montré le résultat suivant :

## Théorème

*Tout polynôme de degré 2 admet exactement 2 racines complexes (comptées avec multiplicité).*