Suite du cours de Math F112

Le cours d'aujourd'hui est le dernier cours du Module T. À partir de Vendredi 22 Février le cours se sépare en deux parties:

- Les B1-BIOL, B1-CHIM, B1-IRBI, B1-SCIE + B2/3 GEOL-GEOG suivront le Module S avec César Lecoutre. (Fin du cours pour les B1-GEOG et B1-GEOL) Le local est le même qu'aujourd'hui: l'amphithéâtre Lameere. Les horaires du cours restent inchangés.
- Les B1-INFO suivront le Module SI du cours, avec Julie de Saedeleer. Il aura lieu à la Plaine dès le 22 Février (voir GeHol pour le local, qui risque de changer pendant les tout premiers cours pour se stabiliser ensuite).

  Important: l'horaire du module SI change un peu: ce sera le lundi de 14h à 16h et le vendredi de 8h à 10h.

  Toutes les infos du cours seront sur l'UV dans la section module SI. Les slides seront uploadés la veille du cours.

Pour ne pas se tromper

Julie de Saedeleer
(Module SI)

César Lecoutre
(Module S)

Visite des copies de Math F112

La visite des copies de Math F112 aura lieu:

Le Mardi 26 Février 2019, de 10h à 14h, au local 5.06 du bâtiment N/O

Modalités pratiques: on vous fera rentrer dans la salle par groupes de 10 élèves à la fois, et vous aurez au maximum 10 minutes pour consulter votre copie. Il se peut donc que vous deviez attendre un peu.

Si vous n'êtes pas disponibles le 26 Février: vous pouvez donner procuration à un-e autre élève qui suit le cours de Math F112. Pour ce faire, vous devez signer une demande de procuration (un modèle de procuration est disponible sur MonULB, dans Document Manager).

Si aucune procuration (déjà signée) n'est fournie au moment de la visite des copies, vous ne pourrez pas avoir accès à la copie de quelqu'un d'autre.

Contenu de la section

Racines n-èmes

Rappel

On ne parle jamais de la racine carrée (ou cubique, etc...) d'un nombre complexe, mais des racines.

Définition

Soit un entier $n \geq 1$ et z un complexe. On appelle *racine n^{e} de z* tout nombre complexe w tel que $w^n = z$.

Exemple

- i est racine quatrième de 1: car $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$. $-i$ aussi.
- Si $\rho > 0$ est un nombre réel, $\rho^{\frac{1}{n}}$ (la racine n^{e} dans $\mathbb{R}$) est encore une racine n^{e} dans $\mathbb{C}$.
- Si $z = \exp(i\theta)$, alors $\exp\left(i\frac{\theta}{n}\right)$ est une racine n^{e} de z: car
$$\left(\exp\left(i\frac{\theta}{n}\right)\right)^n = \exp\left(ni\frac{\theta}{n}\right) = \exp(i\theta).$$

Expression des racines n^e

Le théorème suivant donne une manière pratique de calculer des racines n^e à partir de la forme polaire:

Théorème

Si z est donné sous forme polaire $z = \rho \exp(i\theta)$ $(\rho \geq 0)$, alors les racines n^e de z sont les nombres $w_0, \ldots, w_{n-1}$ définis par

$$w_k = \sqrt[n]{\rho} \exp\left(i \frac{(\theta + 2k\pi)}{n}\right) \qquad \text{où } k = 0, \ldots, n-1$$

En particulier, si $z \neq 0$, il y a exactement n racines n^e de z.

Il y a deux choses à démontrer dans ce théorème :

- que chaque w_k, pour un k entre 0 et $n-1$, est bien une racine n^e de z
- et qu'il n'y en a pas d'autres.

Preuve du théorème.

Rappel

$$w_k = \sqrt[n]{\rho}\exp\left(i\,\frac{(\theta+2k\pi)}{n}\right) \qquad \text{où } k = 0,\dots,n-1$$

Démonstration.

On commence par vérifier que chaque w_k est une racine n^{e} de $z = \rho\exp(i\theta)$. En effet:

$$\begin{aligned}
w_k^n &= \left(\sqrt[n]{\rho}\exp\left(i\,\frac{(\theta+2k\pi)}{n}\right)\right)^n \\
&= \rho\exp\left(n\,i\,\frac{(\theta+2k\pi)}{n}\right) \\
&= \rho\exp\left(i(\theta+2k\pi)\right) \\
&= \rho(\cos(\theta+2k\pi)+i\sin(\theta+2k\pi)) \\
&= \rho(\cos(\theta)+i\sin(\theta)) \\
&= \rho\exp\left(i\theta\right) = z
\end{aligned}$$

Suite de la preuve.

Pour le second point, considérons w une racine n^{e} de $z = \rho \exp(i\theta)$ que nous écrivons sous la forme:

$$w = r \exp(i\varphi).$$

Alors $w^n = r^n \exp(in\varphi) = \rho \exp(i\theta)$, et en particulier $|w^n| = r^n = |z| = \rho$. Ceci montre déjà que $r = \sqrt[n]{\rho}$.

Par ailleurs, puisque $w^n = z$ et $\rho = r^n$, on a aussi $\exp(in\varphi) = \exp(i\theta)$. C'est-à-dire :

$$\cos(n\varphi) = \cos(\theta) \qquad \text{et} \ \sin(n\varphi) = \sin(\theta)$$

Or deux angles ont même sinus et même cosinus si et seulement si ils sont égaux à 2π près : dès lors, $n\varphi = \theta + 2k\pi$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$, d'où

$$\varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}.$$

$\square$

Fin de la preuve.

Pour l'instant, on a donc montré qu'une racine n-ème de $z = \rho \exp(i\theta)$ est de la forme

$$w_k = \sqrt[n]{\rho}\exp\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. Il reste à vérifier qu'il suffit de se limiter à k compris entre 0 et $n-1$.

Pour cela, remarquons simplement l'égalité :

$$\begin{aligned}
w_{k+n} &= \sqrt[n]{\rho}\exp\left(i\,\frac{\theta + 2(k+n)\pi}{n}\right) \\
&= \sqrt[n]{\rho}\exp\left(i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} + 2\pi\right)\right) \\
&= \sqrt[n]{\rho}\exp\left(i\,\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \\
&= w_k.
\end{aligned}$$

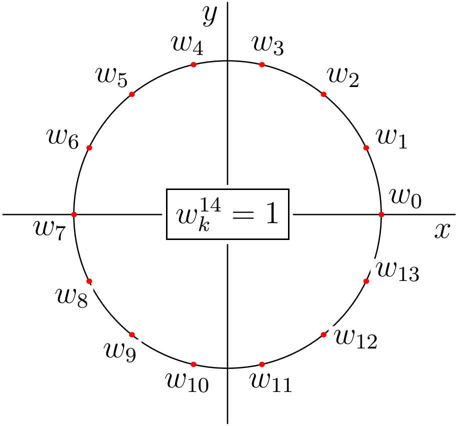
Donc, quelle que soit la valeur de k, w_k se trouve parmi $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$.

$\square$

Les racines de l'unité

Un cas particulier est $z = 1$. Dans ce cas, les racines n-èmes de 1 sont appelées racines n^{e} de l'unité et sont données par :

$$w_k = \exp\left(i\,\frac{2k\pi}{n}\right) \qquad \text{où } k = 0, \ldots, n-1.$$



Nous pouvons les représenter géométriquement : ce sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés centré en 0.

On voit par exemple que les racines 4-èmes de 1 sont $1, i, -1, -i$: les sommets d'un carré centré en 0.

Question

Déterminez les 4 racines 4-èmes de i.

Réponse

En ecrivant $i = \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)$, les racines 4-èmes de i sont données par:

$$w_k = \exp\left(i\left(\frac{\pi}{8} + \frac{2k\pi}{4}\right)\right) \quad \text{pour } 0 \leq k \leq 3.$$

Ces racines sont donc:

$$\exp\left(i\frac{\pi}{8}\right), \quad \exp\left(i\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \exp\left(i\frac{5\pi}{8}\right),$$

$$\exp\left(i\left(\frac{\pi}{8} + \pi\right)\right) = -\exp\left(i\frac{\pi}{8}\right), \quad \exp\left(i\left(\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{2}\right)\right) = \exp\left(-i\frac{3\pi}{8}\right).$$

Contenu de la section

Équations polynomiales de degrés supérieur

Soit $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ est un polynôme de degré n à coefficients complexes. Nous définissons :

Définition

Une racine $r \in \mathbb{C}$ de P est dite de *multiplicité* $m \geq 1$ si on peut écrire

$$P(z) = (z - r)^m Q(z),$$

où Q est un polynôme de degré $n - m$ dont r n'est pas une racine.

Nous énonçons le théorème fondamental suivant, que nous ne montrerons pas:

Théorème (Théorème fondamental de l'algèbre)

Tout polynôme de degré n admet exactement n racines complexes (comptées avec leur multiplicité).

Contenu de la section

Contenu de la section

Fonctions réelles à valeurs complexes

Une fonction réelle à valeurs complexes est une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.
Comme $\mathbb{C}$ est identifiable à $\mathbb{R}^2$, un certain nombre de définitions se transposent aisément du cas

« fonction réelle à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ »

au cas

« fonction réelle à valeurs complexes ».

En particulier la notion de dérivée: pour dériver une fonction à valeurs complexes, il suffit de dériver en considérant que i est une constante.

Ceci revient effectivement à dériver « composante par composante ».

Exemple

Dérivons la fonction y définie par

$$y(x) = \exp(\lambda x),$$

où $x \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Écrivons $\lambda = a + ib$: alors, par définition de l'exponentielle complexe,

$$y(x) = \exp(ax + ibx) = \exp(ax)(\cos bx + i \sin(bx)).$$

La dérivée de y vaut alors :

$$y'(x) = a \exp(ax)(\cos(bx) + i \sin(bx)) + \exp(ax)(-b \sin(bx) + bi \cos(bx))$$

ce que nous pouvons ré-écrire comme:

$$y'(x) = a \exp(ax) \exp(ibx) + bi \exp(ax)(i \sin(bx) + \cos(bx))$$

et donc

$$y'(x) = (a + bi) \exp(ax) \exp(ibx) = \lambda \exp(\lambda x) = \lambda y(x).$$

Cet exemple montre que la fonction exponentielle complexe suit la même propriété de dérivation que l'exponentielle réelle.

Contenu de la section

Retour sur les ÉDOs

Considérons l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$a_n y^{\underline{n}} + a_{n-1} y^{\underline{(n-1)}} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f$$

où $a_0, \ldots, a_n$ sont des constantes (réelles ou complexes) et f est une fonction donnée.

Rappel: Une solution de cette ÉDP est une fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui verifie:

$$a_n y^{\underline{n}}(x) + a_{n-1} y^{\underline{(n-1)}}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Nous avons déjà étudié les cas $n = 1$ et $n = 2$ dans le cas réel (équations du premier et second ordre), mais nous allons maintenant discuter brièvement le cas général à l'aide des nombres complexes.

Les nombres complexes vont nous permettre ici de résoudre l'équation linéaire homogène associée en toute généralité.

Méthode de résolution d'ÉDO homogènes

Considérons une équation linéaire homogène:

$$a_n y^{\underline{n}} + a_{n-1} y^{\underline{(n-1)}} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

Cherchons une solution sous la forme:

$$y(x) = \exp(\lambda x)$$

pour un certain nombre complexe λ. On a $y'(x) = \lambda \exp(\lambda x)$, $y''(x) = \lambda^2 \exp(\lambda x)$, etc... Dès lors:

$$a_y y^{\underline{n}} + a_{n-1} y^{\underline{(n-1)}} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = \Big(a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0\Big) y.$$

En particulier, ce y sera solution de l'ÉDO si et seulement si:

$$P(z) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0.$$

Cette équation polynomiale est appelée équation caractéristique de l'ÉDO. On sait qu'elle admet généralement n solutions (comptées avec multiplicité.)

Résultat général

Mentionnons maintenant le résultat général:

Théorème

Les solutions de l'équation

$$a_n y^{\underline{n}} + a_{n-1} y^{\underline{(n-1)}} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

sont obtenues comme combinaison linéaire à coefficients complexes de n fonctions particulières. Ces fonctions sont déterminées comme suit : si $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sont les solutions distinctes de l'équation caractéristique, de multiplicités respectives $m_1, \ldots, m_k$, alors les n fonctions à considérer sont:

$$\begin{aligned}
&\exp(\lambda_1 x), \quad x\exp(\lambda_1 x), \quad \ldots, \quad x^{m_1-1}\exp(\lambda_1 x) \\
&\vdots \\
&\exp(\lambda_k x), \quad x\exp(\lambda_k x), \quad \ldots, \quad x^{m_k-1}\exp(\lambda_k x).
\end{aligned}$$

Exemple

Considérons l′équation différentielle $y^{\underline{4}} = y$. Quelles sont les fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui sont solution de cette équation?

Le polynôme caractéristique est: $\lambda^4 - 1$. Les racines (complexes) sont données par : $\exp\left(i\frac{2k\pi}{4}\right)$, pour k compris entre 0 et 3, c′est-à-dire:

$$\exp(i0), \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right), \exp(i\pi), \exp\left(i\frac{3\pi}{2}\right)$$

ou encore:

$$1, \quad i, \quad -1, \quad -i.$$

Chacune est donc de multiplicité 1.

Dès lors la solution générale y est combinaison linéaire des fonctions suivantes :

$$\exp(x), \quad \exp(ix), \quad \exp(-ix), \quad \exp(-x),$$

c′est-à-dire :

$$y(x) = A\exp x + B\exp(ix) + C\exp(-ix) + D\exp(-x),$$

où $A, B, C, D \in \mathbb{C}$ sont des constantes complexes.

Exemple (Suite)

La solution générale s'écrit donc:

$$y(x) = A\exp x + B\exp(ix) + C\exp(-ix) + D\exp(-x),$$

avec $A,B,C,D \in \mathbb{C}$.

Attention: nous n'avons pas encore terminé la résolution, car on cherche des fonctions y à valeurs réelles qui sont solution.

On cherche donc les valeurs possibles de A,B,C,D pour avoir $\overline{y(x)} = y(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Comme:

$$\overline{y(x)} = \overline{A}\exp x + \overline{B}\exp(-ix) + \overline{C}\exp(ix) + \overline{D}\exp(-x),$$

on voit donc en identifiant les coefficients qu'il faut choisir:

$$A = \overline{A} \text{ (donc } A \in \mathbb{R}\text{)}, \quad C = \overline{B} \quad \text{ et } D = \overline{D} \text{ (donc } D \in \mathbb{R}\text{)}.$$

Exemple (Suite)

La solution cherchée s'écrit donc désormais:

$$y(x) = A\exp x + B\exp(ix) + \overline{B}\exp(-ix) + D\exp(-x),$$

avec $A, D \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{C}$.

On écrit alors $B = E + iF$ pour des constantes réelles E et F. Dès lors, $C = \overline{B} = E - iF$. Pour trouver l'expression générale de la solution y, on remplace les fonction $\exp(ix)$ et $\exp(-ix)$ par leur expression explicite:

$$\begin{aligned} y(x) &= A\exp x + (E+iF)\exp(ix) + (E-iF)\exp(-ix) + D\exp(-x) \\ &= A\exp x + (E+iF)\Big(\cos(x) + i\sin(x)\Big) \\ &+ (E-iF)\Big(\cos(x) - i\sin(x)\Big) + D\exp(-x) \\ &= A\exp x + 2E\cos(x) - 2F\sin(x) + D\exp(-x). \end{aligned}$$

Comme E et F sont arbitraires, ceci montre donc que toute solution $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de l'équation s'écrit finalement:

$$y(x) = \alpha\exp x + \beta\cos x + \gamma\sin x + \delta\exp(-x),$$

avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ des constantes réelles arbitraires.